

Спектры и диаметры графов Кэли некоторых конечных групп

А. Ю. Овчаренко

В работе рассматривается задача поиска целочисленных графов Кэли на знакопеременных группах A_n при $n = 4, 5, 6, 7, 8$ для различных наборов порождающих, а также проверена гипотеза о целочисленности графов Кэли конечных групп, порождённых инвариантным множеством инволюций. Эта гипотеза проверена для групп диэдра D_{2n} при $n = 6, 7, \dots, 132$, линейных групп $L_2(n)$ при $n = 5, 7, 8, 9, 11, 13$ и симметрических групп S_n при $n = 3, 4, 5, 6$. Представлены диаметры графов Кэли для упомянутых групп.

Ключевые слова: множество порождающих, инволюция, спектр, граф Кэли, знакопеременная группа, группа диэдра, линейная группа, симметрическая группа, диаметр.

1. Введение

В настоящее время применение архитектуры параллельных вычислительных систем является своего рода стратегическим направлением развития вычислительной техники. При организации параллельных вычислений в многопроцессорных вычислительных системах для реализации взаимодействия, синхронизации и взаимоисключения параллельно выполняемых процессов используется передача данных между процессорами вычислительной среды. Временные задержки при передаче данных по линиям связи могут оказаться существенными (по сравнению с быстродействием процессоров), в результате чего коммуникационная трудоемкость алгоритма оказывает существенное влияние на выбор параллельных способов решения задач.

В 1986 году С. Эйкерс и Б. Кришнамурти [1] впервые предложили использовать графы Кэли для представления компьютерных сетей, в том числе для моделирования топологий многопроцессорных вычислительных систем. Начиная с того момента данное направление активно развивается.

На данный момент графы Кэли широко применяются в качестве основы для создания топологий для многопроцессорных вычислительных систем. Например, такие базовые топологии сети, как кольцо, гиперкуб и тор, являются графами Кэли.

Сравнение графов большого порядка (с количеством узлов, исчисляющимся тысячами) показало, что некоторые графы Кэли обладают в этом смысле очень хорошими свойствами. В частности, среди привлекательных свойств графов Кэли можно отметить следующие: регулярность, вершинная транзитивность, малый диаметр и степень при достаточно большом количестве вершин в графе.

Графом Кэли $\Gamma = Cay(G, S) = (V, E)$ на группе G относительно порождающего множества S называется граф с множеством вершин $V = G$ и множеством ребер $E = \{\{g, h\} : g, h \in G, g^{-1}h \in S\}$. Иными словами, графом Кэли группы G по системе порож-

дающих S является граф, вершинами которого являются элементы группы, и элемент g соединён ребром в точности с теми элементами, которые получаются домножением g на элемент из S .

Замечание. В случае если $S \neq S^{-1}$, вместо S берут объединение $S \cup S^{-1}$. Это позволяет считать граф Кэли неориентированным. Кроме того, он не содержит петель, так как единичный элемент не принадлежит S .

Спектр графа Γ определяется как множество характеристических корней матрицы смежности.

Задача определения, является ли данный граф целочисленным, была поставлена в 1974 г. Ф. Харари и А. Швенком и с тех пор привлекла внимание многих специалистов в теории графов. Было, в частности, доказано, что вероятность того, что граф с n вершинами является

целочисленным, составляет $2^{\frac{-n}{400}}$ для достаточно большого n . Примеры целочисленных графов достаточно редки. В данной работе приведены целочисленные графы, а также полные целые спектры графов, а именно, целые собственные значения и их кратности.

Более точно, целью нашей работы является изучение графов Кэли некоторых конечных групп, таких как знакопеременная группа A_n , диэдральная группа D_{2n} , линейная группа $L_2(n)$, на предмет установления целочисленности спектров их матриц смежности.

Пусть $G = A_4$, $R = \langle (123), (124) \rangle$. Поскольку $R \neq R^{-1}$, заменим R на $S = R \cup R^{-1} = \{(123), (132), (124), (142)\}$. Получившийся граф Кэли будет иметь вид, как на рис. 1.

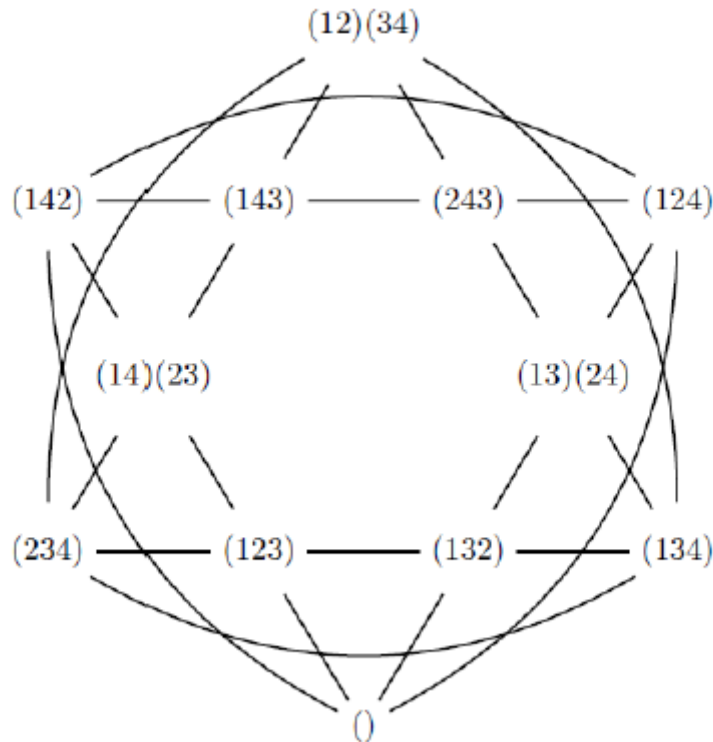


Рис. 1.

Его матрица смежности A при естественной нумерации вершин сверху вниз и слева направо равна:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином p матрицы A равен:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^{12} - 24x^{10} - 16x^9 + 192x^8 + 192x^7 - 640x^6 - 768x^5 + 768x^4 + 1024x^3 = \\ &= (x-4)(x-2)^3(x+4)(x-2)^5x^3. \end{aligned}$$

Спектр матрицы A равен $(-2)^5, (0)^3, (2)^3, (4)^1$. Эта запись означает, что кратности корней $-2, 0, 2, 4$ равны соответственно $5, 3, 3, 1$. Поскольку их сумма равна $12 = |A_4|$, то граф целочисленный.

2. Целочисленные графы Кэли

Поскольку матрица смежности графа Кэли является симметричной (в силу неориентированности графа Кэли), то все характеристические корни этой матрицы вещественные.

В силу определения, введённого Ф. Харари и А. Д. Швенком в работе [2], граф G называется целочисленным, если его спектр состоит из целых чисел. В этой же работе они поставили задачу поиска целочисленных графов Кэли. Более точно, они сформировали следующий вопрос [2]: спектр каких графов состоит только из целых чисел?

Приведенный выше пример показывает, что определение спектра графа даже со сравнительно небольшим числом вершин может представлять собой серьёзную вычислительную задачу. Для конкретного графа Кэли установление его целочисленности может быть проведено по следующей схеме, которая предполагает привлечение вычислительной техники с использованием пакетов, в которых реализована целочисленная арифметика.

Пусть A – матрица смежности графа Кэли $\Gamma = Cay(G, S)$ группы G порядка m , где $S = S^{-1}$ и $|S| = s$. Если z – целое число, то кратность $k(z)$ числа z как характеристического корня A в связи с тем, что A – симметрическая матрица, равна размерности $d(z)$ пространства собственных векторов матрицы $A - zE$, где E – единичная матрица размерности m , которая, в свою очередь, равна $m - r(z)$, где $r(z)$ – ранг матрицы $A - zE$. Ранг $r(z)$ можно вычислить с помощью известного алгоритма Гаусса.

По [3] характеристические корни A расположены в промежутке $[-s; s]$, поэтому за конечное число шагов можно найти все целые характеристические корни z_1, \dots, z_t матрицы A и

их кратности. Очевидно, граф Γ является целочисленным тогда и только тогда, когда $z_1 + \dots + z_t = m$.

Эта схема была запрограммирована с использованием пакета GAP [4], в котором реализована целочисленная арифметика, допускающая точные (не приближённые) вычисления с целыми числами, длины десятичных записей которых могут быть произвольно большими.

3. Основные результаты

В этом разделе представлены спектры графов Кэли для следующих видов групп: знакопеременные группы A_n для $n = 4, 5, 6, 7, 8$ с различными наборами порождающих; симметрические группы S_n для $n = 3, 4, 5, 6$, порождённые набором всех транспозиций вида (ij) или набором всех инволюций; группы диэдра D_{2n} для $n = 6, 7, \dots, 132$, порождённые набором всех инволюций; линейные группы $L_2(n)$ для $n = 5, 7, 8, 9, 11, 13$, порождённые набором всех инволюций.

Полученные результаты приведены в виде таблиц. Колонка «порядок» указывает порядок соответствующей группы. В колонке «спектр» символ $(n)^k$ означает, что для графа Кэли на данном наборе порождающих число $n \in \mathbb{Z}$ является собственным значением кратности k .

Табл. 1 содержит спектры графов Кэли для A_n при $n = 4, 5, 6, 7, 8$. В последнем столбце знак «+» указывает на то, что соответствующий граф является целочисленным. Табл. 2 содержит спектры графов Кэли для симметрических групп S_n при $n = 3, 4, 5, 6$, порождённых набором всех транспозиций вида (ij) и набором всех инволюций. Все графы из этой таблицы являются целочисленными. Табл. 3 содержит спектры графов Кэли для линейных групп $L_2(n)$ при $n = 5, 7, 8, 9, 11, 13$, порождённых набором всех инволюций. Все графы из этой таблицы тоже являются целочисленными. Наконец, в табл. 4 приводятся спектры графов Кэли диэдральных групп D_{2n} для $n = 6, 7, \dots, 132$, также порождённых множеством всех инволюций. Эти графы тоже целочисленные.

Таблица 1. Спектры графов Кэли для A_n при $n = 4, 5, 6, 7, 8$

n	Порядок	Наборы порождающих	Спектр	
$n = 4$	12	$(123), (124)$	$(-2)^5, (0)^3, (2)^3, (4)^1$	+
		$(123), (234)$	$(-2)^5, (0)^3, (2)^3, (4)^1$	+
		$(123), (134)$	$(-2)^5, (0)^3, (2)^3, (4)^1$	+
		$(123), (12)(34)$	$(-2)^3, (-1)^3, (0)^2, (2)^3, (3)^1$	+
		$(123), (124), (134)$	$(-3)^2, (-2)^3, (1)^6, (6)^1$	+
$n = 5$	60	$(123), (124), (125)$	$(-3)^{14}, (-2)^5, (-1)^{12}, (1)^{14}, (2)^6, (4)^8, (6)^1$	+
		$(123), (234), (345)$	$(-3)^{10}, (-1)^{10}, (2)^5, (6)^1$	-
		$(123), (134), (145)$	$(-3)^{10}, (-1)^{10}, (2)^5, (6)^1$	-
		$(123), (12)(34), (12)(45)$	$(-3)^4, (-2)^5, (0)^5, (4)^1$	-

		(123),(124),(125),(134), (135),(145)	$(-4)^{15}, (-3)^4, (0)^{28}, (5)^{12}, (12)^1$	+
$n = 6$	360	(123),(124),(125),(126)	$(-4)^{42}, (-3)^{48}, (-2)^{39}, (-1)^{32}, (0)^{45},$ $(1)^{48}, (2)^{42}, (4)^{48}, (6)^{15}, (8)^1$	+
		(123),(234),(345),(456)	$(-4)^{19}, (-2)^5, (0)^{20}, (1)^5,$ $(2)^{10}, (5)^5, (8)^1$	-
		(123),(134),(145),(156)	$(-4)^5, (-2)^{24}, (0)^{15}, (8)^1$	-
		(123),(12)(34),(12)(45), (12)(56)	$(-4)^5, (-2)^9, (-1)^{10}, (0)^9, (2)^5, (5)^1$	-
		(123),(124),(125),(126),(134), (135),(136),(145),(146),(156)	$(-5)^{84}, (-4)^{30}, (-1)^{120},$ $(4)^{105}, (11)^{20}, (20)^1$	+
$n = 7$	2520	(123),(124),(125),(126),(127)	$(-5)^{132}, (-4)^{315}, (-3)^{200}, (-2)^{294},$ $(-1)^{120}, (0)^{462}, (1)^{200}, (2)^{225}, (3)^{132},$ $(4)^{255}, (6)^{160}, (8)^{24}, (10)^1$	+
		(123),(234),(345),(456),(567)	$(-5)^{28}, (10)^1$	-
		(123),(134),(145),(156),(167)	$(-2)^{21}, (1)^{20}, (10)^1$	-
		(123),(12)(34),(12)(45), (12)(56),(12)(67)	$(-5)^6, (-4)^{15}, (0)^{14}, (5)^6, (6)^1$	-
		(123),(124),(125),(126),(127), (134),(135),(136),(137),(145), (146),(147),(156),(157),(167)	$(-6)^{420}, (-5)^{468}, (-2)^{495}, (3)^{830},$ $(10)^{276}, (19)^{30}, (30)^1$	+
$n = 8$	20160	(123),(124),(125),(126), (127),(128)	$(-6)^{429}, (-5)^{1760}, (-4)^{1719}, (-3)^{1792},$ $(-2)^{1350}, (-1)^{2112}, (0)^{2730}, (1)^{1792},$ $(2)^{1152}, (3)^{1760}, (4)^{1624}, (6)^{1514}, (8)^{390},$ $(10)^{35}, (12)^1$	+

Гипотеза 1. Пусть $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$, где $G = A_n$, $n \in \mathbb{N}$, $R = \{(12i) \mid i = 3, \dots, n\}$, $S = R \cup R^{-1}$. Тогда граф Γ – целочисленный.

Гипотеза 2. Пусть $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$, где $G = A_n$, $n \in \mathbb{N}$, $R = \{(1ij) \mid 1 < i < j \leq n\}$, $S = R \cup R^{-1}$. Тогда граф Γ – целочисленный.

Таблица 2. Спектры графов Кэли для групп S_n при $n = 3, 4, 5, 6$

n	Порядок	Наборы порождающих	Спектр
$n = 3$	6	Все транспозиции	$(-3)^1, (0)^4, (3)^1$
		Все инволюции	$(-3)^1, (0)^4, (3)^1$
$n = 4$	24	Все транспозиции	$(-6)^1, (-2)^9, (0)^4, (2)^9, (6)^1$
		Все инволюции	$(-3)^{10}, (1)^9, (3)^4, (9)^1$
$n = 5$	120	Все транспозиции	$(-10)^1, (-5)^{16}, (-2)^{25}, (0)^{36}, (2)^{25}, (5)^{16}, (10)^1$
		Все инволюции	$(-5)^{52}, (1)^{25}, (5)^{42}, (25)^1$
$n = 6$	720	Все транспозиции	$(-15)^1, (-9)^{25}, (-5)^{81}, (-3)^{125}, (0)^{256}, (3)^{125}, (5)^{81}, (9)^{25}, (15)^1$
		Все инволюции	$(-9)^{200}, (-5)^{81}, (0)^{256}, (3)^{50}, (15)^{132}, (75)^1$

Гипотеза 3. Пусть $\Gamma = \text{Cay}(G, S)$, где $G = S_n$, $n \in \mathbb{N}$, $S = \{(ij) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$. Тогда граф Γ – целочисленный.

Таблица 3. Спектры графов Кэли для групп $L_2(n)$, порожденных множеством всех инволюций при $n = 5, 7, 8, 9, 11, 13$

n	Порядок	Спектр
$n = 5$	60	$(-5)^{18}, (0)^{16}, (3)^{25}, (15)^1$
$n = 7$	168	$(-7)^{18}, (-3)^{49}, (0)^{64}, (7)^{36}, (21)^1$
$n = 8$	504	$(-9)^{196}, (0)^{64}, (7)^{243}, (63)^1$
$n = 9$	360	$(-9)^{100}, (0)^{128}, (5)^{81}, (9)^{50}, (45)^1$
$n = 11$	660	$(-11)^{100}, (-5)^{121}, (0)^{288}, (11)^{150}, (55)^1$
$n = 13$	1092	$(-13)^{294}, (0)^{432}, (7)^{169}, (13)^{196}, (91)^1$

Таблица 4. Спектры графов Кэли для групп D_{2n} , порожденных множеством всех инволюций при $n = 6, 7, \dots, 132$

Группа	Порядок	Спектр
D_{12}	12	$(-5)^1, (-1)^6, (1)^4, (7)^1$
D_{14}	14	$(-7)^1, (0)^{12}, (7)^1$
D_{16}	16	$(-7)^1, (-1)^8, (1)^6, (9)^1$
D_{18}	18	$(-9)^1, (0)^{16}, (9)^1$
D_{20}	20	$(-9)^1, (-1)^{10}, (1)^8, (11)^1$
D_{22}	22	$(-11)^1, (0)^{20}, (11)^1$

D_{24}	24	$(-11)^1, (-1)^{12}, (1)^{10}, (13)^1$
D_{26}	26	$(-13)^1, (0)^{24}, (13)^1$
D_{28}	28	$(-13)^1, (-1)^{14}, (1)^{12}, (15)^1$
D_{30}	30	$(-15)^1, (0)^{28}, (15)^1$
D_{32}	32	$(-15)^1, (-1)^{16}, (1)^{14}, (17)^1$
D_{34}	34	$(-17)^1, (0)^{32}, (17)^1$
D_{36}	36	$(-17)^1, (-1)^{18}, (1)^{16}, (19)^1$
D_{38}	38	$(-19)^1, (0)^{36}, (19)^1$
D_{40}	40	$(-19)^1, (-1)^{20}, (1)^{18}, (21)^1$
D_{42}	42	$(-21)^1, (0)^{40}, (21)^1$
D_{44}	44	$(-21)^1, (-1)^{22}, (1)^{20}, (23)^1$
D_{46}	46	$(-23)^1, (0)^{44}, (23)^1$
D_{48}	48	$(-23)^1, (-1)^{24}, (1)^{22}, (25)^1$
D_{50}	50	$(-25)^1, (0)^{48}, (25)^1$
D_{52}	52	$(-25)^1, (-1)^{26}, (1)^{24}, (27)^1$
D_{54}	54	$(-27)^1, (0)^{52}, (27)^1$
D_{56}	56	$(-27)^1, (-1)^{28}, (1)^{26}, (29)^1$
D_{58}	58	$(-29)^1, (0)^{56}, (29)^1$
D_{60}	60	$(-29)^1, (-1)^{30}, (1)^{28}, (31)^1$
D_{62}	62	$(-31)^1, (0)^{60}, (31)^1$
D_{64}	64	$(-31)^1, (-1)^{32}, (1)^{30}, (33)^1$
D_{66}	66	$(-33)^1, (0)^{64}, (33)^1$
D_{68}	68	$(-33)^1, (-1)^{34}, (1)^{32}, (35)^1$
D_{70}	70	$(-35)^1, (0)^{68}, (35)^1$
D_{72}	72	$(-35)^1, (-1)^{36}, (1)^{34}, (37)^1$
D_{74}	74	$(-37)^1, (0)^{72}, (37)^1$
D_{76}	76	$(-37)^1, (-1)^{38}, (1)^{36}, (39)^1$
D_{78}	78	$(-39)^1, (0)^{76}, (39)^1$
D_{80}	80	$(-39)^1, (-1)^{40}, (1)^{38}, (41)^1$

D_{82}	82	$(-41)^1, (0)^{80}, (41)^1$
D_{84}	84	$(-41)^1, (-1)^{42}, (1)^{40}, (43)^1$
D_{86}	86	$(-43)^1, (0)^{84}, (43)^1$
D_{88}	88	$(-43)^1, (-1)^{44}, (1)^{42}, (45)^1$
D_{90}	90	$(-45)^1, (0)^{88}, (45)^1$
D_{92}	92	$(-45)^1, (-1)^{46}, (1)^{44}, (47)^1$
D_{94}	94	$(-47)^1, (0)^{92}, (47)^1$
D_{96}	96	$(-47)^1, (-1)^{48}, (1)^{46}, (49)^1$
D_{98}	98	$(-49)^1, (0)^{96}, (49)^1$
D_{100}	100	$(-49)^1, (-1)^{50}, (1)^{48}, (51)^1$
D_{102}	102	$(-51)^1, (0)^{100}, (51)^1$
D_{104}	104	$(-51)^1, (-1)^{52}, (1)^{50}, (53)^1$
D_{106}	106	$(-53)^1, (0)^{104}, (53)^1$
D_{108}	108	$(-53)^1, (-1)^{54}, (1)^{52}, (55)^1$
D_{110}	110	$(-55)^1, (0)^{108}, (55)^1$
D_{112}	112	$(-55)^1, (-1)^{56}, (1)^{54}, (57)^1$
D_{114}	114	$(-57)^1, (0)^{112}, (57)^1$
D_{116}	116	$(-57)^1, (-1)^{58}, (1)^{56}, (59)^1$
D_{118}	118	$(-59)^1, (0)^{116}, (59)^1$
D_{120}	120	$(-59)^1, (-1)^{60}, (1)^{58}, (61)^1$
D_{122}	122	$(-61)^1, (0)^{120}, (61)^1$
D_{124}	124	$(-61)^1, (-1)^{62}, (1)^{60}, (63)^1$
D_{126}	126	$(-63)^1, (0)^{124}, (63)^1$
D_{128}	128	$(-63)^1, (-1)^{64}, (1)^{62}, (65)^1$
D_{130}	130	$(-65)^1, (0)^{128}, (65)^1$
D_{132}	132	$(-65)^1, (-1)^{66}, (1)^{64}, (67)^1$
D_{134}	134	$(-67)^1, (0)^{132}, (67)^1$
D_{136}	136	$(-67)^1, (-1)^{68}, (1)^{66}, (69)^1$
D_{138}	138	$(-69)^1, (0)^{136}, (69)^1$

D_{140}	140	$(-69)^1, (-1)^{70}, (1)^{68}, (71)^1$
D_{142}	142	$(-71)^1, (0)^{140}, (71)^1$
D_{144}	144	$(-71)^1, (-1)^{72}, (1)^{70}, (73)^1$
D_{146}	146	$(-73)^1, (0)^{144}, (73)^1$
D_{148}	148	$(-73)^1, (-1)^{74}, (1)^{72}, (75)^1$
D_{150}	150	$(-75)^1, (0)^{148}, (75)^1$
D_{152}	152	$(-75)^1, (-1)^{76}, (1)^{74}, (77)^1$
D_{154}	154	$(-77)^1, (0)^{152}, (77)^1$
D_{156}	156	$(-77)^1, (-1)^{78}, (1)^{76}, (79)^1$
D_{158}	158	$(-79)^1, (0)^{156}, (79)^1$
D_{160}	160	$(-79)^1, (-1)^{80}, (1)^{78}, (81)^1$
D_{162}	162	$(-81)^1, (0)^{160}, (81)^1$
D_{164}	164	$(-81)^1, (-1)^{82}, (1)^{80}, (83)^1$
D_{166}	166	$(-83)^1, (0)^{164}, (83)^1$
D_{168}	168	$(-83)^1, (-1)^{84}, (1)^{82}, (85)^1$
D_{170}	170	$(-85)^1, (0)^{168}, (85)^1$
D_{172}	172	$(-85)^1, (-1)^{86}, (1)^{84}, (87)^1$
D_{174}	174	$(-87)^1, (0)^{172}, (87)^1$
D_{176}	176	$(-87)^1, (-1)^{88}, (1)^{86}, (89)^1$
D_{178}	178	$(-89)^1, (0)^{176}, (89)^1$
D_{180}	180	$(-89)^1, (-1)^{90}, (1)^{88}, (91)^1$
D_{182}	182	$(-91)^1, (0)^{180}, (91)^1$
D_{184}	184	$(-91)^1, (-1)^{92}, (1)^{90}, (93)^1$
D_{186}	186	$(-93)^1, (0)^{184}, (93)^1$
D_{188}	188	$(-93)^1, (-1)^{94}, (1)^{92}, (95)^1$
D_{190}	190	$(-95)^1, (0)^{188}, (95)^1$
D_{192}	192	$(-95)^1, (-1)^{96}, (1)^{94}, (97)^1$
D_{194}	194	$(-97)^1, (0)^{192}, (97)^1$
D_{196}	196	$(-97)^1, (-1)^{98}, (1)^{96}, (99)^1$

D_{198}	198	$(-99)^1, (0)^{196}, (99)^1$
D_{200}	200	$(-99)^1, (-1)^{100}, (1)^{98}, (101)^1$
D_{202}	202	$(-101)^1, (0)^{200}, (101)^1$
D_{204}	204	$(-101)^1, (-1)^{102}, (1)^{100}, (103)^1$
D_{206}	206	$(-103)^1, (0)^{204}, (103)^1$
D_{208}	208	$(-103)^1, (-1)^{104}, (1)^{102}, (105)^1$
D_{210}	210	$(-105)^1, (0)^{208}, (105)^1$
D_{212}	212	$(-105)^1, (-1)^{106}, (1)^{104}, (107)^1$
D_{214}	214	$(-107)^1, (0)^{212}, (107)^1$
D_{216}	216	$(-107)^1, (-1)^{108}, (1)^{106}, (109)^1$
D_{218}	218	$(-109)^1, (0)^{216}, (109)^1$
D_{220}	220	$(-109)^1, (-1)^{110}, (1)^{108}, (111)^1$
D_{222}	222	$(-111)^1, (0)^{220}, (111)^1$
D_{224}	224	$(-111)^1, (-1)^{112}, (1)^{110}, (113)^1$
D_{226}	226	$(-113)^1, (0)^{224}, (113)^1$
D_{228}	228	$(-113)^1, (-1)^{114}, (1)^{112}, (115)^1$
D_{230}	230	$(-115)^1, (0)^{228}, (115)^1$
D_{232}	232	$(-115)^1, (-1)^{116}, (1)^{114}, (117)^1$
D_{234}	234	$(-117)^1, (0)^{232}, (117)^1$
D_{236}	236	$(-117)^1, (-1)^{118}, (1)^{116}, (119)^1$
D_{238}	238	$(-119)^1, (0)^{236}, (119)^1$
D_{240}	240	$(-119)^1, (-1)^{120}, (1)^{118}, (121)^1$
D_{242}	242	$(-121)^1, (0)^{240}, (121)^1$
D_{244}	244	$(-121)^1, (-1)^{122}, (1)^{120}, (123)^1$
D_{246}	246	$(-123)^1, (0)^{244}, (123)^1$
D_{248}	248	$(-123)^1, (-1)^{124}, (1)^{122}, (125)^1$
D_{250}	250	$(-125)^1, (0)^{248}, (125)^1$
D_{252}	252	$(-125)^1, (-1)^{126}, (1)^{124}, (127)^1$
D_{254}	254	$(-127)^1, (0)^{252}, (127)^1$

D_{256}	256	$(-127)^1, (-1)^{128}, (1)^{126}, (129)^1$
D_{258}	258	$(-129)^1, (0)^{256}, (129)^1$
D_{260}	260	$(-129)^1, (-1)^{130}, (1)^{128}, (131)^1$
D_{262}	262	$(-131)^1, (0)^{260}, (131)^1$
D_{264}	264	$(-131)^1, (-1)^{132}, (1)^{130}, (133)^1$

Гипотеза 4. Пусть $\Gamma = Cay(G, S)$, где G – группа, порождённая инволюциями, S – инвариантное множество инволюций группы G . Тогда граф Γ – целочисленный.

4. Диаметры

Современные фундаментальные и прикладные исследования в огромной мере используют компьютерные вычисления, поэтому актуальной является задача увеличения мощности компьютеров. Последовательные вычисления имеют очевидные ограничения, поэтому исследователи все больше заинтересованы в архитектуре параллельных вычислительных систем. В отличие от последовательного вычисления, параллельное вычисление требует, чтобы процессоры имели возможность взаимодействия друг с другом.

Для изучения свойств межсетевое взаимодействия удобно использовать инструменты и результаты из теории графов: представим процессор узлом, а канал связи между двумя процессорами – ребром; свойства полученного графа (такие как связность и диаметр) обеспечивают непосредственную информацию о сети. Сравнение графов большого порядка (с количеством узлов, исчисляющимся тысячами) показало, что некоторые графы Кэли обладают очень хорошими свойствами.

Если $\Gamma = Cay(G, S) = (V, E)$, то количество вершин $|V|$ равно порядку группы G . Граф Кэли является регулярным и его степень – s , т.е. количество ребер, выходящих из каждой вершины, равно числу порождающих элементов группы: $s = |S|$. Диаметр графа Кэли (средний диаметр), т.е. максимальное (среднее) кратчайшее расстояние от произвольной фиксированной вершины до других вершин графа, равен максимальной (средней) длине минимальных слов группы, записанных через порождающие элементы.

При рассмотрении графа для задач моделирования топологий многопроцессорных вычислительных систем берут во внимание следующие характеристики графа: количество вершин, степень (для регулярного графа), диаметр и средний диаметр.

Табл. 5–8 содержат указанные характеристики для графов Кэли для:

- знакопеременных групп A_n при $n = 4, 5, 6, 7$;
- симметрических групп S_n при $n = 3, 4, 5, 6$, порождённых набором всех транспозиций вида (ij) и набором всех инволюций;
- линейных групп $L_2(n)$ при $n = 5, 7, 8, 9, 11, 13$, порождённых набором всех инволюций;
- диэдральных групп D_{2n} для $n = 6, 7, \dots, 132$, также порождённых множеством всех инволюций.

Порождающие множества являются симметричными, поскольку в этом случае графы будут неориентированными. Именно неориентированные графы, как правило, используют при проектировании топологий многопроцессорных вычислительных систем.

Таблица 5. Диаметры графов Кэли для A_n при $n = 4, 5, 6, 7$

n	Количество вершин	Степень вершины	Наборы порождающих	Диаметр	Средний диаметр
$n = 4$	12	4	(123),(124)	3	1.73
		4	(123),(234)	3	1.73
		4	(123),(134)	3	1.77
		3	(123),(12)(34)	3	2.09
		6	(123),(124),(134)	2	1.45
$n = 5$	60	6	(123),(124),(125)	4	2.63
		6	(123),(234),(345)	5	2.64
		6	(123),(134),(145)	5	2.64
		4	(123),(12)(34),(12)(45)	6	3.78
		12	(123),(124),(125),(134),(135),(145)	3	1.85
$n = 6$	360	8	(123),(124),(125),(126)	6	3.63
		8	(123),(234),(345),(456)	7	3.86
		8	(123),(134),(145),(156)	5	3.45
		5	(123),(12)(34),(12)(45),(12)(56)	10	6.07
		20	(123),(124),(125),(126),(134),(135),(136),(145),(146),(156)	3	2.41
$n = 7$	2520	10	(123),(124),(125),(126),(127)	7	4.67
		10	(123),(234),(345),(456),(567)	10	5.34
		10	(123),(134),(145),(156),(167)	6	4.29
		6	(123),(12)(34),(12)(45),(12)(56),(12)(67)	15	8.91
		30	(123),(124),(125),(126),(127),(134),(135),(136),(137),(145),(146),(147),(156),(157),(167)	4	2.93

Таблица 6. Диаметры графов Кэли для групп S_n при $n = 3, 4, 5, 6$

n	Количество вершин	Степень вершины	Наборы порождающих	Диаметр	Средний диаметр
$n = 3$	6	3	Все транспозиции	2	1.4
		3	Все инволюции	2	1.4
$n = 4$	24	6	Все транспозиции	2	1.61
		9	Все инволюции	3	2.0
$n = 5$	120	10	Все транспозиции	2	1.79
		25	Все инволюции	4	2.74
$n = 6$	720	15	Все транспозиции	2	1.89
		75	Все инволюции	5	3.55

Таблица 7. Диаметры графов Кэли для групп $L_2(n)$,
 порожденных множеством всех инволюций при $n = 5, 7, 8, 9, 11, 13$

n	Количество вершин	Степень вершины	Диаметр	Средний диаметр
$n = 5$	60	15	2	1.75
$n = 7$	168	21	3	2.16
$n = 8$	504	63	2	1.87
$n = 9$	360	45	2	1.87
$n = 11$	660	55	3	2.98
$n = 13$	1092	91	2	1.92

Таблица 8. Диаметры графов Кэли для групп D_{2n} ,
 порожденных множеством всех инволюций при $n = 6, 7, \dots, 132$

Группа	Количество вершин	Степень вершины	Диаметр	Средний диаметр
D_{12}	12	7	2	1.36
D_{14}	14	7	2	1.46
D_{16}	16	9	2	1.40
D_{18}	18	9	2	1.47
D_{20}	20	11	2	1.42
D_{22}	22	11	2	1.48
D_{24}	24	13	2	1.43
D_{26}	26	13	2	1.48
D_{28}	28	15	2	1.44
D_{30}	30	15	2	1.48
D_{32}	32	17	2	1.45
D_{34}	34	17	2	1.48
D_{36}	36	19	2	1.46
D_{38}	38	19	2	1.49
D_{40}	40	21	2	1.46
D_{42}	42	21	2	1.49
D_{44}	44	23	2	1.46
D_{46}	46	23	2	1.49
D_{48}	48	25	2	1.47
D_{50}	50	25	2	1.49
D_{52}	52	27	2	1.47
D_{54}	54	27	2	1.49
D_{56}	56	29	2	1.47
D_{58}	58	29	2	1.49
D_{60}	60	31	2	1.47
D_{62}	62	31	2	1.49
D_{64}	64	33	2	1.48

D_{66}	66	33	2	1.49
D_{68}	68	35	2	1.48
D_{70}	70	35	2	1.49
D_{72}	72	37	2	1.48
D_{74}	74	37	2	1.49
D_{76}	76	39	2	1.48
D_{78}	78	39	2	1.49
D_{80}	80	41	2	1.48
D_{82}	82	41	2	1.49
D_{84}	84	43	2	1.48
D_{86}	86	43	2	1.49
D_{88}	88	45	2	1.48
D_{90}	90	45	2	1.49
D_{92}	92	47	2	1.48
D_{94}	94	47	2	1.49
D_{96}	96	49	2	1.48
D_{98}	98	49	2	1.49
D_{100}	100	51	2	1.48
D_{102}	102	51	2	1.49
D_{104}	104	53	2	1.48
D_{106}	106	53	2	1.49
D_{108}	108	55	2	1.49
D_{110}	110	55	2	1.49
D_{112}	112	57	2	1.49
D_{114}	114	57	2	1.50
D_{116}	116	59	2	1.49
D_{118}	118	59	2	1.50
D_{120}	120	61	2	1.49
D_{122}	122	61	2	1.50
D_{124}	124	63	2	1.49
D_{126}	126	63	2	1.50
D_{128}	128	65	2	1.49
D_{130}	130	65	2	1.50
D_{132}	132	67	2	1.49
D_{134}	134	67	2	1.50
D_{136}	136	69	2	1.49
D_{138}	138	69	2	1.50
D_{140}	140	71	2	1.49
D_{142}	142	71	2	1.50

D_{144}	144	73	2	1.49
D_{146}	146	73	2	1.50
D_{148}	148	75	2	1.50
D_{150}	150	75	2	1.50
D_{152}	152	77	2	1.49
D_{154}	154	77	2	1.50
D_{156}	156	79	2	1.49
D_{158}	158	79	2	1.50
D_{160}	160	81	2	1.49
D_{162}	162	81	2	1.50
D_{164}	164	83	2	1.49
D_{166}	166	83	2	1.50
D_{168}	168	85	2	1.49
D_{170}	170	85	2	1.50
D_{172}	172	87	2	1.49
D_{174}	174	87	2	1.50
D_{176}	176	89	2	1.49
D_{178}	178	89	2	1.50
D_{180}	180	91	2	1.49
D_{182}	182	91	2	1.50
D_{184}	184	93	2	1.49
D_{186}	186	93	2	1.50
D_{188}	188	95	2	1.49
D_{190}	190	95	2	1.50
D_{192}	192	97	2	1.49
D_{194}	194	97	2	1.50
D_{196}	196	99	2	1.49
D_{198}	198	99	2	1.50
D_{200}	200	101	2	1.49
D_{202}	202	101	2	1.50
D_{204}	204	103	2	1.49
D_{206}	206	103	2	1.50
D_{208}	208	105	2	1.49
D_{210}	210	105	2	1.50
D_{212}	212	107	2	1.49
D_{214}	214	107	2	1.50
D_{216}	216	109	2	1.49
D_{218}	218	109	2	1.50
D_{220}	220	111	2	1.49

D_{222}	222	111	2	1.50
D_{224}	224	113	2	1.49
D_{226}	226	113	2	1.50
D_{228}	228	115	2	1.49
D_{230}	230	115	2	1.50
D_{232}	232	117	2	1.49
D_{234}	234	117	2	1.50
D_{236}	236	119	2	1.49
D_{238}	238	119	2	1.50
D_{240}	240	121	2	1.49
D_{242}	242	121	2	1.50
D_{244}	244	123	2	1.49
D_{246}	246	123	2	1.50
D_{248}	248	125	2	1.49
D_{250}	250	125	2	1.50
D_{252}	252	127	2	1.49
D_{254}	254	127	2	1.50
D_{256}	256	129	2	1.49
D_{258}	258	129	2	1.50
D_{260}	260	131	2	1.49
D_{262}	262	131	2	1.50
D_{264}	264	133	2	1.49

Из табл. 8 видим, что диаметр во всех случаях получается равным двум, а средний диаметр варьируется от 1.47 до 1.5 для любого порядка группы.

Сравним полученные характеристики графов Кэли знакопеременных, симметрических, линейных групп и групп диэдра с соответствующими характеристиками гиперкубов и торов. Граф k -мерного гиперкуба имеет 2^k вершин, его степень и диаметр равны k , средний диаметр равен $\frac{k}{2}$ (см., напр., [5]).

Легко увидеть, что графы знакопеременных, симметрических, линейных групп и групп диэдра (в особенности групп диэдра) обладают более предпочтительными характеристиками, чем гиперкубы. Напомним, что топология Γ_1 считается предпочтительнее Γ_2 , если $|V_1| \approx |V_2|$, но $s_1 \prec s_2$ и $D_1 \prec D_2$, где V – количество вершин, s – степень вершины, D – диаметр. Отсюда можно сделать вывод, что данные графы заслуживают внимания при проектировании перспективных топологий многопроцессорных вычислительных систем.

Литература

1. *Akers S., Krishnamurthy B.* A group theoretic model for symmetric interconnection networks // International Conference on Parallel Processing, 1986. P. 216–223.
2. *Harary F. and Schwenk A. J.* Which graphs have integral spectra? Graphs and Combinatorics. Springer-Verlag, Berlin, 1974. P. 45–51
3. *Biggs N.* Algebraic graph theory. Cambridge University Press, 1974.
4. GAP: Groups, algorithms, and programming. URL: <http://www/gap-system.org>.
5. *Кузнецов А. А.* Графы Кэли бернсайдовых групп периода 3 // Сибирские электронные математические известия. 2015. Т. 12. С. 248–254.

Статья поступила в редакцию 04.09.2018.

Овчаренко Алёна Юрьевна

аспирант СибГУТИ (630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86), тел. +7 (952) 917-20-27,
e-mail: shmatova_aaa@mail.ru.

Cayley graphs spectra and diameters of some finite groups

A. Ovcharenko

The problem of finding integral Cayley graphs for alternating groups A_n , where $n = 4, 5, 6, 7, 8$, with different generating sets is considered and also the hypothesis of the integrality of Cayley graphs of finite group generated with an invariant set of involutions is tested. The hypothesis is tested for Dihedral groups D_{2n} with $n = 6, 7, \dots, 132$, linear groups $L_2(n)$ with $n = 5, 7, 8, 9, 11, 13$, and symmetric groups S_n with $n = 3, 4, 5, 6$. The diameters of Cayley graphs for these groups are presented.

Keywords: generating set, involution, spectrum, Cayley graph, alternating group, dihedral group, linear group, symmetric group, diameter.