

Масштабирование нерекурсивных цифровых фильтров с рекурсивными латеральными связями

В. П. Бакалов

В статье излагаются способы масштабирования цифровых фильтров (ЦФ) с латеральными обратными связями (ЛОС). Рассматриваются модели четырех типов нерекурсивных ЦФ с рекурсивными ЛОС. Масштабирование фильтров осуществляется с использованием импульсной характеристики h_i и АЧХ цепи. Полученные результаты позволяют, с одной стороны, предотвратить переполнение разрядной сетки ЦФ с ЛОС, а с другой – существенно повысить его помехоустойчивость и эффективность.

Ключевые слова: нерекурсивные цифровые фильтры, рекурсивные латеральные обратные связи, масштабирование, ограничение максимума сигнала, ограничение энергии сигнала, ограничение максимума АЧХ цепи.

1. Введение

Как известно, при цифровой обработке сигналов сложение чисел с фиксированной запятой может приводить в цифровом фильтре (ЦФ) к такому опасному явлению, как переполнение [1, 2]. Чтобы в ЦФ не возникало переполнения, применяют в определенных точках фильтра процедуру масштабирования множителей, которая позволяет, с одной стороны, предотвратить переполнение, а с другой – сохранить максимально возможное отношение сигнала к уровню шума округления в ЦФ.

Особенно важна проблема масштабирования в ЦФ с латеральными обратными связями [3], использование которых позволяет существенно повысить помехоустойчивость и эффективность цифровых фильтров [4–6].

В данной работе рассматриваются вопросы расчета масштабных множителей для четырех типов нерекурсивных ЦФ с рекурсивными ЛОС по условиям ограничения максимума сигнала, максимума энергии и максимума АЧХ цепи.

2. Цифровой фильтр с ЛОС 1-го типа

Рассмотрим модель двухканального одноуровневого НЦФ с ЛОС 1-го типа [3], представленную на рис. 1.

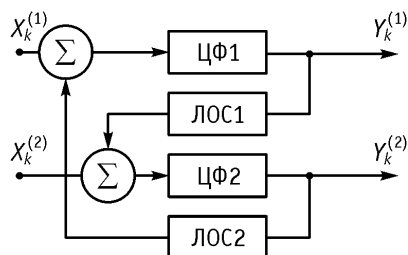


Рис. 1. Двухканальная система с ЛОС. Тип № 1

Будем считать, что ЦФ реализуется в виде нерекурсивных НЦФ, а ЛОС – в виде рекурсивных цепей n -го порядка.

Положим, что шумы квантования и округления на выходе каждого из умножителей и на выходе аналого-цифровых преобразователей (АЦП) некоррелированы между собой и некоррелированы с входными последовательностями каждого канала. Причем источники шума $e_1 \dots e_n$ имеют одинаковую дисперсию и определяются уравнениями [7]:

$$\sigma_k^2 = \sigma^2(kT) = \Delta^2/12, \tag{1}$$

а дисперсия шума на выходе ЦФ уравнением:

$$\sigma^2 = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{k=1}^n h_k^2, \tag{2}$$

где Δ определяется числом используемых разрядов; h_k – импульсная характеристика ЦФ.

С учетом вышеизложенного на рис. 2 изображена шумовая модель НЦФ с ЛОС этого типа, где e_0 – шумовой сигнал, учитывающий шум квантования входного сигнала; e_1, e_n – шумовой сигнал, учитывающий квантование сигналов в умножителях.

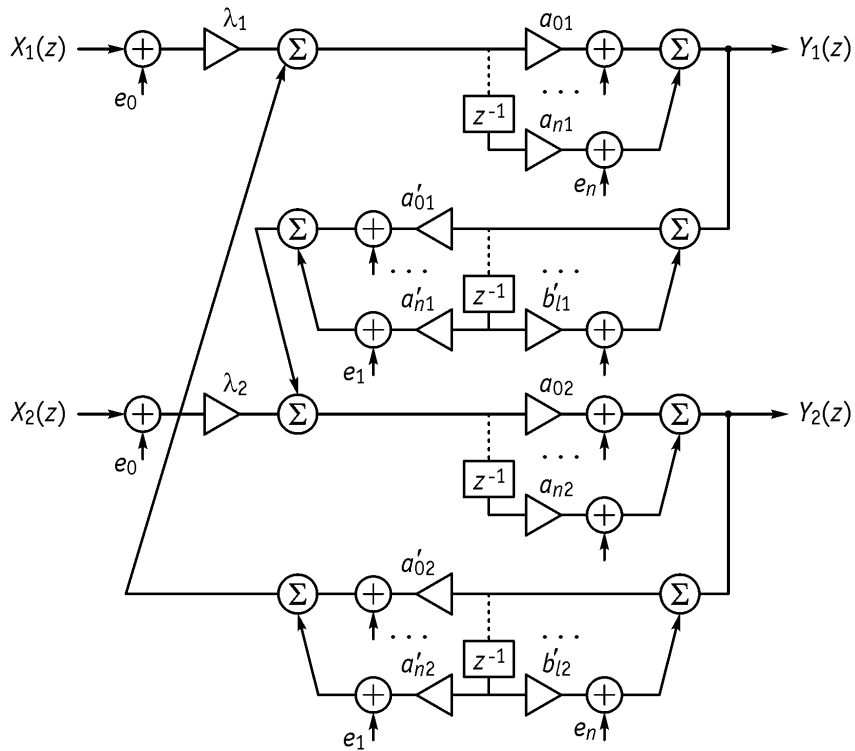


Рис. 2. Модель НЦФ с ЛОС 1-го типа

Передаточная функция нерекурсивного цифрового фильтра (НЦФ1) определяется уравнением:

$$H_1(z) = \sum_{n=0}^{N_1} a_{n1} z^{-n}, \tag{3}$$

где N_1 – количество умножителей НЦФ1.

Аналогично определяется передаточная функция НЦФ2:

$$H_2(z) = \sum_{n=0}^{N_2} a_{n2} z^{-n}, \tag{4}$$

где N_2 – количество умножителей НЦФ2.

Передаточная функция рекурсивного фильтра ЛОС1 определяется уравнением:

$$H_{\text{ЛОС1}}(z) = \sum_{n=0}^{N'_1} a'_{n1} z^{-n} / \left(1 - \sum_{l=1}^{L'_1} b'_{l1} z^{-l} \right), \quad (5)$$

где N'_1, L'_1 – количество умножителей прямой и обратной связи рекурсивного фильтра ЛОС1 соответственно.

Передаточная функция рекурсивного фильтра ЛОС2 определяется уравнением:

$$H_{\text{ЛОС2}}(z) = \sum_{n=0}^{N'_2} a'_{n2} z^{-n} / \left(1 - \sum_{l=1}^{L'_2} b'_{l2} z^{-l} \right), \quad (6)$$

где N'_2, L'_2 – количество умножителей прямой и обратной связи рекурсивного фильтра ЛОС2 соответственно; a_{n1}, a_{n2} – коэффициенты, характеризующие веса нерекурсивной части ЦФ1 и ЦФ2 соответственно; a'_{n1}, a'_{n2} – коэффициенты, характеризующие веса нерекурсивной части ЛОС1 и ЛОС2 соответственно; b'_{l1}, b'_{l2} – коэффициенты, характеризующие веса рекурсивной части ЛОС1 и ЛОС2 соответственно.

Определим масштабные коэффициенты данного фильтра с использованием максимума сигнала, максимума энергии сигнала и максимума АЧХ цепи.

Положим, что импульсная характеристика ЦФ с ЛОС (или его части) равна $h_i(n)$, тогда выходной сигнал фильтра (или его части) $y_i(n)$ будет ограничен величиной

$$\max |y_i(n)| \leq \max |x(n)| \sum_{n=0}^{\infty} |h_i(n)|. \quad (7)$$

Если принять, что $\max |x(n)| \leq 1$, то необходимым условием отсутствия переполнения является:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_i(n)| \leq 1. \quad (8)$$

Для обеспечения данного условия введем масштабные коэффициенты λ_i :

$$\lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} |h_i(n)| \leq 1. \quad (9)$$

Откуда находим λ_i по условию ограничения максимума сигнала:

$$\lambda \leq \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} |h_i(n)|}, \quad (10)$$

где $h_i(n)$ – импульсная характеристика участка ЦФ от входа до выхода i -го сумматора.

Для определения масштабного множителя по условию (10) найдем импульсные характеристики 1-го канала для данного типа ЦФ с ЛОС.

Для первого сумматора передаточная функция определяется уравнением:

$$H_2''(z) = H_2(z) H_{\text{ЛОС2}}(z), \quad (11)$$

где $H_2(z)$ и $H_{\text{ЛОС2}}(z)$ определяются формулами (4) и (6).

Для второго сумматора импульсная характеристика соответствует передаточной функции всего фильтра $H_1(z)$, определяемой (3).

После нахождения передаточных функций $H_2''(z)$ и $H_1(z)$ импульсные характеристики определяются с помощью обратного z -преобразования [7]. В частности, для первого сумматора импульсная характеристика будет равна

$$h_{1\Sigma}(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} H_2''(z) z^{n-1} dz, \quad (12)$$

а для второго сумматора

$$h_{2\Sigma}(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} H_1(z) z^{n-1} dz, \quad (13)$$

где $H_1(z)$, $H_2^*(z)$ определяются формулами (3), (11).

После нахождения импульсных характеристик $h_i(n)$ масштабные коэффициенты для первого $\lambda_{1\Sigma}$ и второго $\lambda_{2\Sigma}$ сумматоров определяются согласно (10) и из них выбирается наименьший: $\lambda = \min \lambda_{\Sigma}$.

Аналогичным образом можно использовать импульсные характеристики h_i при масштабировании ЦФ с ЛОС при ограничении энергии сигнала [7]:

$$\lambda \leq \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} h_i^2(n)}}, \tag{14}$$

где $h_i(n)$ определяется согласно (12), (13).

При расчете масштабных множителей по условию ограничения усиления цепи необходимо задаться неравенством

$$\lambda = \frac{1}{\max H(\omega)}, \tag{15}$$

где $H(\omega) = |He^{j\omega T}|$.

При этом максимальное значение АЧХ цепи $H_{\max}(\omega)$ определяется на частоте, равной собственной частоте нуля или полюса передаточной функции $H(z)$ [7].

Учитывая, что при масштабировании обычно уменьшается отношение сигнал/шум на выходе ЦФ, определим на основании шумовой модели (рис. 2) и формул (1) и (2) дисперсию шума на выходе НЦФ с ЛОС с учетом масштабирования:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{вых}}^2 = & \frac{\lambda_1^2 (2^{-b_{\text{АЦП}}})^2}{12} \left[\sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n) + \sum_{n=0}^{\infty} h_3^2(n) \right] + \\ & + \frac{(2^{-b_{\text{умн}}})^2}{12} \left[N_2' \sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n) + N_1' \sum_{n=0}^{\infty} h_4^2(n) + (L_2' + N_2) \sum_{n=0}^{\infty} h_6^2(n) + N_1 \right], \end{aligned} \tag{16}$$

где $h_1(n) \div H_1(z)$; $h_3(n) \div H_1(z) \cdot H_{\text{ЛОС1}}(z) \cdot H_2(z)$;

$h_4(n) \div H_2(z) \cdot H_{\text{ЛОС2}}(z) \cdot H_1(z)$; $h_6(n) \div H_{\text{ЛОС2}}(z) \cdot H_1(z)$.

Из формулы (16) следует, что дисперсия шума на выходе НЦФ с ЛОС будет определяться суммой дисперсий АЦП и умножителей, причем наибольший вклад в дисперсию шума на выходе вносят умножители.

3. Цифровой фильтр с ЛОС 2-го типа

Рассмотрим масштабирование ЦФ с ЛОС 2-го типа (рис. 3).

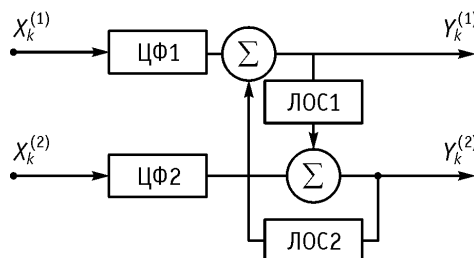


Рис. 3. Двухканальная система с ЛОС. Тип № 2

На рис. 4 представлена шумовая модель этого фильтра при нерекурсивной реализации ЦФ и рекурсивной ЛОС.

Для этого фильтра передаточная функция первого сумматора равна нулю, а второго – определяется передаточной функцией ЦФ1 и передаточной функцией $H_2''(z)$ согласно (11).

При этом импульсная характеристика второго сумматора находится по формуле:

$$h_{2\Sigma}(n) = h_1(n) + h_2''(n) \div (H_1(z) + H_2''(z)), \quad (17)$$

где $H_1(z)$ определяется (3), а $H_2''(z)$ – формулой (11).

После нахождения $h_{2\Sigma}(n)$ по формуле (10) находим масштабные коэффициенты $\lambda_{1\Sigma}$ и $\lambda_{2\Sigma}$ по условию максимума сигнала и выбираем из них наименьший.

Аналогичным образом определяются масштабные множители по условиям (14) и (15).

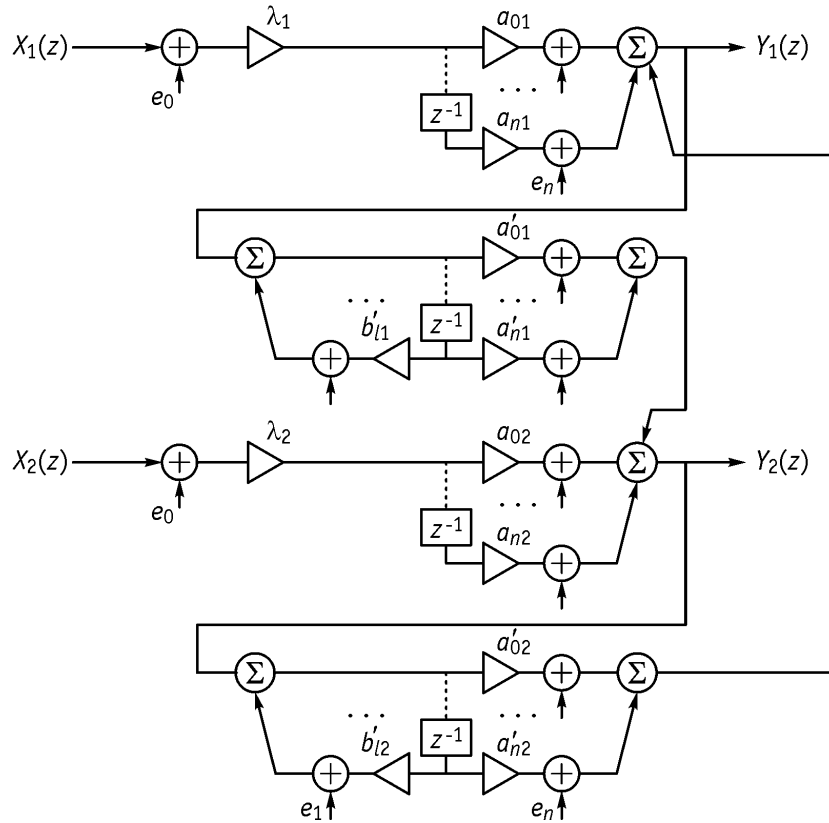


Рис. 4. Модель НЦФ с ЛОС 2-го типа

Дисперсия шума на выходе НЦФ с ЛОС 2-го типа с учетом масштабирования определяется уравнением:

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \frac{\lambda_1^2 (2^{-b_{\text{АЦП1}}})^2}{12} \left[\sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n) + \sum_{n=0}^{\infty} h_5^2(n) \right] + \frac{\lambda_2^2 (2^{-b_{\text{АЦП2}}})^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h_4^2(n) + \frac{(2^{-b_{\text{УМН}}})^2}{12} \left[(N_1 + L_1) \sum_{n=0}^{\infty} h_7^2(n) + (N_2 + L_2 + N_1') \sum_{n=0}^{\infty} h_9^2(n) + (N_1 + N_2') \right], \quad (18)$$

где $h_1(n) \div H_1(z)$; $h_5(n) \div H_{\text{ЛОС1}}(z) \cdot H_{\text{ЛОС2}}(z) \cdot H_1(z)$;

$h_4(n) \div H_2(z) \cdot H_{\text{ЛОС2}}(z)$; $h_7(n) \div H_{\text{ЛОС1}}(z) \cdot H_{\text{ЛОС2}}(z)$; $h_9(n) \div H_{\text{ЛОС2}}(z)$.

Анализ уравнения (18) показывает, что дисперсия шума на выходе НЦФ существенно увеличивается по сравнению с 1-й схемой за счет дополнительного увеличения путей прохождения шума и суммарной дисперсии шума умножителей и увеличения дисперсии от шумов АЦП. При этом дисперсия шума на выходе НЦФ с ЛОС оказывается меньше, чем дисперсия шума на выходе ЦФ с НЛОС.

4. Цифровой фильтр с ЛОС 3-го типа

Рассмотрим ЦФ с ЛОС 3-го типа (рис. 5), шумовая модель которого изображена на рис. 6.

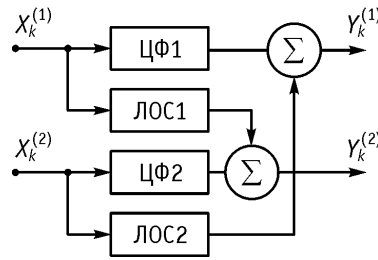


Рис. 5. Двухканальная система с ЛОС. Тип № 3

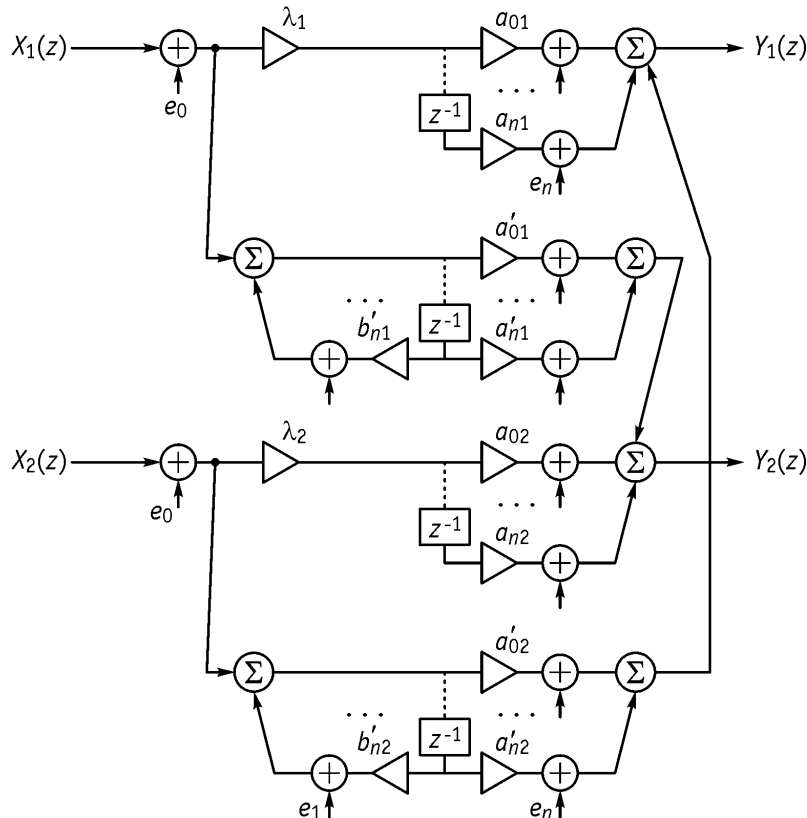


Рис. 6. Модель НЦФ с ЛОС 3-го типа

Передаточная характеристика первого сумматора равна нулю, а второго – определяется передаточной функцией $H_1(z)$ (3) и передаточной функцией ЛОС₂ согласно (6).

После нахождения $h_{2\Sigma}(n) \div (H_1(z) + H_{ЛОС2}(z))$ множители λ определяются по формулам (10), (14), (15) в зависимости от условий масштабирования.

Дисперсия шума на выходе НЦФ с ЛОС 3-го типа после масштабирования определяется уравнением:

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \frac{\lambda_1^2 (2^{-b_{\text{АЦП1}}})^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n) + \frac{\lambda_2^2 (2^{-b_{\text{АЦП2}}})^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h_4^2(n) + \frac{(2^{-b_{\text{УМН}}})^2}{12} \left[L_2^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_4^2(n) + (N_1 + N_2') \right], \tag{19}$$

где $h_1(n) \div H_1(z)$; $h_4(n) \div H_{ЛОС2}(z)$.

Анализ уравнения (19) показывает, что шумы АЦП в схемах 1 и 3 при одинаковых разрядных сетках примерно одинаковы и меньше, чем во 2-й схеме, а шумы умножителей в 3-й схеме существенно меньше, чем в предыдущих схемах. Это происходит за счет уменьшения путей прохождения шума, что приводит к существенному уменьшению суммарной дисперсии шума на выходе ЦФ с ЛОС 3-го типа. По сравнению с рекурсивной реализацией ЦФ с ЛОС дисперсия шума на выходе будет меньше, а при нерекурсивной реализации вдвое больше [8].

5. Цифровой фильтр с ЛОС 4-го типа

В заключение рассмотрим схему ЦФ с ЛОС 4-го типа (рис. 7), шумовая модель которого изображена на рис. 8.

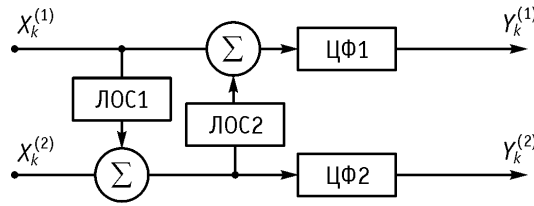


Рис. 7. Двухканальная система с ЛОС. Тип № 4

Импульсная характеристика первого сумматора определяется передаточной функцией ЛОС $H_{\text{ЛОС2}}(z)$ (6).

Импульсная характеристика второго сумматора определяется передаточной функцией $H_1(z)$ (3).

После нахождения импульсных характеристик для 1-го и 2-го сумматоров определяются соответствующие масштабные множители согласно (10), (14), (15). Аналогичным образом находятся масштабные множители для 2-го канала.

Дисперсия шума на выходе НЦФ с ЛОС 4-го типа после масштабирования определяется уравнением:

$$\sigma_{\text{ВЫХ}}^2 = \frac{\lambda_1^2 (2^{-b_{\text{АЦП1}}})^2}{12} \left[\sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n) + \sum_{n=0}^{\infty} h_5^2(n) \right] + \frac{\lambda_2^2 (2^{-b_{\text{АЦП2}}})^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} h_4^2(n) + \frac{(2^{-b_{\text{УМН}}})^2}{12} \left[N_2' \sum_{n=0}^{\infty} h_1^2(n) + (L_2' + N_1') \sum_{n=0}^{\infty} h_4^2(n) + (L_1' + N_2') \sum_{n=0}^{\infty} h_5^2(n) + N_1 \right], \quad (20)$$

где $h_1(n) \div H_1(z)$; $h_4(n) \div H_1(z) \cdot H_{\text{ЛОС2}}(z)$; $h_5(n) \div H_{\text{ЛОС1}}(z) \cdot H_{\text{ЛОС2}}(z) \cdot H_1(z)$.

Анализ уравнения (20) показывает, что в данной схеме дисперсия шума АЦП при прочих равных условиях больше, чем дисперсия шума АЦП в схемах 1 и 3, и одинакова с дисперсией шума АЦП в схеме 2. Дисперсия шума от умножителей в схеме 4 выше, чем в схеме 1, вдвое выше, чем в схеме 3, и несколько ниже, чем в схеме 2. Если сравнивать с другими методами реализации, то надо отметить, что схема 4 дает более высокий уровень шума, чем при нерекурсивной реализации ЦФ с НЛОС, и меньший, чем при остальных методах реализации.

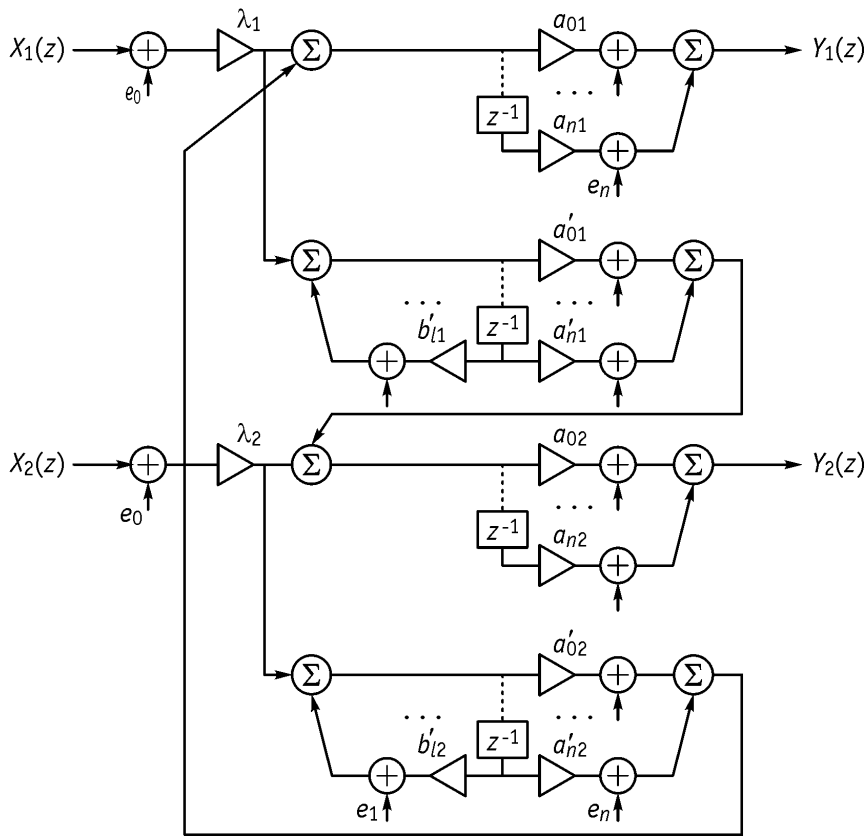


Рис. 8. Модель НЦФ с ЛОС 4-го типа

Если сравнивать по помехоустойчивости масштабируемые нерекурсивные ЦФ с рекурсивными ЛОС, то лучший результат дает схема 3, затем схема 2 и 4, а наименьший выигрыш дает схема 1.

В заключение следует отметить, что процесс масштабирования в цифровых фильтрах, как уже отмечалось, приводит к существенному уменьшению отношения сигнал/шум на выходе фильтра по сравнению с отношением сигнал/шум на входе, что, в свою очередь, ухудшает помехоустойчивость ЦФ в целом [1]. Использование же принципа ЛОС позволяет существенно повысить помехоустойчивость ЦФ даже при отношении сигнал/шум на входе меньше единицы. Таким образом, при масштабировании ЦФ с ЛОС не происходит уменьшения отношения сигнал/шум на выходе фильтра, что существенно повышает его помехоустойчивость по сравнению с традиционными методами масштабирования ЦФ.

6. Заключение

Исследованы вопросы масштабирования нерекурсивных двухканальных одноуровневых цифровых фильтров с рекурсивными латеральными обратными связями по условиям максимума сигнала, максимума энергии сигнала и максимума АЧХ.

Определены масштабные коэффициенты по условиям ограничения максимума сигнала, энергии сигнала и максимума АЧХ для 4-х типов ЦФ с ЛОС. Показано, что при масштабировании ЦФ с ЛОС 1-го и 2-го типов определяющую роль играют передаточные функции ЦФ1, ЦФ2, $H_{ЛОС2}(z)$. При масштабировании ЦФ с ЛОС 3-го и 4-го типов определяющую роль играют передаточные функции ЦФ1 и $H_{ЛОС2}(z)$.

Определена дисперсия шума на выходе НЦФ с ЛОС после масштабирования для различных схем реализации. Показано, что с точки зрения помехоустойчивости наилучшей является типовая схема 3, а наихудшей – типовая схема 1. Причем помехоустойчивость ЦФ с ЛОС при нерекурсивной реализации будет выше, чем при рекурсивной реализации.

Таким образом, полученные результаты по масштабированию нерекурсивных ЦФ с рекурсивными ЛОС позволяют, с одной стороны, предотвратить переполнение разрядной сетки, а с другой – обеспечить максимально возможное отношение сигнала к шуму округления по сравнению с рекурсивной реализацией.

Приведенные в статье данные по масштабированию ЦФ с ЛОС с использованием импульсных и передаточных функций для типовых одноуровневых двухканальных ЦФ с ЛОС можно обобщить и на n -канальную многоуровневую систему с различной структурой охвата каналов ЛОС.

Литература

1. Гольденберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1990. 256 с.
2. Рабинер Л., Голд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.
3. Бакалов В. П., Субботин Е. А. Обработка сигналов в системах с латеральными связями. М.: Горячая линия – Телеком, 2017. 178 с.
4. Бакалов В. П., Черных Ю. С. Использование принципа латеральных связей для обработки дискретных сигналов // Вестник СибГУТИ. 2012. № 1. С. 43–50.
5. Бакалов В. П., Субботин Е. А. Исследование помехоустойчивости дискретных фильтров с латеральными связями // Вестник СибГУТИ. 2015. № 3. С. 89–95.
6. Бакалов В. П., Черных Ю. С. О потенциальной скорости передачи информации в инфокоммуникационных сетях с латеральными связями. // Вестник СибГУТИ. 2012. № 2. С. 62–70.
7. Бакалов В. П., Крук Б. И. Теория электрических цепей. М.: Горячая линия – Телеком, 2018. 537 с.
8. Бакалов В. П., Субботин Е. А. Масштабирование цифровых фильтров с латеральными связями // Вестник СибГУТИ. 2018. № 4. С. 12–19.

Статья поступила в редакцию 01.10.2019.

Бакалов Валерий Пантелеевич

д.т.н., профессор, заведующий кафедрой теории электрических цепей СибГУТИ (630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86), тел. (383) 286-80-35.

Scaling of nonrecursive digital filters with recursive lateral feedbacks

V. P. Bakalov

The article states the ways to scale digital filters (DF) with lateral feedbacks (LFB). Models of four DF nonrecursive types with LFBs recursive implementation are considered. Filters are scaled using hi impulse response and scaling using the amplitude-frequency characteristic of the circuit. The obtained results allow, on the one hand, to prevent overfilling of the grade graticule of the DF with LFBs, and on the other hand, to increase significantly its noise immunity and efficiency.

Keywords: nonrecursive digital filters, recursive lateral feedbacks, scaling, limiting the maximum signal, maximum signal energy, maximum amplitude-frequency characteristic of the circuit.