

УДК 681.324, 519.21

Расчет моментов случайных величин при эрланговском времени обслуживания

В. А. Павский, К. В. Павский¹

В рамках теории массового обслуживания построена математическая модель функционирования вычислительных систем при обслуживании случайного потока задач. Рассматривается система в обозначениях Кендалла $M / E_n / 1$. Получено аналитическое решение для математического ожидания числа нерешенных задач в вычислительной системе и соответствующая дисперсия.

Ключевые слова: вычислительные системы, математическая модель, обслуживание потока задач, расчет показателей.

1. Введение

Одним из режимов функционирования вычислительных систем (ВС) является обслуживание потока задач [1]. В работе рассматривается обслуживание потока пакетов задач, поступающих на ВС случайно. Каждый пакет состоит из заданного числа задач одной сложности [1], которые обрабатываются последовательно. В качестве основы для показателей эффективности, относящихся к группе осуществимости решения задач, используется математическое ожидание и дисперсия числа пакетов в ВС, нахождению которых посвящена статья.

Для анализа функционирования ВС применяются модели теории массового обслуживания (ТМО) [1]. Если потоки требований не являются простейшими (не пуассоновскими), то решение обычно находится численными методами. В предложенной модели найдено аналитическое решение.

2. Математическая модель

На одноканальную систему массового обслуживания (СМО) поступает пуассоновский поток требований интенсивностью α . Каждое требование проходит n этапов обслуживания. Время обслуживания требования подчинено распределению Эрланга порядка n с параметром β [2]. По завершении обслуживания требования сразу начинается обслуживание очередного. Требуется найти $m\zeta$ – математическое ожидание и $d\zeta$ – дисперсию числа требований, находящихся в СМО.

Модель формализуется системой дифференциальных уравнений.

Пусть $P_k(t)$ – вероятность того, что в момент времени t в СМО находится k этапов, из которых не более чем n этапов непосредственно обслуживаются, а из остальных этапов, число которых кратно n , составлены требования, находящиеся в очереди на обслуживание,

¹ Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант №15-37-20113).

$k = 0, 1, \dots, t \in [0, \infty)$. Полагая $P_k(t) = 0$, если $k < 0$, получаем следующую систему дифференциальных уравнений [2]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} P_0(t) = -\alpha \cdot P_0(t) + n\beta \cdot P_1(t), \\ \frac{d}{dt} P_k(t) = -(\alpha + n\beta)P_k(t) + \alpha \cdot P_{k-n}(t) + n\beta P_{k+1}(t), \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$P_0(0) = 1, P_k(0) = 0, \quad (2)$$

и условием нормировки, которое является следствием модели

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1. \quad (3)$$

Для системы (1) с учетом (2) и (3) введем производящую функцию [3]:

$$F(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_k(t), \quad |z| \leq 1. \quad (4)$$

Умножая уравнение k системы (1) на z^k и суммируя [3, 4], получим уравнение

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{d}{dt} P_k(t) = -\alpha \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_k(t) - n\beta \sum_{k=1}^{\infty} z^k P_k(t) + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_{k-n}(t) + n\beta \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_{k+1}(t).$$

Выражая каждое его слагаемое через производящую функцию (4), в силу свойства линейности производной и формулы (4) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} F(z, t) = -\alpha F(z, t) - n\beta F(z, t) + n\beta P_0(t) + \alpha z^n F(z, t) + \frac{n\beta}{z} F(z, t) - \frac{n\beta}{z} P_0(t).$$

После приведения подобных членов получим линейное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} F(z, t) + \left(\alpha + n\beta - \alpha z^n - \frac{n\beta}{z} \right) F(z, t) = \left(n\beta - \frac{n\beta}{z} \right) P_0(t). \quad (5)$$

Можно попытаться найти решение уравнения (5), используя преобразование Лапласа, но оно может и существует, но будет громоздким и малоприменимым для инженерных расчетов. Но даже в стационарном режиме решение системы (1) предлагается искать численными методами [2]. Найдем точное решение в стационарном режиме для математического ожидания и дисперсии. Поскольку модель относится к системе $M/E_n/1$, то она эргодическая и стационарный режим существует всегда. Введем следующие обозначения: $p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t)$,

$F(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(z, t)$ и, кроме того, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial F(z, t)}{\partial t} = 0$ [2]. С учетом этих обозначений уравнение (5) запишем в виде

$$F(z) = \frac{n\beta(1-z)p_0}{\alpha \cdot z^{n+1} - (\alpha + n\beta) \cdot z + n\beta}. \quad (6)$$

Из (4) следует, что $F(1) = 1$ и, кроме того, учитывая аналитичность производящей функции, в уравнении (6) $z = 1$ является корнем и числителя, и знаменателя. Используем эту информацию, чтобы найти p_0 . Если $z \rightarrow 1$, то имеем неопределенность $\{0/0\}$, поэтому, при-

меняя к (6) правило Лопиталя, будем иметь $n\beta - n\alpha = n\beta \cdot p_0$. Отсюда $p_0 = (\beta - \alpha)/\beta$. Заменяя p_0 на его правую часть в уравнении (6), после деления числителя и знаменателя на $(1 - z)$ получим

$$F(z) = \frac{n(\beta - \alpha)}{n\beta - \alpha \sum_{k=1}^n z^k}. \quad (7)$$

Найдем производную функции (7). Имеем

$$\frac{d}{dz} F(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{n(\beta - \alpha)}{n\beta - \alpha \sum_{k=1}^n z^k} \right).$$

После элементарных преобразований находим, что

$$\frac{d}{dz} F(z) = \frac{n\alpha(\beta - \alpha) \sum_{k=1}^n k z^{k-1}}{(n\beta - \alpha \sum_{k=1}^n z^k)^2}.$$

Вычисляя вторую производную, получим

$$\frac{d^2}{dz^2} F(z) = \frac{n\alpha(\beta - \alpha)}{(n\beta - \alpha \sum_{k=1}^n z^k)^3} \left[\left(\sum_{k=1}^n k(k-1) z^{k-2} \right) (n\beta - \alpha \sum_{k=1}^n z^k) + 2\alpha \left(\sum_{k=1}^n k z^{k-1} \right)^2 \right].$$

Пусть ξ – случайная величина, характеризующая число этапов, находящихся в СМО. Тогда $M\xi$ – математическое ожидание числа этапов, а $D\xi$ – дисперсия их числа. Учитывая, что

$$M\xi = \frac{\partial}{\partial z} F(1), \quad D\xi = \frac{\partial^2}{\partial^2 z} F(1) + \frac{\partial}{\partial z} F(1) - \left(\frac{\partial}{\partial z} F(1) \right)^2, \quad (8)$$

находим

$$\begin{cases} M\xi = \frac{(n+1)\alpha}{2(\beta - \alpha)}, \\ D\xi = \frac{\alpha}{n^2(\beta - \alpha)^2} \left[n(\beta - \alpha) \sum_{k=1}^n k(k-1) + 2\alpha \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \right] + M\xi - M^2\xi. \end{cases} \quad (9)$$

Тогда $m\xi = M\xi/n$, $d\xi = D\xi/n^2$.

В частном случае, если $n = 1$, из (9) получаем известные формулы

$$m\xi = \frac{\alpha}{\beta - \alpha}, \quad d\xi = \frac{\alpha\beta}{(\beta - \alpha)^2},$$

Если $n = 2$, то

$$M_{\xi}^z = \frac{3\alpha}{2(\beta - \alpha)}, \quad D_{\xi}^z = \frac{10\alpha\beta - \alpha^2}{4(\beta - \alpha)^2}$$

при естественном ограничении $\alpha < \beta$.

Замечание. Применить метод моментов [5, 6] для нахождения математического ожидания непосредственно из уравнения (5) трудновыполнимо, поскольку неизвестно $P_0(t)$. В самом деле, учитывая (8), из (5) получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} M_{\xi}^z(t) + \alpha + n\beta - (n+1)\alpha = -n\beta P_0(t). \quad (10)$$

Правая часть уравнения известна только для стационарного случая; если $t \rightarrow \infty$, то $p_0 = 1 - \alpha/\beta$, а производная равна 0. Подставляя эти значения в уравнение (10), получаем тождество. Появление тождества объясняется наличием сокращенного корня $z = 1$ в обеих частях уравнения (5).

3. Заключение

В работе рассмотрен режим функционирования вычислительной системы при обслуживании потока пакетов задач. Для описания процесса решения задач рассмотрена не пуассоновская модель ТМО, в которой обслуживание требований является случайной величиной, подчиненной распределению Эрланга. Получено аналитическое решение для математического ожидания числа этапов, находящихся в ВС, и соответствующая дисперсия.

Формулы обладают наглядностью и простотой, могут быть использованы в инженерных расчетах.

Литература

1. *Хорошевский В. Г.* Архитектура вычислительных систем. М.: МГТУ им. Баумана, 2008. 520 с.
2. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2-х т. Т1. М: «ЛИБРОКОМ», 2010. 528 с.
4. *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: URSS, 2010. 520 с.
5. *Павский В. А., Павский К. В., Хорошевский В. Г.* Вычисление показателей живучести распределенных вычислительных систем и осуществимости решения задач // Искусственный интеллект. 2006. № 4. С. 28–34.
6. *Хорошевский В. Г., Павский В. А., Павский К. В.* Расчет показателей живучести распределенных вычислительных систем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 2. С. 81–88.

Статья поступила в редакцию 06.07.2015.

Павский Валерий Алексеевич

д.т.н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики Кемеровского технологического института пищевой промышленности (650056, г. Кемерово, б-р Строителей, д.47), тел. (3842) 734200, e-mail: pavvm@kemtipp.ru.

Павский Кирилл Валерьевич

д.т.н., доцент, профессор кафедры вычислительных систем СибГУТИ, научный сотрудник Лаборатории ВС Института физики полупроводников им. А.В.Ржанова СО РАН (630090, Новосибирск, Лаврентьева, 13), тел. (383) 3332171, e-mail: pkv@isp.nsc.ru.

Random variable calculations for Erlang distribution of service time

Valery A. Pavsky, Kirill V. Pavsky

Mathematical model of computer systems functioning for random tasks flow service is constructed. The model is based on the queuing theory. The system $M / En / I$ using Kendall's notation is considered. Analytical solution for mathematical expectation of a number of open problems in computation system and appropriate dispersion are obtained.

Keywords: computer systems, mathematical model, tasks flow service, indices calculation.