

# Тензорные функции Грина для расчета электромагнитных полей от слоистых сферических структур

Б. А. Панченко, Д. В. Денисов, А. М. Мусин, И. О. Скумотенко

В работе рассматривается метод тензорных функций Грина для решения электродинамических задач в сферической системе координат. Приводятся примеры расчета электромагнитного поля при облучении слоистой сферической структуры элементарными источниками, положение которых меняется вдоль меридиональной линии.

*Ключевые слова:* тензорные функции Грина, линза Люнеберга.

## 1. Введение

Метод функций Грина является универсальным методом решения электродинамических задач для областей, частично или полностью совпадающих с координатными поверхностями, которые описываются в трехмерных системах координат, в которых переменные разделяются. В общем случае для описания скалярных компонентов напряженностей электрических и магнитных полей  $E$  и  $H$  от произвольной комбинации электрических и магнитных сторонних токов требуется 4 тензора Грина, каждый из которых содержит 9 скалярных компонентов [1].

Значительное число компонентов можно сократить для частных случаев. Например, для расчета поперечных составляющих электромагнитных полей в дальней зоне определены компоненты поперечных составляющих полей в сферической системе координат в дальней зоне:  $\vec{E}(\theta), \vec{E}(\varphi), \vec{H}(\theta), \vec{H}(\varphi)$  в сферической системе координат  $r(\theta, \varphi)$  от многослойной сферической структуры, когда границы подобластей совпадают с координатными поверхностями,  $r(\theta, \varphi) = const$ . Интерес к подобным задачам обусловлен широким применением антенных систем на базе линзы Люнеберга. Кроме того, актуальной является проблема снижения отражений от выпуклых тел с радиолокационной и тепловой защитой. Рассматриваемый в работе аппарат позволяет решать вышеперечисленные задачи.

## 2. Тензоры Грина

Ниже будут записаны тензорные и скалярные компоненты функций Грина в сферической системе координат для ограничений, оговоренных во введении. Тензоры Грина запишем в универсальной форме:

$$\bar{\bar{\Gamma}}_{ij} = \frac{-j}{4\pi r r'} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \varepsilon_m \cdot \cos(m(\varphi - \varphi')) \times \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2(n+1)}{n(n+1)} \cdot \frac{(m-n)!}{(m+n)!} \cdot (\bar{G}_{ij}^E \cdot jg_{ij} + \bar{G}_{ij}^H \cdot jf_{ij}) \right), \quad (1)$$

где символы  $i, j$  принимают значение 1 или 2, при этом «1» соответствует электрическим полям и токам, «2» – магнитным полям и токам;

здесь и далее штрихованные координаты  $r', \varphi'$  соответствуют координатам сторонних источников, не штрихованные координаты  $r, \varphi$  соответствуют точкам наблюдения полей;

$\varepsilon_m$  – символ Кронекера, при этом  $\varepsilon_m = 1$ , если  $m = 0$ , и  $\varepsilon_m = 2$ , если  $m \neq 0$ ;

$\bar{\bar{G}}_{ij}^E, \bar{\bar{G}}_{ij}^H$  – тензоры, содержащие по четыре скалярные компоненты (учтены только поперечные составляющие полей). Запись для  $\bar{\bar{G}}_{22}^E, \bar{\bar{G}}_{22}^H$  приведена в (2), запись остальных тензоров приведена в [1];

$jg_{ij}, jf_{if}$  – характеристические части функции Грина, записанные с учетом определений полей в дальней зоне. Их запись для  $jg_{11}, jf_{11}$  приведена в (3), остальные характеристические части приведены в [1].

$$\bar{\bar{G}}_{22}^E = \bar{\bar{G}}_{22}^H = \begin{vmatrix} \bar{a}_\theta \bar{a}_\theta \cdot \cos(m(\varphi - \varphi')) \tau_n^m(\theta) \tau_n^m(\theta') \\ -\bar{a}_\varphi \bar{a}_\theta \cdot m \sin(\varphi - \varphi') \pi_n^m(\theta) \tau_n^m(\theta') \\ \bar{a}_\theta \bar{a}_\varphi \cdot m \sin(\varphi - \varphi') \tau_n^m(\theta) \pi_n^m(\theta') \\ \bar{a}_\varphi \bar{a}_\varphi \cdot \cos(m(\varphi - \varphi')) \pi_n^m(\theta) \pi_n^m(\theta') \end{vmatrix}, \quad (2)$$

где:

$$\tau_n^m(\theta) = \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta}, \quad \pi_n^m(\theta) = \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} \quad \text{– принятые обозначения в теории дифракции [2];}$$

$\partial P_n^m(\cdot)$  – функция Лежандра степени  $n$  и порядков  $m = 0, 1 \dots n$ .

$$jg_{11} = \frac{j\bar{Z}(a)}{j\bar{Z}(a) \cdot h_n(k_0 a)} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} \cdot e^{-jk_0 r} = M_n \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} \cdot e^{-jk_0 r}, \quad (3)$$

$$jf_{11} = \frac{j}{j\bar{Y}(a) \cdot h_n(k_0 a)} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} \cdot e^{-jk_0 r} = N_n \cdot e^{j\frac{\pi}{2}n} \cdot e^{-jk_0 r},$$

где:

$a$  – радиус исследуемого сферического образования (например, линзы Люнеберга);

$k_0 = 2\pi/\lambda$  – волновое число;

$\bar{Z}(a), \bar{Z}(a), \bar{Y}(a)$  – ориентированные импедансы и адмитансы для многослойных сферических областей, определяются по методике, описанной в [1];

$h_n(\cdot)$  – сферическая функция Бесселя–Риккати [3];

$M_n, N_n$  – введены для упрощения записи напряженности электрического поля и будут использованы в дальнейшем для задания типа облучателя.

Когда в качестве возбудителей структур используются малые точечные источники сторонних токов, например, диполь Герца, элемент Гюйгенса и др., тогда с учетом использования свойств функций Лежандра тензоры Грина преобразуются и содержат один ряд по номерам функций Грина (при  $m = 1$ ). В (1) разложение по поперечным координатам  $\theta, \varphi$  ведется методом ряда Фурье. С учетом многослойности структур, подлежащих исследованию, зависимости от координат  $r, r'$  определены методом Даламбера [4].

Записанные выше тензоры и характеристические части позволяют записать электрическое поле в дальней зоне от произвольной комбинации поперечных сторонних токов. На-

пряженность электрического поля определяется путем интегрирования соответствующих функций Грина со сторонними электрическими токами. Таким образом, выражение для вектора напряженности электрического поля записывается следующим образом:

$$\vec{E} = E_0 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \varepsilon_m \cdot \frac{(2n+1)}{n(n+1)} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \times \left\{ \left\langle \left( \vec{a}_\theta \cos(m\varphi) \tau_m^n(\theta - \theta') \right) - \left( \vec{a}_\varphi m \sin(m\varphi) \pi_m^n(\theta - \theta') \right) \right\rangle \cdot M_n - \right. \\ \left. \times \left\langle \left( \vec{a}_\theta \cos(m\varphi) \pi_m^n(\theta - \theta') \right) - \left( \vec{a}_\varphi m \sin(m\varphi) \tau_m^n(\theta - \theta') \right) \right\rangle \cdot N_n \right\}. \quad (4)$$

Напряженность магнитного поля в дальней зоне определяется через характеристическое сопротивление свободного пространства.

### 3. Определение электромагнитных полей. Примеры расчетов

Рассмотрим использование частных записей функций Грина, когда сторонние источники располагаются вдоль меридиональных линий слоистой сферической структуры, где углы  $\theta_1', \theta_2', \theta_3'$  – точки расположения первичных источников излучения вдоль этих линий, при этом  $\varphi' = 0$ .

*Пример 1.* Вдоль меридиональной линии  $\varphi' = 0$  располагаются три дипольных излучателя, положение которых вдоль меридиональной линии характеризуется координатами  $\theta_1', \theta_2', \theta_3'$ . Излучатели расположены над проводящей сферой с диэлектрической подложкой. Относительная диэлектрическая проницаемость подложки  $\varepsilon' = 15 - j5$ . Электрический радиус исследуемого сферического образования (от центра проводящей сферы до поверхности диэлектрического укрытия)  $k_0 a = 4\pi$ , электрический радиус проводящей сферы  $k_0 b = 0.75 \cdot k_0 a$ . Геометрия задачи изображена на рис. 1, где точками A1, A2, A3 показано условное положение дипольных облучателей.

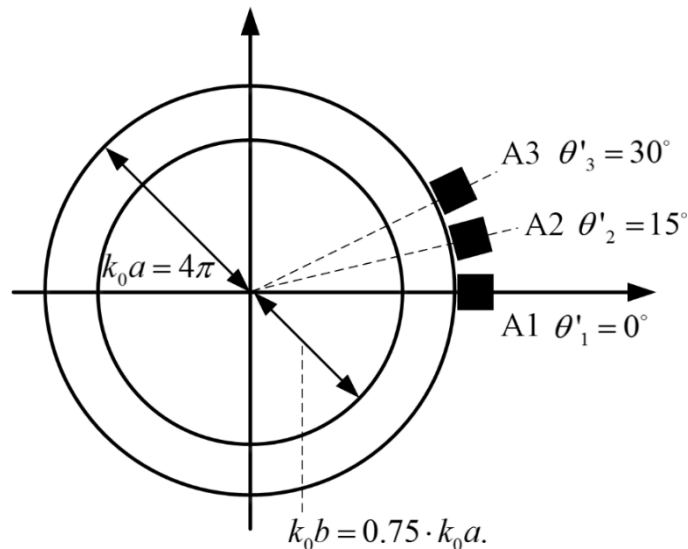


Рис. 1. Три дипольных излучателя над проводящей сферой с укрытием

Для дипольного облучателя коэффициенты  $M_n, N_n$  в (4) имеют вид:

$$M_n = \frac{\vec{Z}(a)}{j\vec{Z}(a) \cdot h_n(k_0 a)}, \quad (5)$$

$$N_n = \frac{j}{j\vec{Y}(a) \cdot h_n(k_0 a)}.$$

На рис. 2 приведены расчетные диаграммы направленности от отдельных излучателей.

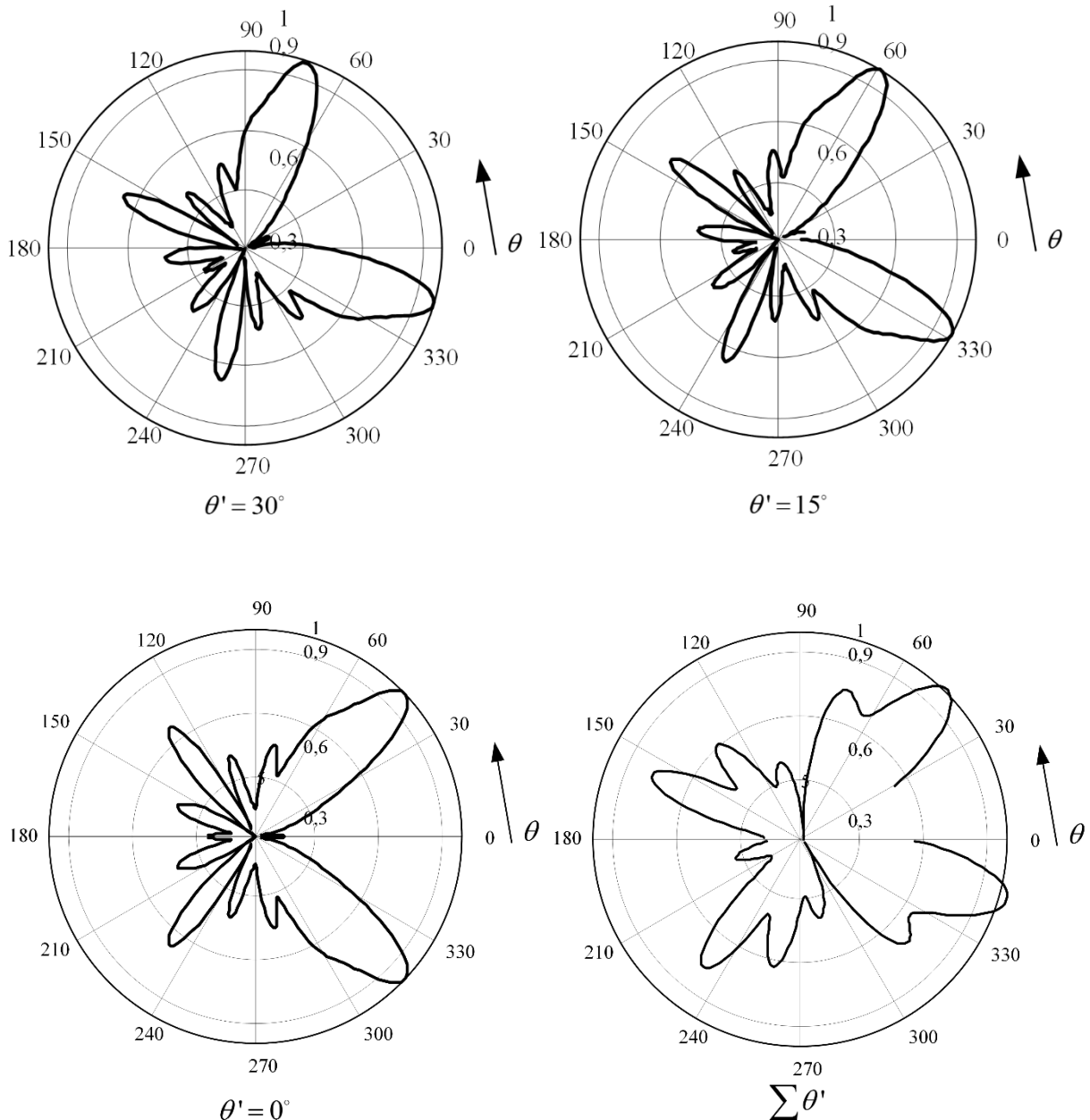


Рис. 2. Диаграммы направленности дипольных излучателей, облучающих проводящую сферу с диэлектрическим укрытием

Из-за симметрии исследуемой проводящей сферы с укрытием вид диаграмм направленности не зависит от положения первичного облучателя.

*Пример 2.* Расчет диаграммы направленности линзы Люнеберга, когда облучатель типа элемента Гюйгенса перемещается вдоль меридиональной линии. При этом (4) сохраняется, а коэффициенты  $M_n, N_n$  имеют вид:

$$M_n = \frac{\tilde{Z}(a) - j}{j\tilde{Z}(a) \cdot h_n(k_0 a)},$$

$$N_n = \frac{\tilde{Y}(a) - j}{j\tilde{Y}(a) \cdot h_n(k_0 a)}.$$
(6)

На рис. 3 приведены рассчитанные диаграммы направленности для трех положений первичного облучателя на поверхности линзы и суммарная диаграмма решетки. При расчетах используется четырехслойная ступенчатая равношаговая аппроксимация закона Лüneберга для линзы с электрическим размером  $k_0 a = 4\pi$  [6].

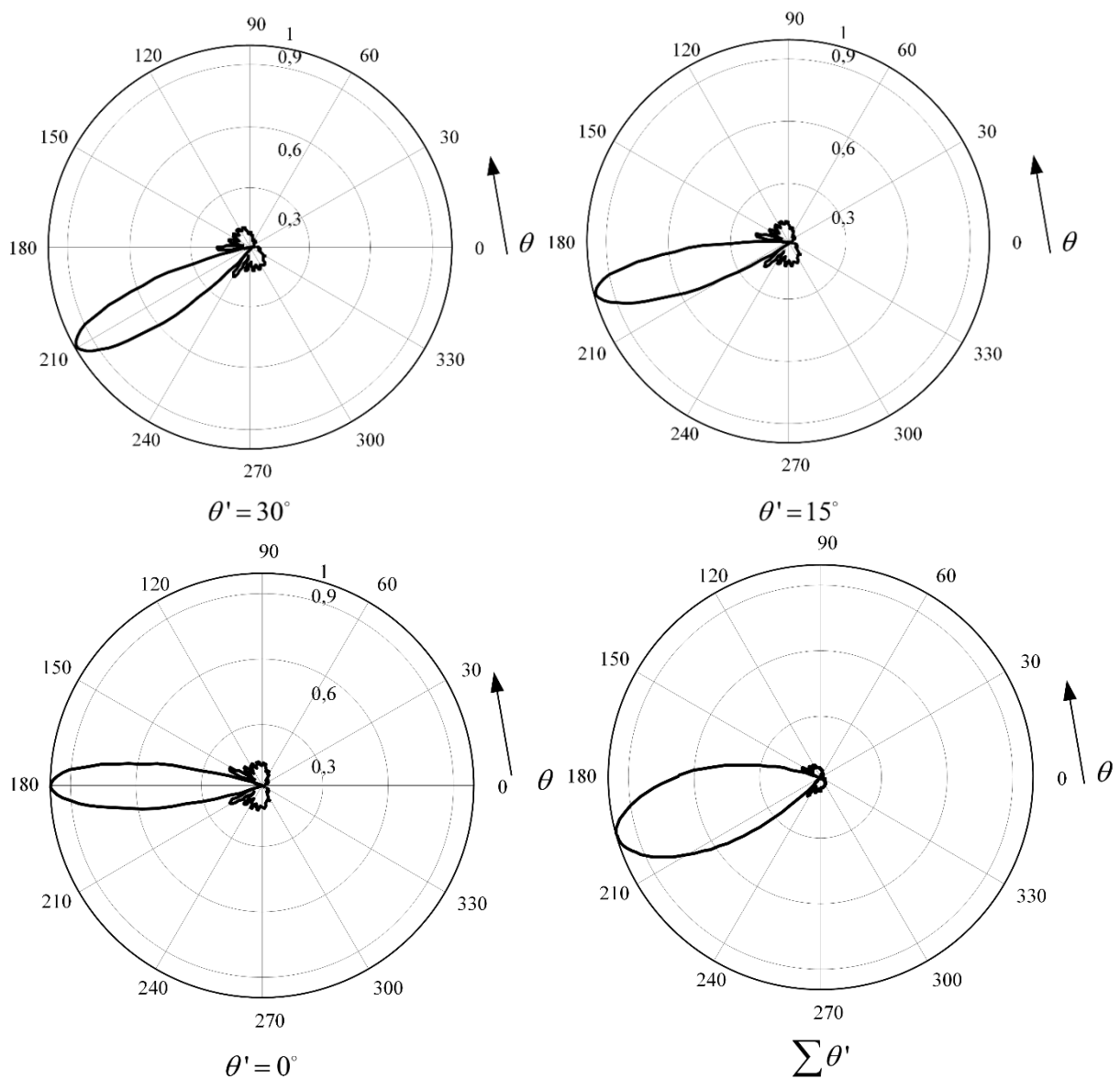


Рис. 3. Линза Лüneберга с излучателями типа элемента Гюйгенса

Расчеты в этом примере получены с использованием общей и частной записи функции Грина [5]. Вследствие сферической симметрии линзы Лüneберга диаграммы направленности в этом случае одинаковы.

## 4. Заключение

Полная запись функции Грина позволяет рассчитать влияние конечных размеров и положения излучателей на основные характеристики сферических структур: диаграмму направленности, КНД, сопротивление излучения, поляризационные потери. Для упрощенного представления функции Грина вычисления перечисленных характеристик были произведены в ранних работах авторов [1, 5]. Полное представление функции Грина, рассмотренное в данной статье, позволяет расширить круг решаемых задач.

## Литература

1. *Панченко Б. А.* Рассеяние и поглощение электромагнитных волн неоднородными сферическими телами. Москва: Радиотехника, 2013. 264 с.
2. *Хёнл Х.* Теория дифракции / Х. Хёнл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. Москва: Мир, 1964. 333 с.
3. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Изд-во Наука. 1979. 832 с.
4. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. М.: Мир. 1960.
5. *Панченко Б. А.* Антенные характеристики линзы Лüneберга при круговой поляризации поля / Б.А. Панченко, Д.В. Денисов // Антенны. 2013. № 12. С. 26–30.
6. *Luneburg R. K.* The Mathematical Theory of Optics / R.K. Luneburg // Providence, RI: Brown Univ. Press. 1944. P. 401.

*Статья поступила в редакцию 26.11.2015;  
переработанный вариант – 18.01.2016.*

### **Панченко Борис Алексеевич**

д.т.н., профессор, заведующий кафедрой ОПД ТС УрТИСИ СибГУТИ (620109, Екатеринбург, ул. Репина, 15), тел. 8 (343) 375-33-70, e-mail: valbor@mail.ur.ru

### **Денисов Дмитрий Вадимович**

к.т.н., доцент кафедры ОПД ТС УрТИСИ СибГУТИ (620109, Екатеринбург, ул. Репина, 15), тел. 8 (950) 643-24-61, e-mail: denisov.dlv@gmail.com

### **Скуматенко Илья Олегович**

аспирант кафедры ОПД ТС УрТИСИ СибГУТИ (620109, Екатеринбург, ул. Репина, 15), тел. 8 (912) 260-08-38, e-mail: dooms\_07@mail.ru

### **Мусин Андрей Маликович**

аспирант кафедры ИРИТ РТФ УрФУ им. Б.Н. Ельцина (620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19), тел: 8-932-11-37-121, e-mail: andrmm@uralweb.ru

**Green's tensors functions for electromagnetic fields analysis from spherical layer structure****B.A. Panchenko, D.V. Denisov, A.M. Musin, I.O. Skumotenko**

This paper considers Green's tensors functions method for solving electrodynamic tasks in spherical coordinate system. Examples of electromagnetic field analysis while irradiating spherical layer structures by elementary sources, the position of which varies lengthwise meridian line are presented.

*Keywords:* Green's tensors function, Luneberg lens.