

Интервально-статистический метод определения параметров функций принадлежности в задачах оценки качества систем комплексной безопасности

В. М. Белов, Е. В. Зырянова, Е. В. Рябова

В данной статье описан интервально-статистический метод, предлагаемый к использованию для построения интервально-статистических оценок параметров функций принадлежности при различных вариантах задания входных и выходных данных. Также описан пример использования данного метода для оценки качества систем комплексной безопасности.

Ключевые слова: интервально-статистический метод (ИСМ), функция принадлежности (ФП), алгоритм параллелепипеда в ИСМ, алгоритм эллипсоида в ИСМ.

1. Введение

Оценка уровня безопасности любого объекта, будь то информационная система или разработка полезных ископаемых, – процесс очень сложно и нечетко формализуемый в связи с неоднозначностью и нечеткостью критериев качества безопасности. Классические методы в данной ситуации зачастую не могут быть применимы из-за неоднородности, неполноты, нечеткости исходных данных. Следовательно, для решения задачи оценки качества удобно применять методы нечеткой или интервальной математики, которые позволяют оперировать как количественными, так и не количественными переменными, наиболее объективно описывающими критерии качества.

Предлагаемый в данной статье ИСМ, основанный на алгоритмах последовательных интервальных приближений, может применяться как для числовых критериев качества, то есть при точном задании входных или выходных переменных, так и для переменных, заданных интервально.

2. Общая постановка задачи определения параметров функции принадлежности (ФП)

Пусть $Y = y_{ij}$ ($i \in \overline{1, m}$, $j \in \overline{1, n_i}$) – матрица, содержащая экспериментальные данные, являющиеся значениями функции $y_i = a_1 x_i^{n-1} + a_2 x_i^{n-2} + \dots + a_n$, измеренные n_i раз в точках x_i (m – количество измерений). Погрешность измерений Δ не превышает известной величины ε . В качестве значений функции возьмем средние арифметические измеряемых величин:

$$\bar{y}_i = \left(\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \right) / n_i. \quad (1)$$

Зададим количество параметров искомой зависимости $k \in N$ ($2 \leq k \leq n$).

Требуется найти коэффициенты $a_j \in IR$ полинома $F(x, k) = \sum_{j=1}^k a_j x^{j-1}$ таким образом,

чтобы $y_i \subseteq F(x_i, k)$, $i \in \overline{1, n}$, а также абсолютное и относительное отклонение полученных коэффициентов от истинных значений параметров.

3. Алгоритм параллелепипеда в ИСМ для оценки параметров многомерной ФП при точном задании входных и интервальном задании выходных переменных

3.1. Постановка задачи

По результатам n измерений имеем следующие данные:

$$x_1, [y_1^-; y_1^+], x_2, [y_2^-; y_2^+], \dots, x_n, [y_n^-; y_n^+]. \quad (2)$$

Значения $y_i = a_1 x_i^{n-1} + a_2 x_i^{n-2} + \dots + a_n$ лежат в интервалах $[y_i^-; y_i^+]$. Погрешность измерения y_i $|\Delta| \leq \varepsilon$. Среднее арифметическое значение измеряемых величин, подчиняющихся некоторому закону, можно принять как некоторые оценки y_i с наложением ограничений $x_i \neq x_j$ и $[y_i^-; y_i^+] \cap [y_j^-; y_j^+] = \emptyset$. Необходимо построить интервальные оценки параметров функции при $i \in \overline{1, n}$ и определить абсолютное и относительное отклонение оценок от истинных значений [1].

3.2. Решение задачи

Систему $y_i^- = \bar{y}_i - \Delta y_i \leq y_i \leq \bar{y}_i + \Delta y_i = y_i^+$, $i \in \overline{1, n}$ представим в матричном, а затем в общем виде:

$$\bar{Y} + L\varepsilon \leq Xa \leq \bar{Y} + K\varepsilon. \quad (3)$$

Изначально $K=E$, а $L=-K=-E$.

Используем модифицированный метод Гаусса для систем $2 \times n$ неравенств с n неизвестными оценками с выбором главного элемента. По результатам прямого хода получим систему:

$$\begin{bmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(2)} \\ \dots \\ y_{n-1}^{(n-2)} \\ y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{11}^{(1)} & l_{12}^{(1)} & \dots & l_{1,n-1}^{(1)} & l_{1n}^{(1)} \\ l_{21}^{(2)} & l_{22}^{(2)} & \dots & l_{2,n-1}^{(2)} & l_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n-1,1}^{(n-2)} & l_{n-1,2}^{(n-2)} & \dots & l_{n-1,n-1}^{(n-2)} & l_{n-1,n}^{(n-2)} \\ l_{n1}^{(n-1)} & l_{n2}^{(n-1)} & \dots & l_{n,n-1}^{(n-1)} & l_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_{n-1} \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & x_{2,n-1}^{(2)} & x_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n-1,n}^{(n-2)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} \leq$$

$$\begin{aligned}
& \leq \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & \dots & x_{1,n-1} & x_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & x_{2,n-1}^{(2)} & x_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n-1,n}^{(n-2)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} \leq \\
& \leq \begin{bmatrix} \bar{y}_1^{(1)} \\ \bar{y}_2^{(2)} \\ \dots \\ \bar{y}_{n-1}^{(n-2)} \\ \bar{y}_n^{(n-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & \dots & k_{1,m-1}^{(1)} & k_{1m}^{(1)} \\ k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} & \dots & k_{2,m-1}^{(2)} & k_{2m}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n-1,1}^{(n-2)} & k_{n-1,2}^{(n-2)} & \dots & k_{n-1,m-1}^{(n-2)} & k_{n-1,m}^{(n-2)} \\ k_{n1}^{(n-1)} & k_{n2}^{(n-1)} & \dots & k_{n,m-1}^{(n-1)} & k_{nm}^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \dots \\ \Delta y_{n-1} \\ \Delta y_n \\ \dots \\ \Delta y_m \end{bmatrix} \quad (9)
\end{aligned}$$

Обратный ход:

$$\bar{y}_n^{(n-1)} - \sum_{i=1}^n |l_{ni}^{(n-1)} \cdot \Delta y_i| \leq a_n \leq \bar{y}_n^{(n-1)} + \sum_{i=1}^n |k_{ni}^{(n-1)} \cdot \Delta y_i|; \quad (10)$$

$$\left(\bar{y}_{n-1}^{(n-2)} - \bar{y}_n^{(n-1)} \cdot x_{n-1,n}^{(n-2)} \right) - \sum_{i=1}^m \left| \left(l_{n-1,i}^{(n-2)} - k_{ni}^{(n-1)} \cdot x_{n-1,n}^{(n-2)} \right) \Delta y_i \right| \leq a_{n-1} \leq \quad (11)$$

$$\leq \left(\bar{y}_{n-1}^{(n-2)} - \bar{y}_n^{(n-1)} \cdot x_{n-1,n}^{(n-2)} \right) - \sum_{i=1}^m \left| \left(k_{n-1,i}^{(n-2)} - l_{ni}^{(n-1)} \cdot x_{n-1,n}^{(n-2)} \right) \Delta y_i \right|, x_{n-1,n}^{(1)} > 0;$$

$$\left(\bar{y}_{n-1}^{(n-2)} - \bar{y}_n^{(n-1)} \cdot x_{n-1,n}^{(n-2)} \right) - \sum_{i=1}^m \left| \left(l_{n-1,i}^{(n-2)} - l_{ni}^{(n-1)} \cdot x_{n-1,n}^{(n-2)} \right) \Delta y_i \right| \leq a_{n-1} \leq \quad (12)$$

$$\leq \left(\bar{y}_{n-1}^{(n-2)} - \bar{y}_n^{(n-1)} \cdot x_{n-1,n}^{(n-2)} \right) - \sum_{i=1}^m \left| \left(k_{n-1,i}^{(n-2)} - k_{ni}^{(n-1)} \cdot x_{n-1,n}^{(n-2)} \right) \Delta y_i \right|, x_{n-1,n}^{(1)} < 0.$$

Используя полученные оценки, находим $a_n, \dots, a_1$. После рассмотрения всех вариантов получим решение в виде пересечения полученных оценок.

4. Алгоритм параллелепипеда в ИСМ для оценки параметров многомерной ФП при интервальном задании входных и выходных переменных

4.1. Постановка задачи

По результатам измерений имеем следующие данные:

$$\left[x_1^-; x_1^+ \right], \left[y_1^-; y_1^+ \right], \left[x_2^-; x_2^+ \right], \left[y_2^-; y_2^+ \right], \dots, \left[x_n^-; x_n^+ \right], \left[y_n^-; y_n^+ \right]. \quad (13)$$

Каждому интервальному значению $[y]_i$ соответствует интервальное значение входной величины $[x]_i$. Погрешности измерений $|\Delta x| \leq \varepsilon_1; |\Delta y| \leq \varepsilon_2$ соответственно. Необходимо по-

строить точечные и интервальные оценки параметров функции вида $y_i = a_1 x_i^{n-1} + a_2 x_i^{n-2} + \dots + a_n$ при известных $x_i, y_i, \Delta x$ и Δy .

4.2. Решение задачи

Представим систему в матричном виде:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \dots \\ \bar{y}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1,n-1} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2,n-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{m,n-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1,n-1} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2,n-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{m,n-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \dots \\ \bar{y}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix} \end{cases}, \quad (14)$$

где x_{ij} – входные интервальные данные.

Для системы линейных уравнений $XA=B$ с $n \times n$ -матрицей $X=(x_{ij})$ и n -вектором правых частей $b=(b_j)$ расчетные формулы прямого хода традиционного метода Гаусса выражают процесс последовательного исключения поддиагональных элементов j -го ($j=1, 2, \dots, n-1$) столбца матрицы системы X и соответствующие преобразования B . Матрица системы тем самым приводится к верхнему треугольному виду. Далее следует обратная подстановка, позволяющая последовательно вычислить значения неизвестных, начиная с n -ой.

Так как система уравнений интервальная, то при использовании интервального метода Гаусса треугольное разложение матрицы X получить невозможно. Возможно использование следующих алгоритмов:

– разбиение интервалов входных параметров с последующим объединением полученных интервалов. Данный метод решения обоснован, т.к. из свойства монотонности интервальной арифметики по включению следует, что результат выполнения интервального метода Гаусса должен содержать все возможные результаты применения точечных методов Гаусса к точечным данным, содержащимся в задаваемых системой $xa=b$ интервалах. Но результаты точечных методов Гаусса – это решения соответствующих систем $xa=b$ с $x \in X$ и $b \in B$. Следовательно, результат интервального метода Гаусса содержит объединенное множество решений данной интервальной системы линейных алгебраических уравнений;

– использование допущений. В классической интервальной арифметике отдельным образом вводятся действия вычитания и деления интервалов. В поле вещественных чисел, к примеру, они определяются не самостоятельно, а как операции, обратные сложению и умножению. Но для действий над интервалами таким путем идти уже нельзя, поскольку интервальное вычитание не обратное сложению, а интервальное деление не обратное умножению:

$$(a+b)-b \neq a, \quad (15)$$

$$(a \cdot b) / b \neq a. \quad (16)$$

Т.к. интервалы – это множества, то между ними, естественно, определяется частичное упорядочение по отношению включения друг в друга:

$$a \subseteq b \Leftrightarrow a^- \geq b^-, a^+ \leq b^+. \quad (17)$$

Для системы (13) нельзя говорить об исключении неизвестных, так как $X/X \neq I$ и $X \cdot X \neq 0$ при $w(X) > 0$. Но аналогично вещественному случаю можно преобразовать интервальную матрицу X к треугольному виду с учетом допущений, указанных в [2].

5. Алгоритм эллипсоида в ИСМ для оценки параметров многомерной ФП

5.1. Постановка задачи

По результатам n измерений имеем следующие данные: $mid(x)$, $mid(y)$ – средние значения входных и выходных данных; $rad(x)$, $rad(y)$ – их ошибки измерения; $x, y \in IR$, $0 \notin x_i, i = \overline{1, n}$, при $i \neq j$ $x_i \cap x_j = \emptyset$, $y_i \cap y_j = \emptyset$. $k \in N$, $2 \leq k \leq n$ – количество параметров искомой зависимости. Требуется найти коэффициенты $a_j \in IR$ полинома $F(x, k) = \sum_{j=1}^k a_j x^{j-1}$, чтобы $y_i \subseteq F(x_i, k)$; $i = \overline{1, n}$.

5.2. Решение задачи

С помощью метода Ньютона найдем формальное решение системы:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^k a_j x_1^{j-1} = y_1 \\ \dots \\ \sum_{j=1}^k a_j x_k^{j-1} = y_k \end{cases} \Rightarrow X \bar{a} = \bar{y}, \text{ где } X \in IR^k \otimes IR^k; \bar{a}, \bar{y} \in IR^k. \quad (18)$$

Так как KR^k не является линейным метрическим пространством, то для применения большинства методов решения системы необходимо построить биективное отображение из KR^k в какое-либо линейное метрическое пространство, выполнить решение предложенным методом и применить к результату обратное отображение.

Построим аддитивное и однородное погружение (двойственное отображение) $sti: KR^k \mapsto R^{2k}$ по формуле

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \mapsto (-x_1^-, -x_2^-, \dots, -x_k^-, -x_1^+, -x_2^+, \dots, -x_k^+) \quad (19)$$

и применим его к векторам системы (18)

$$\begin{aligned} sti((I - X)\bar{a} - \bar{a} + \bar{y}) &= sti((I - X)sti^{-1}(a) - sti^{-1}(a) + \bar{y}) = \\ &= sti((I - X)sti^{-1}(a)) - a + sti(\bar{y}) = S(a) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

В [2] доказывается, что отображение $S: R^{2k} \mapsto R^{2k}$ непрерывно, порядково выпукло относительно покомпонентного порядка $\{a \ll b \mid \bar{a}, \bar{b} \in R^{2k}, a_i < b_i, i = \overline{1, 2k}\}$ и субдифференцируемо в каждой точке, следовательно, проведем решение субдифференциальным методом Ньютона:

1. Начальное приближение $x^{(0)}$ (по [2]) – решение средней системы $mid((I - X)\bar{a}) - mid(\bar{a}) + mid(\bar{y}) = 0$.
2. Применим субдифференциальный метод Ньютона к индуцированной системе (14).
3. Применим обратное отображение sti^{-1} в интервальное пространство, получим вектор $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$.

Поясним, что полученный вектор $\bar{a}$ в общем случае содержится в KR^k и может не содержаться в IR^k . Чтобы полученный результат оказался верным, применим к вектору $\bar{a}$ операцию:

$$rig(\bar{a}) = \begin{cases} [a_i^-, a_i^+], a_i^- \leq a_i^+ \\ [a_i^+, a_i^-], a_i^- > a_i^+ \end{cases}, i = \overline{1, k}. \quad (21)$$

6. Алгоритм эллипсоида в ИСМ для уточнения оценок параметров ФП

Рассмотрим полученный вектор $\bar{a}$ как прямоугольный параллелепипед с ребрами, параллельными базису пространства R^k :

$$P = P(mid(\bar{a}), rad(\bar{a})) = \{[mid(a_1) - rad(a_1), mid(a_1) + rad(a_1)] \otimes \dots \otimes [mid(a_k) - rad(a_k), mid(a_k) + rad(a_k)]\}. \quad (22)$$

Пусть P – множество неопределенности начального приближения. В пространстве параметров R^k результаты m -го измерения ($k < m \leq n$) (по [1]) – два открытых множества между двумя параллельными плоскостями:

$$Pl_m^- = \left\{ x, y \in IR \mid y_m^- \leq \sum_{j=1}^k a_j (x_m^-)^{j-1} \leq y_m^+ \right\} \quad (23)$$

и

$$Pl_m^+ = \left\{ x, y \in IR \mid y_m^- \leq \sum_{j=1}^k a_j (x_m^+)^{j-1} \leq y_m^+ \right\}, \quad (24)$$

где $a_j - j$ -я координата рассматриваемого множества неопределенности P . Будем считать эти множества полосами.

Оценивающее тело для множества $P - k$ -мерный эллипсоид:

$$E^k(\bar{a}, Q) = \{\bar{x} \in R^k \mid (Q^{-1}(\bar{x} - \bar{a}), \bar{x} - \bar{a}) \leq 1\}, \quad (25)$$

где $Q \in R^k \otimes R^k$ – симметричная положительно определенная характеристическая матрица, $\bar{a} \in R^k$ – центр эллипсоида.

Теорема: Для параллелепипеда начального приближения $P(\bar{c}, \bar{r})$ описанный эллипсоид имеет вид $E(\bar{c}, Q)$, где

$$Q = \begin{bmatrix} kr_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & kr_2^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & kr_{2k}^2 \end{bmatrix} = diag(kr_i^2, i = \overline{1, k}). \quad (26)$$

Доказательство: Пусть параллелепипед $P(\bar{c}, \bar{r})$ переводится в k -мерный куб $P(\bar{O}, \bar{1})$ ($\bar{1}$ – единичный вектор) аффинным преобразованием $\bar{y} = A\bar{x} + \bar{b}$, следовательно, эллипсоид преобразуется в описанную вокруг куба сферу $E(\bar{O}, Q_5)$. Ребра параллелепипеда P параллельны ребрам куба, следовательно, $\bar{y} = A\bar{x} + \bar{b}$ – есть сжатие/растяжение и/или сдвиг, и, следовательно, матрица $A = diag(a_i, i = \overline{1, k})$.

$$A^{-1}(\bar{y} - \bar{b}) \in P(\bar{c}, \bar{r}) \Leftrightarrow A^{-1}\bar{y} - A^{-1}\bar{b} \in P(\bar{c}, \bar{r}); \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{y_1}{a_1}, \frac{y_2}{a_2}, \dots, \frac{y_k}{a_k} \right) - \left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots, \frac{b_k}{a_k} \right) \in [c_1 - r_1, c_1 + r_1] \otimes \dots \otimes [c_k - r_k, c_k + r_k] \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left(\frac{y_1}{a_1}, \frac{y_2}{a_2}, \dots, \frac{y_k}{a_k} \right) \in [c_1 + \frac{b_1}{a_1} - r_1, c_1 + \frac{b_1}{a_1} + r_1] \otimes \dots \otimes [c_k + \frac{b_k}{a_k} - r_k, c_k + \frac{b_k}{a_k} + r_k] \Rightarrow \\ & \Rightarrow \bar{y} \in [(a_1 c_1 + b_1) - a_1 r_1, (a_1 c_1 + b_1) + a_1 r_1] \otimes \dots \otimes [(a_k c_k + b_k) - a_k r_k, (a_k c_k + b_k) + a_k r_k] \Rightarrow \\ & \Rightarrow \bar{y} \in P(A\bar{c} + \bar{b}, A\bar{r}). \end{aligned} \quad (28)$$

Параметры преобразования $P(\bar{c}, \bar{r}) \rightarrow P(\bar{O}, \bar{1})$:

$$A\bar{c} + \bar{b} = \bar{O}, A\bar{r} = \bar{1}, A = \text{diag} \left(\frac{1}{r_i}, i = \overline{1, k} \right), b_i = -\frac{c_i}{r_i}, i = \overline{1, k}. \quad (29)$$

Параметры обратного преобразования $\bar{y} = C\bar{x} + \bar{d}$:

$$C = A^{-1} = \text{diag} (r_i, i = \overline{1, k}), d_i = -A^{-1}b_i = c_i, i = \overline{1, k}. \quad (30)$$

Эллипсоид, описанный вокруг куба $P(\bar{O}, \bar{1})$, есть сфера $E(\bar{O}, Q_S)$ с матрицей $Q_S = \text{diag}(r^2)$ и радиусом $r = \|\bar{1}\| = \sqrt{k}$, следовательно, $Q_S = \text{diag}(q_i = k, i = \overline{1, k})$.

Эллипсоид $E(\bar{g}, Q)$ при применении $\bar{y} = A\bar{x} + \bar{b}$ преобразуется в эллипсоид $E(A\bar{g} + \bar{b}, AQA^T)$, а обратное преобразование куба $P(\bar{O}, \bar{1})$ и сферы $E(\bar{O}, Q_S)$ дает параллелепипед $P(\bar{c}, \bar{r})$ и эллипсоид $E(C\bar{O} + \bar{c}, CQ_S C^T) = E(\bar{c}, Q)$, где $Q = \text{diag} (r_i, i = \overline{1, k}) \times \text{diag} (q_i = k, i = \overline{1, k}) \times \text{diag} (r_i, i = \overline{1, k}) = \text{diag} (kr_i^2, i = \overline{1, k})$. **Теорема доказана.** $\square$

Для построения пересечения эллипсоида и полосы найдем оптимальную эллипсоидальную оценку пересечения эллипсоида $E^k(\bar{a}, Q)$ с полосой $Pl = \left\{ \bar{a} \in R^k, y \in IR^k \mid y^- \leq (\bar{a}, \bar{n}^-) \leq y^+, \|\bar{n}\| = 1 \right\}$.

Это эллипсоид

$$E_{Pl}^k = \left\{ \bar{x} \in R^k \mid Q_{Pl}^{-1}(\bar{x} - \bar{a}_{Pl}), \bar{x} - \bar{a}_{Pl} \leq 1 \right\} \quad (31)$$

с параметрами

$$\bar{a}_{Pl} = \bar{a} + \frac{\varepsilon Q \bar{n}}{\sqrt{(Q \bar{n}, \bar{n})}}, Q_{Pl}^{-1} = \frac{A^2 - B^2}{(Q \bar{n}, \bar{n})} (\bar{n} \bullet \bar{n}) + B^2 Q^{-1}, \quad (32)$$

$$c^- = \max \left(-1, \frac{y^- - (\bar{a}, \bar{n})}{\sqrt{(Q \bar{n}, \bar{n})}} \right), c^+ = \min \left(1, \frac{y^+ - (\bar{a}, \bar{n})}{\sqrt{(Q \bar{n}, \bar{n})}} \right). \quad (33)$$

Если $kc^-c^+ + 1 > 0$, то $t = (c^-)^2 + (c^+)^2 + 2$, $r = (c^-)^2 - (c^+)^2$, $s = (c^- + c^+)^2$,

$$\lambda = \sqrt{\frac{t + \sqrt{t^2 + (k^2 - 1)r^2}}{(k+1)s}}, \quad \varphi = \lambda^4 s - 2\lambda^2 t + (c^+ - c^-)^2, \quad A = 0.5\sqrt{\varphi}, \quad B = A/\lambda,$$

$\varepsilon = 0.5(c^+ + c^-)(1 - \lambda^2)$, иначе $-A = B = 1$; $\varepsilon = 0$.

Здесь $(\bar{n} \bullet \bar{n})$ – произведение, дающее матрицу $N = \{n_{ij}, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k} \mid n_{ij} = a_i b_j\}$.

Если полоса не пересекает эллипсоид ($c^- < -1$ или $c^+ > 1$), то измерение, которому она соответствует, является противоречивым и не участвует в дальнейших расчетах [3].

Объем эллипсоида $E^k(\bar{a}, Q)$, равный $\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} \sqrt{\det(Q)}$, пропорционален $\det(Q)$, следо-

вательно, можно сравнить объемы эллипсоидов, вычисляя только $\det(Q)$.

Параллелепипедом минимального объема с параллельными базису ребрами будет описанный параллелепипед, длина ребер которого равна $2\sqrt{Q_{ii}}$. Полученный интервальный вектор $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ является решением задачи и получается из эллипсоида $E_{PI}^k = \{\bar{x} \in R^k \mid Q_n^{-1}(\bar{x} - \bar{a}_n), \bar{x} - \bar{a}_n \leq 1\}$ по формуле:

$$a_i = \left[(\bar{a}_n)_i - \sqrt{(Q_n)_{ii}}, (\bar{a}_n)_i + \sqrt{(Q_n)_{ii}} \right], i = \overline{1, k}. \quad (34)$$

7. Оценки параметров ФП ИСМ, их абсолютные и относительные отклонения

Точечные оценки параметров a_i при $i = \overline{1, n}$:

$$\bar{a}_i = \frac{a_i^+ + a_i^-}{2}, i = \overline{1, n}. \quad (35)$$

Абсолютные отклонения оценок параметров a_i при $i = \overline{1, n}$ от истинных значений:

$$\varepsilon_{a_i} = \frac{a_i^+ - a_i^-}{2}, i = \overline{1, n}. \quad (36)$$

Относительные отклонения оценок параметров a_i при $i = \overline{1, n}$ от истинных значений:

$$\varepsilon_{a_i}^{om} = \frac{\varepsilon_{a_i} \cdot 100\%}{\min(|a_i^-|, |a_i^+|)}, i = \overline{1, n}. \quad (37)$$

Теорема: Пусть в результате эксперимента получены оценки параметров $a_1^i, a_2^i, \dots, a_k^i$ ИСМ, $i = \overline{1, n}$ – это множество оценок. Математическое ожидание $Ma_k^i = Ma_k = a_k^i$. Тогда при $i = \overline{1, n}, k = \overline{1, m}$ оценки несмещенные и состоятельные.

Доказательство:

Математическое ожидание оценки $\bar{a}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_k^i$:

$$M \bar{a}_k = M \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_k^i \right) = \frac{1}{n} M \left(\sum_{i=1}^n a_k^i \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Ma_k^i = \frac{1}{n} \cdot n \cdot a_k^i = a_k^i. \quad (38)$$

Из определения следует, что $\bar{a}_k$ – несмещенная оценка параметров.

По теореме Чебышева [4] для любого $\varepsilon > 0$ верно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_k^i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Ma_k^i \right| < \varepsilon \right\} = 1 \quad (39)$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ |a_k^i - Ma_k^i| < \varepsilon \right\} = 1. \quad (40)$$

Тогда по определению оценка состоятельная. **Теорема доказана.** $\square$

Теорема: Пусть в результате эксперимента получены оценки параметров $a_1^i, a_2^i, \dots, a_k^i$ ИСМ, $i = \overline{1, n}$ – множество оценок. Математическое ожидание $Ma_k^i = Ma_k = a_k^i$. Тогда при $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$ оценки эффективны.

Доказательство:

Дисперсия оценки $\bar{a}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_k^i$:

$$D\bar{a}_k = D \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} a_k^i \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} \right)^2 (a_k^i)^2. \quad (41)$$

Частные производные функции Лагранжа $L = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n} \right)^2 (a_k^i)^2 - \lambda \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} - 1 \right)$; $c_i = \frac{1}{n}$. Тогда

из определения получаем, что оценка ИСМ a_k^i – эффективна. **Теорема доказана.** $\square$

8. Вычислительный эксперимент

Проведем вычислительный эксперимент с алгоритмом параллелепипеда в ИСМ для оценки параметров многомерной ФП при точном задании входных и интервальном задании выходных переменных. Рассмотрим ФП, которая используется для оценки качества экологической экспертизы [5] в рамках оценки качества системы комплексной безопасности. Функция имеет следующий вид:

$$y = \frac{1}{1 + (x - a + 1)^2}, \quad (42)$$

где $a \in \overline{1, 3}$, $x \in \overline{0, 2}$.

Значения ФП на области определения функции представлены в табл. 1.

Таблица 1. Значения ФП у в области определения

x	y_1	y_2	y_3
0	[1.001;1.002]	[0.501;0.502]	[0.201;0.202]
1	[0.501;0.502]	[1.001;1.002]	[0.501;0.502]
2	[0.201;0.202]	[0.501;0.502]	[1.001;1.002]

Преобразуем ФП в полином:

$$Y = \frac{1}{y} = 1 + (x - a + 1)^2. \quad (43)$$

Значения преобразованной ФП Y представлены в табл. 2.

Таблица 2. Значения преобразованной ФП Y

x	Y_1	Y_2	Y_3
0	[0.998;0.999]	[1.992;1.996]	[4.9505;4.97512]
1	[1.992;1.996]	[0.998;0.999]	[1.992;1.996]
2	[4.9505;4.97512]	[1.992;1.996]	[0.998;0.999]

Применим алгоритм параллелепипеда в ИСМ к преобразованным значениям ФП $y_i = a_1 x_i^2 + a_2 x_i + a_3$ и получим искомые параметры ФП. Они представлены в табл. 3.

Таблица 3. Искомые параметры ФП Y

Параметры	Y_1	Y_2	Y_3
a_1	[0.24928;0.47925]	[0.7485;1.4895]	[2.4555;2.48456]
a_2	[0.51875;0.74872]	[-1.986;0.2445]	[-3.45306;-3.93275]
a_3	[0.998;0.999]	[1.992;1.996]	[4.9505;4.97512]

Вычисление значений ФП Y и их обратное преобразование к нормальному виду y дает совпадение исходных и полученных результатов с учетом погрешностей, что подтверждает применимость предлагаемого алгоритма параллелепипеда в ИСМ для нахождения параметров ФП, используемой при оценке качества элементов комплексной системы безопасности.

Литература

1. В. М. Белов, Ф. Г. Унгер, Ю. А. Карбаинов, В. И. Пролубников, Н. П. Тубалов. Оценивание параметров эмпирических зависимостей методом центра неопределенности. Новосибирск: Наука, 2001. 176 с.
2. С. П. Шарый. Конечномерный интервальный анализ. М.: Новое знание, 2008. 726 с.
3. О. И. Хомутов, В. М. Белов, С. А. Гончаров, Е. В. Рябова. Оценивание параметров эмпирических зависимостей обобщенным методом центра неопределенности / АлтГТУ им. И.И. Ползунова. Барнаул: изд-во АлтГТУ, 2006. 147 с.
4. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. 9-е изд., стер. М.: Высш. шк., 2003. 479 с.: ил.
5. Зырянова Е. В., В. М. Белов. К вопросу об автоматизированной системе оценки качества экологических экспертиз (АС ОК ЭЭ) // Вестник СибГУТИ. 2013. № 4. С. 12–20.

Статья поступила в редакцию 15.02.2016.

Белов Виктор Матвеевич

д.т.н., профессор, профессор кафедры безопасности и управления в телекоммуникациях СибГУТИ, тел. 8-906-963-84-83, e-mail: vmbelov@mail.ru

Зырянова Екатерина Васильевна

аспирант кафедры безопасности и управления в телекоммуникациях СибГУТИ, тел. 8-913-023-75-03, e-mail: keyvezed@mail.ru.

Рябова Елена Викторовна

директор МБОУ «Лицей», г. Рубцовск, тел.: 8-913-369-19-66.

Interval-statistical method of membership functions parameters determination in problems of the integrated security system quality assessment**V. Belov, E. Zyryanova, E. Ryabova**

In this article, the interval - statistical method offered to use for construction of interval statistical estimations of membership functions parameters with various input and output data is described. An example of using this method for integrated security system quality assessment is also described.

Keywords: interval and statistical method, membership function, algorithm of a parallelepiped, algorithm of an ellipsoid.