УДК 519.217

Частотный метод моделирования вероятностных систем длительного использования

Б. П. Зеленцов

Излагается частотный метод моделирования вероятностных систем, эволюционирование которых описывается однородным марковским процессом в дискретном или непрерывном времени. В соответствии с этим методом находятся частоты состояний, частоты переходов между состояниями системы и частоты переходов между подмножествами состояний в стационарном режиме. Эксплуатационные характеристики системы длительного использования выражаются через эти частоты путем оперирования с числовыми и функциональными матрицами.

Ключевые слова: марковский процесс в дискретном времени, марковский процесс в непрерывном времени, средняя частота состояния, средняя частота переходов между состояниями, средняя частота переходов между подмножествами состояний.

1. Введение

В отечественной и зарубежной литературе имеются многочисленные публикации, связанные с исследованием свойств марковских процессов в дискретном и непрерывном времени и их применением для моделирования вероятностных систем различного назначения, например [9, 12, 13]. Особо следует отметить применение теории марковских процессов для решения задач в области надежности. Например, в [1, 10] на основе марковских процессов в непрерывном времени составлены модели функционирования восстанавливаемых и невосстанавливаемых систем, приведены методы расчета показателей надежности (коэффициента готовности, среднего времени между отказами и др.) при различных условиях, связанных со спецификой оборудования. В монографии [14] приведены уравнения, связывающие предельные вероятности состояний и переходные вероятности марковского процесса в дискретном времени, названные уравнениями баланса. Однако эти уравнения не доведены до такого смыслового содержания, которое позволило бы ввести понятие частоты и использовать её для составления модели.

Статья посвящена разработке модели функционирования вероятностной системы, в основе которой лежат частоты состояний, частоты переходов между состояниями и между подмножествами состояний. Модель изложена в рамках теории однородного марковского процесса с конечным эргодическим множеством состояний параллельно в дискретном и в непрерывном времени.

С помощью рассматриваемой модели может быть найден ряд характеристик системы, которые сводятся к вычислению вероятностных, временн*ы*х и частотных характеристик подмножеств состояний: предельной вероятности подмножества состояний, частоты переходов в подмножество состояний, среднего времени нахождения в подмножестве состояний. Эти характеристики вычисляются в стационарном режиме функционирования системы по исходным матрицам переходных вероятностей или интенсивностей переходов между состояниями системы с использованием указанных частот. Выходные характеристики технических систем определяются их назначением и спецификой. Их получают на основе характеристик подмножеств состояний.

Метод может быть применен для моделирования функционирования электронного оборудования различного назначения, телекоммуникционных систем и сетей связи. В частности, оборудование систем связи относится к системам длительного использования и обладает всеми особенностями сложных систем, таких как большое число элементов различного назначения и высокая степень их связности, многоцелевое назначение, сложность алгоритмов управления, наличие различных видов избыточности и др. Надежность, эффективность и эксплуатационные свойства оборудования систем связи могут быть исследованы с помощью частотного метода.

В качестве простого иллюстративного примера рассмотрена система из двух элементов, функционирование которых представлено при последовательном или параллельном (в смысле надежности) соединении элементов.

Автор надеется, что интерес к статье проявят специалисты, занимающиеся проектированием новых, совершенствованием существующих систем длительного использования, а также исследующие различные закономерности и свойства в таких системах.

2. Постановка задачи

Основой модели является дискретное конечное эргодическое множество W состояний, в котором переходы от состояния к состоянию описываются однородным марковским процессом в дискретном или непрерывном времени. Следует заметить, что в отечественной и зарубежной научной литературе используются также другие термины с таким же смыслом, например, цепь Маркова в дискретном и непрерывном времени.

В процессе эксплуатации системы длительного использования имеют место переходы как между состояниями системы, так и между подмножествами состояний. Здесь ставится задача нахождения средних частот состояний и частот переходов между состояниями, с использованием которых вычисляются промежуточные характеристики подмножеств состояний, таких как предельные вероятности подмножеств состояний, частоты переходов между подмножествами состояний, время нахождения в подмножествах состояний.

Излагаемая модель разработана при следующих допущениях:

1) непосредственные переходы системы из одного состояния в другое происходят на одном шаге в дискретном времени и мгновенно в непрерывном времени;

2) процесс переходов от состояния к состоянию является однородным, непосредственные переходы между состояниями описываются постоянными переходными вероятностями в дискретном времени или постоянными интенсивностями переходов в непрерывном времени.

В статье понятия «случайный процесс» и «система» являются синонимами. Синонимами являются также «состояние процесса» и «состояние системы».

Дальнейшие рассуждения и результаты приводятся одновременно для процесса в дискретном и непрерывном времени.

3. Исходные характеристики системы

Итак, в дискретном времени непосредственные переходы между состояниями $w_i \to w_j$ описываются переходными вероятностями p_{ij} $(i \neq j)$, а в непрерывном времени – интенсивностями переходов λ_{ij} $(i \neq j)$, где $w_i \in W$, $w_j \in W$.

Как переходные вероятности, так и интенсивности переходов записываются в виде исходной матрицы переходных вероятностей P и исходной матрицы интенсивностей Λ [3, 5, 6, 8, 11]:

$$\text{а) } P = \left\| p_{ij} \right\|; \quad \text{б) } \Lambda = \left\| \lambda_{ij} \right\|. \qquad (1)$$

4. Частоты состояний

Введем понятие частоты ω_i вхождения эргодического процесса в состояние w_i в стационарном режиме. Частота ω_i определяется как среднее число вхождений в состояние w_i, приходящееся на один шаг, для процесса в дискретном времени, и как среднее число вхождений в состояние w_i, приходящееся на единицу времени, для процесса в непрерывном времени. В [6] приведена зависимость между частотой состояния ω_i и предельной вероятностью состояния π_i для процесса в дискретном и непрерывном времени:

$$\text{а) } \omega_i = \pi_i \cdot (1 - p_{ii}); \ \text{б) } \omega_i = -\pi_i \cdot \lambda_{ii}, \qquad (2)$$

где p_{ii} и λ_{ii} – диагональные элементы соответственно исходной матрицы переходных вероятностей и исходной матрицы интенсивностей.

Для дальнейшего развития модели удобно ввести диагональные элементы матрицы частот $\omega_{ii} = -\omega_i$. Тогда соотношения (2) можно представить в матричном виде для процесса в дискретном и в непрерывном времени:

$$\text{а) } \Omega_{\text{dg}} = \Pi_{\text{dg}} \cdot (P_{\text{dg}} - E); \ \text{б) } \Omega_{\text{dg}} = \Pi_{\text{dg}} \cdot \Lambda_{\text{dg}}, \qquad (3)$$

где dg – обозначение соответствующей диагональной матрицы; E – единичная матрица соответствующего порядка; Ω_{dg} – матрица, диагональными элементами которой являются ω_{ii}, остальные элементы равны нулю; Π_{dg} – матрица, диагональные элементы которой равны соответствующим предельным вероятностям состояний, а остальные элементы равны нулю

Диагональный элемент ω_{ii} равен сумме частот непосредственных переходов из состояния w_i в другие состояния, взятой с обратным знаком:

$$\omega_{ii} = -\omega_i = \sum_{j,\, j \neq i} \omega_{ij}. \qquad (4)$$

5. Частоты переходов между состояниями

Частота ω_{ij} непосредственных переходов $w_i \to w_j$ $(i \neq j)$ определяется частотой ω_i и вероятностью того, что система перейдет в w_j, когда она покинет состояние w_i. Эта вероятность пропорциональна переходной вероятности p_{ij} для процесса в дискретном времени и интенсивности λ_{ij} для процесса в непрерывном времени. Частота непосредственных переходов $w_i \to w_j$ с использованием предельных вероятностей для процесса в дискретном времени и для процесса в непрерывном времени примет вид [6]:

$$\text{а) } \omega_{ii} = \pi_i \cdot p_{ij}; \quad \text{б) } \omega_{ii} = \pi_i \cdot \lambda_{ij}, \quad i \neq j. \qquad (5)$$

Частота ω_{ij}, $i \neq j$, имеет смысл, аналогичный смыслу частоты ω_i: ω_{ij} – это среднее число непосредственных переходов $w_i \to w_j$, приходящееся на один шаг для процесса в дискретном времени или в единицу времени для процесса в непрерывном времени. Частоты ω_i и ω_{ij} являются абсолютными характеристиками состояний и переходов между состояниями, так как они отнесены к одному шагу или к единице времени в зависимости от типа процесса.

В матричной форме зависимость (5) между частотами, предельными вероятностями и исходными характеристиками для процесса в дискретном и непрерывном времени имеет вид:

$$\text{а)}\ \Omega = \Pi_{\mathrm{dg}} \cdot (P - E)\,; \quad \text{б)}\ \Omega = \Pi_{\mathrm{dg}} \cdot \Lambda\,, \tag{6}$$

где $\Omega = \|\omega_{ij}\|$ – матрица частот непосредственных переходов между состояниями.

Следует отметить, что матрица Ω содержит как частоты непосредственных переходов $w_i \to w_j$, так и частоты состояний системы в виде $\omega_{ii} = -\,\omega_i$.

Для исследований может быть полезной обратная зависимость: выражение исходных характеристик через предельные вероятности и частоты:

$$\text{а)}\ P = E + \Pi_{\mathrm{dg}}^{-1} \cdot \Omega\,; \quad \text{б)}\ \Lambda = \Pi_{\mathrm{dg}}^{-1} \cdot \Omega\,. \tag{7}$$

6. Частоты переходов между состояниями подмножеств

Выполним UV-разбиение множества W, которое заключается в том, что множество W возможных состояний системы разбивается на два непересекающихся подмножества U и V по некоторому признаку. Заметим, что в каждой конкретной задаче UV-разбиение множества состояний имеет определённый инженерно-технический смысл. С течением времени система длительного использования переходит от состояния к состоянию как в каждом из подмножеств, так и из одного подмножества в другое. Тогда функционирование системы во времени можно разбить на циклы, заключающееся в пребывании системы в подмножестве U и в следующим за ним пребывании в подмножестве V: $U \to V \to U \to V \to \ldots$

Таблица 1. Соотношения между блочными подматрицами частот, предельных вероятностей, переходных вероятностей и интенсивностей переходов

№ п/п	Формулы для процесса	
	в дискретном времени	в непрерывном времени
1	а) $\Omega_{UU} = \Pi_{\mathrm{dg}\,U} \cdot (P_{UU} - E)$	б) $\Omega_{UU} = \Pi_{\mathrm{dg}\,U} \cdot \Lambda_{UU}$
2	а) $\Omega_{VV} = \Pi_{\mathrm{dg}\,V} \cdot (P_{VV} - E)$	б) $\Omega_{VV} = \Pi_{\mathrm{dg}\,V} \cdot \Lambda_{VV}$
3	а) $\Omega_{UV} = \Pi_{\mathrm{dg}\,U} \cdot P_{UV}$	б) $\Omega_{UV} = \Pi_{\mathrm{dg}\,U} \cdot \Lambda_{UV}$
4	а) $\Omega_{VU} = \Pi_{\mathrm{dg}\,V} \cdot P_{VU}$	б) $\Omega_{VU} = \Pi_{\mathrm{dg}\,V} \cdot \Lambda_{VU}$

Представим матрицы Ω и Π_{dg}, а также исходные матрицы в виде четырех подматриц в соответствии с разбиением множества W на подмножества U и V. Произведем умножение (7) с использованием блочных матриц. Тогда получим для процесса в дискретном времени

$$\begin{pmatrix} \Omega_{UU} & \Omega_{UV} \\ \Omega_{VU} & \Omega_{VV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_{\mathrm{dg}\,U} \cdot (P_{UU} - E) & \Pi_{\mathrm{dg}U} \cdot P_{UV} \\ \Pi_{\mathrm{dg}\,V} \cdot P_{VU} & \Pi_{\mathrm{dg}\,V} \cdot (P_{VV} - E) \end{pmatrix}$$

и для процесса в непрерывном времени:

$$\begin{pmatrix} \Omega_{UU} & \Omega_{UV} \\ \Omega_{VU} & \Omega_{VV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Pi_{\mathrm{dg}\,U} \cdot \Lambda_{UU} & \Pi_{\mathrm{dg}U} \cdot \Lambda_{UV} \\ \Pi_{\mathrm{dg}\,V} \cdot \Lambda_{VU} & \Pi_{\mathrm{dg}\,V} \cdot \Lambda_{VV} \end{pmatrix}.$$

где Ω_{UU}, Ω_{VV}, Ω_{UV}, Ω_{VU} – подматрицы частот переходов внутри подмножеств U и V и между ними; $\Pi_{\text{dg}U}$ и $\Pi_{\text{dg}V}$ – диагональные матрицы, полученные из матрицы Π_{dg} путем удаления из нее строк и столбцов, соответствующих подмножествам V и U соответственно, E – единичная матрица согласованного порядка. Из этих уравнений вытекают соотношения, приведенные в табл. 1.

7. Частоты переходов между подмножествами состояний

Частоты переходов ω_{ij} ($i \neq j$) являются суммируемыми характеристиками, то есть можно суммировать частоты любых переходов. Тогда средняя частота ω_{UV} переходов $U \to V$ между двумя подмножествами определяется суммой частот этих переходов между состояниями, то есть

$$\omega_{UV} = \sum_{u_i} \sum_{v_j} \omega_{ij} , \tag{8}$$

где $u_i \in U$; $v_j \in V$. Аналогично находится средняя частота ω_{VU} переходов $V \to U$:

$$\omega_{VU} = \sum_{v_i} \sum_{u_j} \omega_{ij} . \tag{9}$$

Как и ранее, эти частоты имеют смысл среднего числа переходов между подмножествами состояний, приходящегося на один шаг в дискретном времени или в единицу времени в непрерывном времени.

Покажем, что $\omega_{UV} = \omega_{VU}$ на примере процесса в непрерывном времени. Поскольку частоты ω_{UV} и ω_{VU} – это суммы частот всех возможных переходов между подмножествами, то их можно представить в виде:

$$\omega_{UV} = \bar{e} \cdot \Omega_{UV} \cdot \dot{e} ; \qquad \omega_{VU} = \bar{e} \cdot \Omega_{VU} \cdot \dot{e} , \tag{10}$$

где $\bar{e}$ – строка, все элементы которой равны 1; $\dot{e}$ – столбец, все элементы которого равны 1.

С учетом формул табл. 1 получим:

$$\omega_{UV} = \bar{e} \cdot \Pi_{\text{dg}\,U} \cdot \Lambda_{UV} \cdot \dot{e} = \bar{\pi}_U \cdot \Lambda_{UV} \cdot \dot{e} ; \quad \omega_{VU} = \bar{e} \cdot \Pi_{\text{dg}\,V} \cdot \Lambda_{VU} \cdot \dot{e} = \bar{\pi}_V \cdot \Lambda_{VU} \cdot \dot{e} , \tag{11}$$

где $\bar{\pi}_U$ и $\bar{\pi}_V$ – части распределения предельных вероятностей всего множества состояний, относящиеся к подмножествам U и V соответственно; $\bar{\pi} = (\bar{\pi}_U ; \bar{\pi}_V)$ – строка предельных вероятностей состояний системы.

Воспользуемся свойством эргодического процесса в непрерывном времени [6]:
$\bar{\pi} \cdot \Lambda = \bar{o}$, где $\bar{o}$ – строка с нулевыми элементами. Из этого свойства следует:

$$\bar{\pi}_U \cdot \Lambda_{UV} = -\bar{\pi}_V \cdot \Lambda_{VV} ; \quad \bar{\pi}_V \cdot \Lambda_{VU} = -\bar{\pi}_U \cdot \Lambda_{UU} . \tag{12}$$

Подставим правые части этих равенств в (11):

$$\omega_{UV} = -\bar{\pi}_V \cdot \Lambda_{VV} \cdot \dot{e} ; \qquad \omega_{VU} = -\bar{\pi}_U \cdot \Lambda_{UU} \cdot \dot{e} . \tag{13}$$

Воспользуемся свойством матрицы интенсивностей $\Lambda \cdot \dot{e} = \dot{o}$ ($\dot{o}$ – столбец с нулевыми элементами), из которого следует:

$$\Lambda_{UU} \cdot \dot{e} = -\Lambda_{UV} \cdot \dot{e} ; \qquad \Lambda_{VV} \cdot \dot{e} = -\Lambda_{VU} \cdot \dot{e} \tag{14}$$

Подставим правые части этих равенств в (13):

$$\omega_{UV} = \bar{\pi}_V \cdot \Lambda_{VU} \cdot \dot{e} ; \qquad \omega_{VU} = \bar{\pi}_U \cdot \Lambda_{UV} \cdot \dot{e} \tag{15}$$

Видно, что формулы для ω_{UV} и ω_{VU} поменялись местами. Равенство $\omega_{UV} = \omega_{VU}$ доказано.

Таким образом, частота переходов из одного подмножества в другое определяется как сумма произведений предельных вероятностей одного подмножества, умноженных на характеристики переходов из этих состояний в другое подмножество.

Полученный результат легко интерпретируются: частота переходов $U \to V$ равна частоте обратных переходов, так как после каждого вхождения в подмножество U следует вхождение в подмножество V, и наоборот. Этот результат можно рассматривать также как частотное равновесие или частотный баланс: в стационарном режиме частота переходов из одного подмножества в другое равна частоте обратного перехода. Это положение справедливо для любого разбиения множества состояний системы на два подмножества.

Выражение частотного баланса в матричной форме приведено в табл. 2: частоту переходов между подмножествами можно вычислить по одной из четырех формул как для процесса в дискретном времени, так и для процесса в непрерывном времени. Формулы получены с использованием свойств матрицы переходных вероятностей и матрицы интенсивностей.

Таблица 2. Формулы для вычисления частоты переходов между двумя подмножествами

№ п/п	Частоты $\omega_{UV} = \omega_{VU}$	
	в дискретном времени	в непрерывном времени
1	а) $\bar{\pi}_U \cdot P_{UV} \cdot \dot{e}$	б) $\bar{\pi}_U \cdot \Lambda_{UV} \cdot \dot{e}$
2	а) $\bar{\pi}_U \cdot (E - P_{UU}) \cdot \dot{e}$	б) $-\bar{\pi}_U \cdot \Lambda_{UU} \cdot \dot{e}$
3	а) $\bar{\pi}_V \cdot P_{VU} \cdot \dot{e}$	б) $\bar{\pi}_V \cdot \Lambda_{VU} \cdot \dot{e}$
4	а) $\bar{\pi}_V \cdot (E - P_{VV}) \cdot \dot{e}$	б) $-\bar{\pi}_V \cdot \Lambda_{VV} \cdot \dot{e}$

8. Характеристики подмножеств состояний

Частота ω_{UV} является частотой цикла, представляющего собой пребывание системы в подмножестве U и следующее за ним пребывание в подмножестве V. Средняя продолжительность цикла обозначена через n_{UV} для процесса в дискретном времени и через t_{UV} для процесса в непрерывном времени:

$$\text{а)}\ n_{UV} = n_U + n_V; \qquad \text{б)}\ t_{UV} = t_U + t_V; \tag{16}$$

где n_U и n_V – средняя продолжительность нахождения в подмножествах U и V в числе шагов; t_U и t_V – средняя продолжительность нахождения в подмножествах U и V в единицах непрерывного времени.

Очевидно, что $\omega_{UV} = 1/n_{UV}$ для процесса в дискретном времени и $\omega_{UV} = 1/t_{UV}$ для процесса в непрерывном времени. Отсюда следуют зависимости между предельными вероятностями подмножеств состояний, продолжительностями нахождения в подмножествах состояний и частотой цикла (табл. 3).

Таблица 3. Соотношения между предельными вероятностями подмножеств, продолжительностями нахождения в подмножествах состояний в стационарном режиме и частотой цикла

№ п/п	Соотношения для процесса	
	в дискретном времени	в непрерывном времени
1	а) $\pi_U = n_U \cdot \omega_{UV}$	б) $\pi_U = t_U \cdot \omega_{UV}$
2	а) $\pi_V = n_V \cdot \omega_{UV}$	б) $\pi_V = t_V \cdot \omega_{UV}$

В таблице обозначено: $\pi_U = \bar{\pi}_U \cdot \dot{e}$ и $\pi_V = \bar{\pi}_V \cdot \dot{e}$ – предельные вероятности нахождения соответственно в подмножествах U и V в стационарном режиме.

Характеристики подмножеств U и V в стационарном режиме приведены в табл. 4.

Таблица 4. Вероятностные, частотные и временные характеристики подмножеств состояний

Характеристики подмножеств	Обозначения или формулы для вычисления
1. Предельные вероятности подмножеств	π_U ; π_V
2. Средняя частота переходов $U \to V$ или $V \to U$	$\omega_{UV} = \omega_{VU}$
3. Средняя продолжительность цикла для процесса в дискретном времени	$n_{UV} = n_U + n_V = 1/\omega_{UV}$
4. Среднее число шагов нахождения в подмножестве U	$n_U = \pi_U \cdot n_{UV} = \pi_U / \omega_{UV}$
5. Среднее число шагов нахождения в подмножестве V	$n_V = \pi_V \cdot n_{UV} = \pi_V / \omega_{UV}$
6. Средняя продолжительность цикла для процесса в непрерывном времени	$t_{UV} = t_U + t_V = 1/ \omega_{UV}$
7. Среднее время нахождения в подмножестве U	$t_U = \pi_U \cdot t_{UV} = \pi_U / \omega_{UV}$
8. Среднее время нахождения в подмножестве V	$t_V = \pi_V \cdot t_{UV} = \pi_U / \omega_{UV}$

9. Частный случай выделения одного состояния

При исследовании реальных систем возможен случай выделения одного состояния, что значительно упрощает модель.

Пусть подмножество U состоит из одного состояния: $U = w_i$, $V = W_i$, где W_i – множество возможных состояний без состояния w_i. Тогда характеристики подмножеств состояний можно упростить за счет того, что частота состояния w_i является частотой цикла. Эти характеристики приведены в табл. 5.

Таблица 5. Характеристики подмножеств состояний при выделении одного состояния

Характеристика состояния w_i и подмножества $V = w_i$	Обозначение или формула для вычисления
1. Предельная вероятность состояния w_i и подмножества $V = w_i$	π_i ; $\pi_V = 1 - \pi_i$
2. Средняя частота состояния w_i для процесса в дискретном времени	$\omega_i = \pi_i \cdot (1 - p_{ii})$
3. Средняя продолжительность цикла для процесса в дискретном времени	$n_{UV} = 1/[\pi_i \cdot (1 - p_{ii})]$
4. Среднее число шагов нахождения в состоянии w_i	$n_i = 1/(1 - p_{ii})$
5. Среднее число шагов нахождения в подмножестве V	$n_V = (1 - \pi_i)/[\pi_i \cdot (1 - p_{ii})]$
6. Средняя частота состояния w_i для процесса в непрерывном времени	$\omega_i = -\pi_i \cdot \lambda_{ii}$
7. Средняя продолжительность цикла для процесса в непрерывном времени	$t_{UV} = -1/(\pi_i \cdot \lambda_{ii})$
8. Среднее время нахождения в состоянии w_i	$t_i = -1/ \lambda_{ii}$
9. Среднее время нахождения в подмножестве V	$t_V = -(1 - \pi_i)/(\pi_i \cdot \lambda_{ii})$

10. Пример моделирования системы из двух элементов

Применим изложенный метод к моделированию системы, состоящей из двух элементов с разными исходными характеристиками. Для лучшего понимания модели в неё вложен «надежностный» смысл, а именно, выходными характеристиками являются показатели, характеризующие надежность системы. Каждый элемент может находиться в двух состояниях: работоспособном и неработоспособном. Отказы элементов обнаруживаются при их возникновении. Элементы являются восстанавливаемыми: восстановление элемента производится после наступления отказа.

Для обозначения состояний элементов использованы символы:
$Р_1$ и $Р_2$ – работоспособное состояние первого и второго элемента;
$В_1$ и $В_2$ восстановление первого и второго элемента;
$Н_1$ и $Н_2$ – неработоспособное состояние первого и второго элемента.

Исходными характеристиками являются:
p_1 и p_2 – вероятности отказа первого и второго элементов на одном шаге;
q_1 и q_2 – вероятности завершения восстановления первого и второго элементов на одном шаге;
λ_1 и λ_2 – интенсивности отказов первого и второго элементов;
μ_1 и μ_2 – интенсивности завершения восстановления первого и второго элементов.

Здесь принято, что каждый работоспособный элемент находится в нагруженном режиме и может отказать.

Будем в дальнейшем обозначать подмножество работоспособных состояний через U, а подмножество неработоспособных состояний через V.

С помощью приведенных характеристик подмножеств находятся следующие показатели надежности:
– стационарный коэффициент готовности $К_г = \pi_U$;
– стационарный коэффициент неготовности $К_н = \pi_V$;
– средняя частота отказов $\omega_{отк} = \omega_{VU}$;
– средняя продолжительность цикла в стационарном режиме $n_ц = 1/\ \omega_{UV}$ для процесса в дискретном времени и $t_ц = 1/\ \omega_{UV}$ для процесса в непрерывном времени;
– средняя продолжительность безотказной работы $n_{бр} = n_U$ для процесса в дискретном времени и $t_{бр} = t_U$ для процесса в непрерывном времени;
– средняя продолжительность восстановления $n_в = n_V$ для процесса в дискретном времени и $t_в = t_V$ для процесса в непрерывном времени.

Предельные вероятности состояний можно вычислить по формулам на основе определителей или на основе обращения матриц [6].

Далее рассмотрены модели системы из двух независимых и двух зависимых элементов.

11. Модель системы из двух независимых элементов

Рассмотрим сначала систему с двумя независимыми элементами. Элементы независимы как по нагруженности, так и по восстановлению: каждый работоспособный элемент нагружен и может отказать, а каждый отказавший элемент восстанавливается непосредственно после наступления отказа.

Граф состояний как для процесса в дискретном времени, так и для процесса в непрерывном времени приведен на рис. 1. В состоянии 1 оба работоспособных элемента нагружены, поэтому оба могут отказать, что вызывает переход в состояния 2 или 3. Из этих состояний возможет переход в состояние 4, где оба элемента одновременно находятся в неработоспособном состоянии и восстанавливаются.

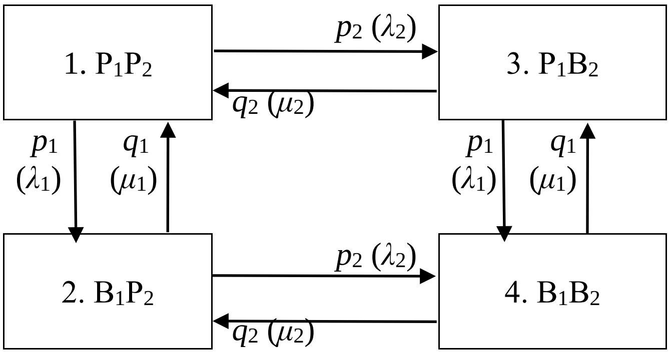

Рис. 1. Граф состояний системы из двух независимых элементов

Исходная матрица переходных вероятностей для процесса в дискретном времени:

$$P=\begin{pmatrix} 1-p_1-p_2 & p_1 & p_2 & 0 \\ q_1 & 1-p_2-q_1 & 0 & p_2 \\ q_2 & 0 & 1-p_1-q_2 & p_1 \\ 0 & q_2 & q_1 & 1-q_1-q_2 \end{pmatrix}.$$

Исходная матрица интенсивностей переходов для процесса в непрерывном времени:

$$\Lambda=\begin{pmatrix} -\lambda_1-\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \mu_1 & -\lambda_2-\mu_1 & 0 & \lambda_2 \\ \mu_2 & 0 & -\lambda_1-\mu_2 & \lambda_1 \\ 0 & \mu_2 & \mu_1 & -\mu_1-\mu_2 \end{pmatrix}.$$

Найдем сначала предельные вероятности состояний, формулы для вычисления которых приведены в табл. 6.

Таблица 6. Формулы для вычисления предельных вероятностей состояний

π_i	Формула для процесса	
	в дискретном времени	в непрерывном времени
π_1	$q_1\cdot q_2/[(p_1+q_1)\cdot(p_2+q_2)]$	$\mu_1\cdot\mu_2/[(\lambda_1+\mu_1)\cdot(\lambda_2+\mu_2)]$
π_2	$p_1\cdot q_2/[(p_1+q_1)\cdot(p_2+q_2)]$	$\lambda_1\cdot\mu_2/[(\lambda_1+\mu_1)\cdot(\lambda_2+\mu_2)]$
π_3	$q_1\cdot p_2/[(p_1+q_1)\cdot(p_2+q_2)]$	$\mu_1\cdot\lambda_2/[(\lambda_1+\mu_1)\cdot(\lambda_2+\mu_2)]$
π_4	$p_1\cdot p_2/[(p_1+q_1)\cdot(p_2+q_2)]$	$\lambda_1\cdot\lambda_2/[(\lambda_1+\mu_1)\cdot(\lambda_2+\mu_2)]$

Таблица 7. Показатели надежности для последовательного соединения элементов

Характеристика	Формула для процесса	
	в дискретном времени	в непрерывном времени
$К_г=\pi_1$	$q_1\cdot q_2/[(p_1+q_1)\cdot(p_2+q_2)]$	$\mu_1\cdot\mu_2/[(\lambda_1+\mu_1)\cdot(\lambda_2+\mu_2)]$
$К_н=\pi_2+\pi_3+\pi_4$	$\dfrac{p_1\cdot p_2+p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{(p_1+q_1)\cdot(p_2+q_2)}$	$\dfrac{\lambda_1\cdot\lambda_2+\lambda_1\cdot\mu_2+\lambda_2\cdot\mu_1}{(\lambda_1+\mu_1)\cdot(\lambda_2+\mu_2)}$
$\omega_{отк}=\omega_{UV}$	$q_1\cdot q_2\cdot(p_1+p_2)/[(p_1+q_1)\cdot(p_2+q_2)]$	$\mu_1\cdot\mu_2\cdot(\lambda_1+\lambda_2)/[(\lambda_1+\mu_1)\cdot(\lambda_2+\mu_2)]$
$n_ц=1/\omega_{UV}$; $t_ц=1/\omega_{UV}$	$[(p_1+q_1)\cdot(p_2+q_2)]/[q_1\cdot q_2\cdot(p_1+p_2)]$	$(\lambda_1+\mu_1)\cdot(\lambda_2+\mu_2)/[\mu_1\cdot\mu_2\cdot((\lambda_1+\lambda_2)]$
$n_{бр}=n_U$; $t_{бр}=t_U$	$1/(p_1+p_2)$	$1/(\lambda_1+\lambda_2)$
$n_в=n_V$; $t_в=t_V$	$\dfrac{p_1\cdot p_2+p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{q_1\cdot q_2\cdot(p_1+p_2)}$	$\dfrac{\lambda_1\cdot\lambda_2+\lambda_1\cdot\mu_2+\lambda_2\cdot\mu_1}{\mu_1\cdot\mu_2\cdot(\lambda_1+\lambda_2)}$

Рассмотрим далее последовательное и параллельное соединение этих элементов, при этом основным допущением является независимость этих элементов, то есть состояние одного элемента не зависит от того, в каком состоянии находится другой элемент. Если элементы соединены последовательно, то $U = \{1\}$, $V = \{2,3,4\}$. Если же они соединены параллельно в смысле надежности, то $U = \{1,2,3\}$, $V = \{4\}$. Здесь U – подмножество работоспособных состояний, а V – подмножество неработоспособных состояний.

Таблица 8. Показатели надежности для параллельного соединения элементов

Характеристика	Формула для процесса	
	в дискретном времени	в непрерывном времени
$К_г = \pi_1+\pi_2+\pi_3$	$\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1+q_1\cdot q_2}{(p_1+q_1)\cdot(p_2+q_2)}$	$\frac{\lambda_1\cdot\mu_2+\lambda_2\cdot\mu_1+\mu_1\cdot\mu_2}{(\lambda_1+\mu_1)\cdot(\lambda_2+\mu_2)}$
$К_н = \pi_4$	$p_1\cdot p_2/[(p_1+q_1)\cdot(p_2+q_2)]$	$\lambda_1\cdot\lambda_2/[(\lambda_1+\mu_1)\cdot(\lambda_2+\mu_2)]$
$\omega_{отк} = \omega_{UV}$	$p_1\cdot p_2\cdot(q_1+q_2)/[(p_1+q_1)\cdot(p_2+q_2)]$	$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot(\mu_1+\mu_2)/[(\lambda_1+\mu_1)\cdot(\lambda_2+\mu_2)]$
$n_ц = 1/\omega_{UV}$; $t_ц = 1/\omega_{UV}$	$[(p_1+q_1)\cdot(p_2+q_2)]/[p_1\cdot p_2\cdot(q_1+q_2)]$	$(\lambda_1+\mu_1)\cdot(\lambda_2+\mu_2)/[\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot((\mu_1+\mu_2)]$
$n_{бр} = n_U$; $t_{бр} = t_U$	$\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1+q_1\cdot q_2}{p_1\cdot p_2\cdot(q_1+q_2)}$	$\frac{\lambda_1\cdot\mu_2+\lambda_2\cdot\mu_1+\mu_1\cdot\mu_2}{\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot(\mu_1+\mu_2)}$
$n_в = n_V$; $t_в = t_V$	$1/(q_1+q_2)$	$1/(\mu_1+\mu_2)$

12. Модель системы из двух зависимых элементов

Рассмотрим теперь зависимое функционирование элементов. На зависимость элементов могут влиять разные факторы: например, они могут быть зависимы по нагруженности, по восстановлению, по приоритету использования и др.

Здесь принято: если элемент работоспособен, то он нагружен независимо от состояния другого элемента и поэтому может отказать. Однако восстановление является ограниченным: при отказе двух элементов сначала завершается начатое восстановление одного элемента, затем начинается восстановление другого элемента. Таким образом, элементы являются зависимыми по фазе восстановления. Такой режим эксплуатации позволяет описать последовательное и параллельное соединение элементов одним и тем же графом состояний, приведенным на рис. 2.

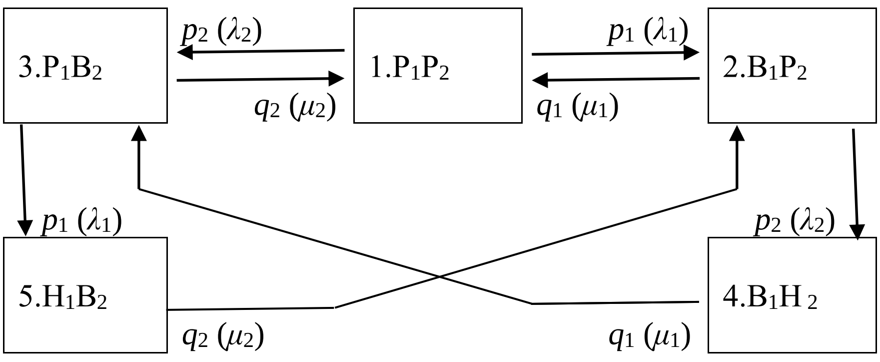

Рис. 2. Граф состояний системы из двух зависимых элементов

Исходная матрица переходных вероятностей для процесса в дискретном времени:

$$P=\begin{pmatrix} 1-p_1-p_2 & p_1 & p_2 & 0 & 0 \\ q_1 & 1-p_2-q_1 & 0 & p_2 & 0 \\ q_2 & 0 & 1-p_1-q_2 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & q_1 & 1-q_1 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 & 1-q_2 \end{pmatrix}.$$

Исходная матрица интенсивностей переходов для процесса в непрерывном времени:

$$\Lambda=\begin{pmatrix} -\lambda_1-\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -\lambda_2-\mu_1 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \mu_2 & 0 & -\lambda_1-\mu_2 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \mu_1 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

Дальнейшие операции выполнены на основе определителей, которые приведены в табл. 9.

Для процесса в дискретном времени и для процесса в непрерывном времени определители вычислены по формулам [6]: $\Delta_i = |E - P_i|$; $\Delta_i = |\Lambda_i|$, где P_i – матрица переходных вероятностей, в которой удалены i-я строка и i-й столбец; Λ_i – матрица интенсивностей, в которой удалены i-я строка и i-й столбец. Сумма определителей для дискретного времени Δ_d и для непрерывного времени Δ_c:

$$\Delta_d = \sum_{i=1}^{5} |E-P_i|; \quad \Delta_c = \sum_{i=1}^{5} |\Lambda_i|. \tag{17}$$

Таблица 9. Определители для системы из двух зависимых элементов

Δ_i	Формула для определителя	
	в дискретном времени	в непрерывном времени
Δ_1	$q_1 \cdot q_2 \cdot (p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 + q_1 \cdot q_2)$	$\mu_1 \cdot \mu_2(\lambda_1 \cdot \mu_1 + \lambda_2 \cdot \mu_2 + \mu_1 \cdot \mu_2)$
Δ_2	$p_1 \cdot q_1 \cdot q_2(p_1 + p_2 + q_2)$	$\lambda_1 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)$
Δ_3	$p_2 \cdot q_1 \cdot q_2(p_1 + p_2 + q_1)$	$\lambda_2 \cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)$
Δ_4	$p_1 \cdot p_2 \cdot q_2(p_1 + p_2 + q_2)$	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_2 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)$
Δ_5	$p_1 \cdot p_2 \cdot q_1(p_1 + p_2 + q_1)$	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \mu_1 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)$

Формулы для вычисления предельных вероятностей состояний выводятся с помощью определителей для процесса в дискретном времени и для процесса в непрерывном времени

$$\pi_i = \Delta_i + \Delta_d; \; \pi_i = \Delta_i + \Delta_{\tilde{n}}. \tag{18}$$

Таблица 10. Показатели надежности для последовательного соединения элементов

Показатель надежности	Формула для процесса	
	в дискретном времени	в непрерывном времени
$К_г = \pi_1$	Δ_1 / Δ_d	Δ_1 / Δ_c
$К_н = \pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5$	$(\Delta_d - \Delta_1)/\Delta_d$	$(\Delta_c - \Delta_1)/\Delta_c$
$\omega_{отк} = \omega_{UV}$	$\Delta_1 \cdot (p_1 + p_2)/\Delta_d$	$\Delta_1 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)/\Delta_c$
$n_ц = 1/\omega_{UV}$; $t_ц = 1/\omega_{UV}$	$\Delta_d / [\Delta_1 \cdot (p_1 + p_2)]$	$\Delta_c / [\Delta_1 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)]$
$n_{бр} = n_U$ $t_{бр} = t_U$	$1/(p_1 + p_2)$	$1/(\lambda_1 + \lambda_2)$
$n_в = n_V$; $t_в = t_V$	$(\Delta_d - \Delta_1)/[\Delta_1 \cdot (p_1 + p_2)]$	$(\Delta_c - \Delta_1)/[\Delta_1 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)]$

На основе предельных вероятностей в табл. 10 и 11 приведены формулы для показателей надежности при последовательном и параллельном соединении элементов (громоздкие алгебраические выражения опущены).

Таблица 11. Показатели надежности для параллельного соединения элементов

Показатель надежности	Формула для процесса	
	в дискретном времени	в непрерывном времени
$К_г = \pi_1+\pi_2+\pi_3$	$(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3)/\Delta_d$	$(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3)/\Delta_c$
$К_н = \pi_4+\pi_5$	$(\Delta_4+\Delta_5)/\Delta_d$	$(\Delta_4+\Delta_5/\Delta_c$
$\omega_{отк} = \omega_{UV}$	$(\Delta_2\cdot p_2+\Delta_3\cdot p_1)/\Delta_d$	$(\Delta_2\cdot\lambda_2+\Delta_3\cdot\lambda_1)/\Delta_c$
$n_ц = 1/\ \omega_{UV}$; $t_ц = 1/\ \omega_{UV}$	$\Delta_d/(\Delta_2\cdot p_2+\Delta_3\cdot p_1)$	$\Delta_c/(\Delta_2\cdot\lambda_2+\Delta_3\cdot\lambda_1)$
$n_{бр} = n_U$; $t_{бр} = t_U$	$(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3)/(\Delta_2\cdot p_2+\Delta_3\cdot p_1)$	$(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3)/(\Delta_2\cdot\lambda_2+\Delta_3\cdot\lambda_1)$
$n_в = n_V$; $t_в = t_V$	$(\Delta_4+\Delta_5)/(\Delta_2\cdot p_2+\Delta_3\cdot p_1)$	$(\Delta_4+\Delta_5)/(\Delta_2\cdot\lambda_2+\Delta_3\cdot\lambda_1)$

Итак, получены формулы в аналитическом виде для расчета показателей надежности при последовательном и параллельном соединении двух элементов. Для наглядного представления этого результата приведён пример в числовом виде. Ограничимся процессом в непрерывном времени. Для упрощения расчетов примем, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Присвоим следующие числовые значения исходным характеристикам: $\lambda = 10^{-3}$ 1/час, $\mu = 1$ 1/час. Результаты вычислений приведены в табл. 12. Из таблицы видно, что при принятых условиях существенным фактором в обеспечении надежности является последовательное или параллельное соединение элементов: коэффициент неготовности и частота отказов уменьшаются на три порядка, а среднее время безотказной работы увеличивается на три порядка. Однако уровень надежности остается практически неизменным для вариантов с неограниченным и ограниченным восстановлением элементов.

Таблица 12. Показатели надежности
для разных вариантов построения системы из двух элементов

Показатель надежности	Независимые элементы		Зависимые элементы	
	Последовательное соединение	Параллельное соединение	Последовательное соединение	Параллельное соединение
$К_г$	0.998	0.999999	0.998	0.999998
$К_н$	0.002	0.000001	0.002	0.000002
$\omega_{отк}$	0.002	0.000002	0.002	0.000002
t_{UV}	501	501 000	501	501 000
$t_{бр}$	500	501 000	500	501 000
$t_в$	1	0.5	1	1

13. Заключение

Частотный метод позволяет получить ряд промежуточных характеристик на основе однородного марковского процесса в дискретном или непрерывном времени. С помощью исходной матрицы переходных вероятностей и матрицы интенсивностей могут быть получены предельные вероятности состояний и частоты переходов между состояниями. При разбиении эргодического множества состояний на два подмножества могут быть получены вероятностные, частотные и временные характеристики подмножеств состояний, которые являются промежуточными характеристиками. В соответствии с назначением и спецификой моделируемой системы промежуточные характеристики переводятся в выходные характеристики функционирования системы, имеющие инженерно-технический смысл. В качестве примера можно привести разработку аналитической модели функционирования линии связи, на основе которой вычисляется коэффициент технического использования, стационарный коэффициент готовности, средняя продолжительность работоспособных и неработоспособных состояний, приходящаяся на одно восстановление и др. [7].

Операции по реализации предложенного метода выполняются с применением матриц. Эти операции как в аналитическом, так и в числовом виде могут быть выполнены с помощью современных инструментальных средств компьютерного моделирования, таких как Mathcad или Mathlab.

Изложенный метод может также найти применение в алгоритмическом (аналитическом) моделировании сложных систем [2, 4], когда соответствие между исходными и выходными характеристиками системы устанавливается в числовом виде. Применение метода в таком моделировании усложняется в связи с увеличением числа элементов системы, усложнением связности элементов, увеличением числа состояний системы и в связи с другими факторами. Такая проблема возникает при использовании любых средств компьютерного моделирования. При достижении определенного высокого уровня сложности возникают трудности в реализации метода. Эти трудности приводят к постановке и решению специфических задач, связанных с реализацией метода. В данной статье эти задачи не рассматриваются.

Литература

1. *Беляев Ю. К.* и др. Надежность технических систем. Справочник. М.: Радио и связь, 1985. 608 с.
2. *Замятина О. М.* Моделирование систем. Томск: Изд-во ТПУ, 2009. 204 с.
3. *Зейфман А. И., Бенинг В. Е., Соколов И. А.* Марковские цепи и модели с непрерывным временем. М.: Элекс-КМ, 2008. 167 с.
4. *Зеленцов Б. П.* Аналитическое моделирование сложных вероятностных систем // Моделирование информационных сетей: Тр. / Вычислительный центр СО РАН. Серия: Информатика. Новосибирск, 1994. Вып. 1. С. 143–152.
5. *Зеленцов Б. П.* Матричные модели надежности систем: инженерные методы расчета. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1991. 112 с.
6. *Зеленцов Б. П.* Матричные модели функционирования оборудования систем связи // Вестник СибГУТИ. 2015. № 4.
7. *Зеленцов Б. П., Максимов В. П., Шувалов В. П.* Модель функционирования линии связи в условиях недостоверного контроля технического состояния // Вестник СибГУТИ. 2015. № 3.
8. *Кельберт М. Я., Сухов Ю. М.* Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. II: Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов. М.: МЦНМО, 2010. 560 с.
9. *Маталыций М. А. Хацкевич Г. А.* Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы. Минск: Вышэйшая школа, 2012. 720 с.
10. *Ушаков И. А.* Курс теории надежности систем. М.: Дрофа, 2008. 239 с.
11. *Федоткин М. А.* Модели в теории вероятностей. М.: Физматлит, 2012. 608 с.
12. *Anderson W. J.* Continuous-time Markov Chains: An application oriented approach. New York: Springer Verlag, 1991.
13. *Knill O.* Probability and Stochastic Processes with Applications. Overseas Press, India Private Limited, 2009.
14. *Norris J. R.* Markov Chains. Cambridge University Press, 1998.

Статья поступила в редакцию 17.11.2015;
переработанный вариант – 15.03.2016.

Зеленцов Борис Павлович
д.т.н., профессор кафедры высшей математики СибГУТИ, e-mail: zelentsovb@mail.ru.

Frequency method for long functioning stochastic systems modeling

B. P. Zelentsov

The method is based on the theory of discrete-time Markov processes and continuous-time Markov processes. For these processes, mean frequencies of states, transition frequencies between states and between subsets of states are obtained. Using these frequencies, a lot of properties with respect to functioning and reliability can be investigated, e.g. mean time of being in a subset of states. Discrete and continuous time stochastic processes are considered simultaneously using matrix methods for mathematical operations.

Keywords: discrete-time Markov process, continuous-time Markov process, mean frequency of state, transition frequencies between states, transition frequencies between subsets of states.