

Метод относительных частот моделирования вероятностных систем

Б. П. Зеленцов

Разработан метод моделирования вероятностной системы, основанный на описании случайного процесса переходов между состояниями с помощью полумарковского процесса. Метод основан на преобразованиях матриц и позволяет вычислять относительные частоты состояний, отнесенные к определенному подмножеству состояний. Метод может быть применен в инженерной практике для нахождения ряда обобщенных характеристик системы в стационарном и нестационарном режиме, таких как, например, вероятность и средняя продолжительность нахождения в подмножестве состояний.

Ключевые слова: полумарковский процесс, матрица средних относительных частот состояний на подмножестве состояний, среднее число шагов нахождения в подмножестве состояний для процесса в дискретном времени, среднее время нахождения в подмножестве состояний для процесса в непрерывном времени.

1. Введение

Одной из проблем теории сложных систем является разработка таких методов их исследования, которые пригодны для теоретического и экспериментального изучения свойств этих систем. Моделирование – наиболее распространенный и перспективный метод изучения сложных систем, позволяющий облегчить исследование на этапе проектирования, определить необходимую или оптимальную структуру системы и правильно интерпретировать данные, полученные в процессе эксплуатации.

При моделировании сложных систем зачастую встает задача вычисления вероятностных характеристик подмножеств состояний, таких как вероятность нахождения в подмножестве состояний после попадания в него, средняя продолжительность нахождения в подмножестве состояний, частота вхождения в определенные состояния, периодичность и частоты различных состояний и подмножеств состояний, а также различные инженерно-технические показатели, основанные на этих характеристиках.

Основой метода являются вероятности прохождений, вычисленные с помощью полумарковских процессов. Вероятности прохождений позволяют объединить процессы в дискретном и непрерывном времени. Вводится понятие относительной частоты состояния на подмножестве несущественных состояний, которая определяется как среднее число вхождений в состояние системы, отнесенное к пребыванию системы в этом подмножестве. Метод пригоден для вычисления средней продолжительности нахождения в подмножестве состояний и других характеристик, основанных на этом показателе.

Метод относительных частот может быть применен для описания функционирования систем длительного использования как в стационарном, так и в нестационарном режиме. В частности, метод пригоден для моделирования функционирования оборудования коммутационных узлов и станций, при описании которых преобладают вероятностные закономерности.

При моделировании таких систем следует учитывать десятки различных факторов, таких как вид и способ осуществления контроля технического состояния оборудования, охват оборудования непрерывным контролем, регулярность периодического контроля, недостоверность контроля, которая проявляется в ошибках контроля, совмещение контроля с функционированием оборудования и др. [1].

2. Постановка задачи

Метод относительных частот рассматривается на примере дискретного однородного марковского процесса как в дискретном, так и в непрерывном времени, который протекает на эргодическом множестве состояний W [7]. Эволюционирование исследуемой системы заключается в случайных переходах от состояния к состоянию на этом множестве состояний.

Основой метода являются случайные события, заключающиеся в смене состояний. Случайным событием в данной модели является попадание из одного состояния в другое при условии, что происходит выход из первого состояния. Вероятность такого события названа вероятностью прохождения. Вероятность прохождения $\hat{p}_{ij}$ – это условная вероятность непосредственного перехода $w_i \rightarrow w_j$ при условии, что происходит выход из состояния w_i , $w_i \in W$, $w_j \in W$. Если непосредственный переход $w_i \rightarrow w_j$ невозможен, то $\hat{p}_{ij} = 0$. Кроме того, $\hat{p}_{ii} = 0$ для всех i . Итак, вероятности $\hat{p}_{ij}$ описывают процесс смены состояний на дискретном множестве W в моменты смены состояний. Вероятности $\hat{p}_{ij}$ описывают полумарковский процесс смены состояний и названы так в отличие от переходных вероятностей марковского процесса в дискретном и непрерывном времени. Вероятности $\hat{p}_{ij}$ называют еще переходными вероятностями вложенной цепи [6].

Полумарковский процесс является более общим понятием по сравнению с марковским процессом в дискретном и непрерывном времени [5, 7]. Отличие полумарковского процесса от марковского процесса в дискретном и непрерывном времени состоит в том, что переходы рассматриваются в моменты смены состояния, а не в дискретные или непрерывные моменты времени. Моменты смены состояний могут быть как случайными, так и детерминированными. В момент перехода $w_i \rightarrow w_j$ «забывается» все прошлое, а дальнейшая эволюция определяется только состоянием в момент перехода. Теория полумарковских процессов известна [6, 8]. Однако применение этой теории разработано недостаточно для исследования процессов, моделирующих процессы в технических системах.

Полумарковский процесс изображают в виде ориентированного графа, вершинами которого являются состояния, а ребрами – переходы между состояниями. Классификация состояний остается такой же, как и для цепей и процессов Маркова. Математические закономерности в данной статье представлены в матричном виде. Используемые матричные модели относятся к численно-аналитическим методам, то есть могут быть применены для численных расчетов и аналитических исследований. Изучение случайных процессов с помощью матричных методов не является новым. В качестве примера можно привести исследования [2, 3, 5]. Интерес к матричным методам обусловлен их преимуществами: компактностью и простотой преобразований, наличием стандартного математического обеспечения.

Пусть на множестве состояний W выделено некоторое подмножество несущественных состояний U . На некотором шаге или в некоторый момент времени процесс входит в подмножество U с начальным состоянием $u_i \in U$ и после пребывания в этом подмножестве покидает его. Средней относительной частотой $\hat{n}_U(i, j)$ состояния u_j на подмножестве U называется математическое ожидание числа попаданий в состояние $u_j \in U$ до выхода из этого под-

множества при условии, что состояние $u_i \in U$ является начальным при вхождении в подмножество U . Вероятности $\hat{p}_{ij}$ сводятся в матрицу вероятностей прохождений $\hat{P} = \|\hat{p}_{ij}\|$, а средние относительные частоты – в матрицу средних относительных частот $\hat{N}_U = \|\hat{n}_U(i, j)\|$.

3. Вероятности прохождений для процесса в дискретном времени

Пусть однородный дискретный процесс протекает в дискретном времени. Каждый дискретный момент будем называть шагом. Исходными характеристиками такого процесса являются следующие вероятности: p_{ij} – вероятность перехода $w_i \rightarrow w_j$ на одном шаге, $i \neq j$ (точнее: p_{ij} – условная вероятность перехода $w_i \rightarrow w_j$ на одном шаге при условии, что на предыдущем шаге процесс находился в состоянии w_i); p_{ii} – вероятность того, что в течение одного шага выхода из состояния w_i не произойдет. Эти вероятности представлены в виде стохастической матрицы переходных вероятностей в дискретном времени $P = \|p_{ij}\|$.

Введем обозначения:

$q_{ii}(n)$ – вероятность того, что в течение n шагов выхода из состояния w_i не будет;

$q_{ij}(n)$ – вероятность того, что переход $w_i \rightarrow w_j$ произойдет на n -м шаге;

$p_{ij}(n)$ – вероятность того, что в течение n шагов произойдет переход $w_i \rightarrow w_j$.

Очевидны начальные условия при рассмотрении перехода $w_i \rightarrow w_j$: $q_{ii}(0) = 1$; $p_{ij}(0) = 0$ для $i \neq j$. Очевидно также, что для однородного процесса $q_{ii}(n) = p_{ii}^n$.

Приведем уравнения равновесия в дискретном времени. Переход $w_i \rightarrow w_j$ может произойти на первом, втором, третьем и т.д. шаге, то есть $q_{ij}(n) = q_{ij}(n-1) \cdot p_{ij}$. Отсюда вероятность перехода $w_i \rightarrow w_j$ на n -м шаге будет

$$q_{ij}(n) = p_{ii}^{n-1} \cdot p_{ij}, \quad (1)$$

а вероятность перехода за n шагов:

$$p_{ij}(n) = \sum_{k=1}^n q_{ij}(k) = \frac{1 - p_{ii}^n}{1 - p_{ii}} p_{ij}. \quad (2)$$

Видно, что вероятность $p_{ij}(n)$ является переменной величиной, она состоит из двух множителей: постоянного множителя $p_{ij}/(1 - p_{ii})$ и переменного множителя $1 - p_{ii}^n$.

Вероятностью прохождения будем называть предел вероятности $p_{ij}(n)$:

$$\hat{p}_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = \frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}}, \quad i \neq j; \quad \hat{p}_{ii} = 0. \quad (3)$$

Матрица вероятностей прохождений $\hat{P}$ на множестве W в дискретном времени, выраженная через матрицу переходных вероятностей P , может быть вычислена по следующим формулам:

$$\hat{P} = (E - P_{dg})^{-1} \cdot (P - P_{dg}) = (P - P_{dg}) \cdot (E - P_{dg})^{-1}, \quad (4)$$

где E – единичная матрица; P_{dg} – матрица переходных вероятностей в дискретном времени, в которой оставлены диагональные элементы, а остальные элементы равны нулю.

4. Вероятности проходов для процесса в непрерывном времени

Рассмотрим переходы между состояниями в непрерывном времени. Исходными характеристиками такого процесса являются интенсивности переходов: λ_{ij} , $i \neq j$ – интенсивность перехода $w_i \rightarrow w_j$; $\lambda_{ii} = - \sum_{w_j \in W, j \neq i} \lambda_{ij}$ – сумма интенсивностей переходов из состояния w_i в

другие состояния, взятая со знаком минус. Эти интенсивности представлены в виде матрицы интенсивностей $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$.

Введем обозначения:

$q_{ii}(t)$ – вероятность того, что в течение времени t выхода из состояния w_i не будет;

$p_{ij}(t)$ – вероятность того, что непосредственный переход $w_i \rightarrow w_j$ произойдет в течение времени t .

Очевидны начальные условия при рассмотрении перехода $w_i \rightarrow w_j$: $q_{ii}(0) = 1$; $p_{ij}(0) = 0$,

$i \neq j$. Пусть непосредственный переход $w_i \rightarrow w_j$ является возможным, то есть интенсивность этого перехода $\lambda_{ij} \neq 0$. Найдем вероятность $p_{ij}(t)$ того, что в течение времени t произойдет непосредственный переход $w_i \rightarrow w_j$ при условии, что состояние w_i является начальным. Рассмотрим переход $w_i \rightarrow w_j$ на интервале времени $[0, t + dt]$. Очевидно: $p_{ij}(t + dt) = p_{ij}(t) + q_{ii}(t) \cdot \lambda_{ij} dt$, так как переход $w_i \rightarrow w_j$ на интервале $[0, t + dt]$ является суммой двух несовместных событий: перехода на интервале $[0, t]$ и перехода на интервале $[t, t + dt]$. Последнее событие является произведением двух событий: на интервале $[0, t]$ переход $w_i \rightarrow w_j$ не произошел, а произошел на интервале $[t, t + dt]$.

Известно, что $q_{ii}(t) = \exp(\lambda_{ii}t)$. Преобразуем полученное уравнение и подставим в него $q_{ii}(t)$:

$$p'_{ij}(t) = \lambda_{ij} \cdot \exp(\lambda_{ii}t), \quad i \neq j. \quad (5)$$

Интегрирование этого уравнения с учетом начального условия приводит к следующему результату:

$$p_{ij}(t) = - \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ii}} \cdot (1 - \exp(\lambda_{ii}t)), \quad i \neq j. \quad (6)$$

Видно, что вероятность $p_{ij}(t)$, $i \neq j$, состоит из двух множителей: постоянного множителя $-\lambda_{ij}/\lambda_{ii}$ и переменного множителя $1 - \exp(\lambda_{ii}t)$, который представляет собой вероятность того, что в течение времени t состояние w_i изменится.

Вероятностью прохождения будем называть предел вероятности $p_{ij}(t)$:

$$\hat{p}_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = -\lambda_{ij}/\lambda_{ii}, \quad i \neq j; \quad \hat{p}_{ii} = 0. \quad (7)$$

Матрица вероятностей проходов $\hat{P}$ связана с матрицей интенсивностей Λ эргодического процесса в непрерывном времени следующими соотношениями:

$$\hat{P} = E - \Lambda_{dg}^{-1} \cdot \Lambda = E - \Lambda \cdot \Lambda_{dg}^{-1}, \quad (8)$$

где E – единичная матрица; Λ_{dg} – матрица, диагональные элементы которой равны соответствующим диагональным элементам матрицы Λ , а остальные элементы равны нулю.

Итак, описан переход от марковского процесса в дискретном и непрерывном времени к полумарковскому процессу, который формально представлен в дискретном времени. Вероятности проходов $w_i \rightarrow w_j$ пропорциональны соответствующим переходным вероятностям p_{ij} и интенсивностям перехода λ_{ij} . Для эргодического марковского процесса матрица вероятностей проходов $\hat{P}$ является стохастической. Эта матрица удовлетворяет следующим условиям: 1) все элементы матрицы неотрицательны; 2) диагональные элементы равны нулю; 3) сумма элементов любой строки равна 1; 4) в каждой строке имеется хотя бы один элемент больше нуля; 5) в каждом столбце имеется хотя бы один элемент больше нуля.

5. Понятие относительной частоты состояния

Пусть U – некоторое подмножество несущественных состояний эргодического множества W . В некоторый момент времени или на некотором шаге система входит в подмножество U с начальным состоянием $u_i \in U$. После некоторого пребывания в этом подмножестве система покидает его.

Исходной матричной характеристикой является матрица вероятностей проходов $\hat{P}_{UU}$ на подмножестве U . Эта матрица может быть сформирована как подматрица матрицы вероятностей проходов для процесса в дискретном времени (4) или для процесса в непрерывном времени (8). Другой путь нахождения матрицы $\hat{P}_{UU}$ – вычисление по формулам, приведенным в табл. 1. Эти формулы получены путем разбиения матриц P , Λ и $\hat{P}$ на блоки и выполнения с ними соответствующих операций. В таблице обозначено: E – единичная матрица соответствующего порядка; P_{UU} – подматрица переходных вероятностей на подмножестве U ; P_{UUdg} – подматрица P_{UU} , в которой оставлены диагональные элементы, а остальные элементы равны нулю; Λ_{UU} – подматрица интенсивностей на подмножестве U ; Λ_{UUdg} – подматрица Λ_{UU} , в которой оставлены соответствующие диагональные элементы, а остальные элементы равны нулю.

До выхода из U система попадает в состояния $u_j \in U$ случайное число раз. Средней относительной частотой $\hat{n}_U(i, j)$ состояния $u_j \in U$ на подмножестве U называется математическое ожидание числа вхождений в состояние $u_j \in U$ до выхода из U при условии, что состояние $u_i \in U$ является начальным. Матрица $\hat{N}_U = \|\hat{n}_U(i, j)\|$ является матрицей средних относительных частот на подмножестве U . Смысл относительной частоты $\hat{n}_U(i, j)$ заключается в том, что она представляет собой среднее число попаданий в состояние u_j до выхода из U при условии, что состояние u_i является начальным.

Формула для вычисления матрицы $\hat{N}_U$ выводится из следующих соображений. До выхода из подмножества U система попадает в каждое состояние $u_j \in U$ случайное число раз. Начальный вклад каждого состояния $u_i \in U$ учитывается единичной матрицей. После первой перемены состояния распределение вероятностей будет $\hat{P}_{UU}$, после второй – $\hat{P}_{UU}^2$ и т.д. Тогда среднее число попаданий в состояния определяется матрицей:

$$\hat{N}_U = E + \hat{P}_{UU} + \hat{P}_{UU}^2 + \hat{P}_{UU}^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{P}_{UU}^n. \quad (9)$$

Очевидно, что

$$\hat{N}_U = (E - \hat{P}_{UU})^{-1}, \quad (10)$$

если $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}_{UU}^n = O$, где O – нулевая матрица. Действительно,

$$(E - \hat{P}_{UU}) \cdot (E + \hat{P}_{UU} + \hat{P}_{UU}^2 + \dots + \hat{P}_{UU}^n) = E - \hat{P}_{UU}^{n+1}. \quad (11)$$

Поскольку U – подмножество несущественных состояний, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{P}_{UU}^{n+1} = O$, что доказывает существование обратной матрицы (10).

Матрица относительных частот $\hat{N}_U$ может быть вычислена по формуле (10) или с использованием соответствующих подматриц для однородного процесса в дискретном времени и для однородного процесса в непрерывном времени (табл. 1).

Если известно начальное распределение $\bar{r}_U$ вероятностей состояний подмножества U , то можно получить строку средних относительных частот состояний подмножества U : $\hat{n}_U =$

$\|\hat{n}_U(j)\| = \bar{r}_U \cdot \hat{N}_U$, где $\hat{n}_U(j)$ – средняя относительная частота состояния u_j при заданном начальном распределении или математическое ожидание числа вхождений (попаданий) в состояние u_j до выхода из U при заданном начальном распределении.

Замечания.

1. Матрица $N_U = (E - P_{UU})^{-1}$ для однородного процесса в дискретном времени была названа фундаментальной матрицей подмножества U из-за её фундаментального значения в теории цепей Маркова [5]. Однако эта матрица имеет другой смысл по сравнению с матрицей $\hat{N}_U$, рассматриваемой в настоящей статье.

2. Задача получения распределения начальных вероятностей состояний подмножества U , $\bar{r}_U$ здесь не рассматривается. Получение этого распределения для систем длительного использования приведено в [3].

6. Средняя продолжительность нахождения в подмножестве состояний

Как отмечалось ранее, вероятности проходов не содержат информации о продолжительности нахождения в состояниях. Если такая информация необходима, то её задают совместно с вероятностями проходов. Наиболее просто продолжительности состояний можно задавать средними значениями продолжительности нахождения в состояниях после попадания в них для однородного процесса в дискретном или непрерывном времени.

Рассмотрим сначала процесс в дискретном времени. Обозначим через $n_U(i, j)$ среднее число шагов нахождения в состоянии $u_j \in U$ до выхода системы из подмножества U при условии, что состояние $u_i \in U$ является начальным. Очевидно, что этот параметр определяется относительной частотой состояния u_j и средним числом шагов m_{ji} нахождения в этом состоянии при однократном попадании в него:

$$n_U(i, j) = \hat{n}_U(i, j) \cdot m_{ji}, \quad (12)$$

где $m_{ji} = 1/(1 - p_{jj})$ [3].

При заданном начальном распределении $\bar{r}_U$ строка средних чисел шагов нахождения в состояниях подмножества U имеет вид:

$$\bar{n}_U = \|n_U(j)\| = \hat{n}_U \cdot M_U = \bar{r}_U \cdot \hat{N}_U \cdot M_U, \quad (13)$$

где $n_U(j)$ – среднее число шагов нахождения в состоянии $u_j \in U$ при заданном начальном распределении $\bar{r}_U$; M_U – матрица среднего числа шагов нахождения в состояниях подмножества U при однократном попадании в них.

Среднее число шагов нахождения в подмножестве U определяется суммированием элементов $n_U(i, j)$ по всем состояниям подмножества U :

$$n_U = \bar{n}_U \cdot \dot{e}, \quad (14)$$

где $\dot{e}$ – столбец, все элементы которого равны 1.

Для процесса в непрерывном времени аналогичной характеристикой является $t_U(i, j)$ – среднее время нахождения в состоянии u_j до выхода системы из подмножества U при условии, что состояние u_i является начальным. Очевидно, что это время определяется средней относительной частотой состояния u_j и средним временем нахождения в этом состоянии θ_{ji} при однократном попадании в него

$$t_U(i, j) = \hat{n}_U(i, j) \cdot \theta_{ji}. \quad (15)$$

Если полумарковский процесс сформирован на основе однородного марковского процесса, то среднее время нахождения в состоянии w_j при однократном попадании в него выража-

ется через параметр λ_{jj} , поскольку случайное время нахождения в одном состоянии распределено по показательному закону: $\theta_{jj} = -1/\lambda_{jj}$.

Строка средних времен нахождения в состояниях подмножества U до выхода из U при заданном начальном распределении $\bar{r}_U$ вычисляется по формуле:

$$\bar{t}_U = \| t_U(j) \| = \hat{n}_U \cdot \Theta_U = \bar{r}_U \cdot \hat{N}_U \cdot \Theta_U, \quad (16)$$

где $t_U(j)$ – среднее время нахождения в состоянии $u_j \in U$ при заданном начальном распределении $\bar{r}_U$; Θ_U – матрица средних времён нахождения в состояниях подмножества U при однократном попадании в них.

Среднее время нахождения в подмножестве U до выхода из него определяется суммированием времен $t_U(j)$ по всем $u_j \in U$:

$$t_U = \sum_{u_j \in U} t_U(j) = \bar{t}_U \cdot \vec{e}. \quad (17)$$

7. Характеристики подмножества несущественных состояний

Характеристики подмножества несущественных состояний для процесса в дискретном и непрерывном времени сведены в табл. 1. В таблице приведены следующие характеристики подмножества несущественных состояний U :

- матрица вероятностей проходов на подмножестве U ;
- матрица средних относительных частот на подмножестве U , которая может быть вычислена напрямую по матрице вероятностей проходов или по исходным матрицам для процесса в дискретном времени и для процесса в непрерывном времени;
- строка средних относительных частот состояний на подмножестве U при заданном начальном распределении;
- строка среднего числа шагов и среднего времени нахождения в состояниях подмножества U при заданном начальном распределении;
- среднее число шагов и среднее время нахождения в подмножестве U при заданном начальном распределении.

Таблица 1. Характеристики подмножества несущественных состояний U

Матричная характеристика	Обозначения и формулы для однородного процесса	
	в дискретном времени	в непрерывном времени
1. Матрица вероятностей проходов на подмножестве U	$\hat{P}_{UU} = (P_{UU} - P_{UUdg}) \cdot (E - P_{UUdg})^{-1} =$ $= (E - P_{UUdg})^{-1} \cdot (P_{UU} - P_{UUdg}) =$	$\hat{P}_{UU} = E - \Lambda_{UUdg}^{-1} \cdot \Lambda_{UU} =$ $= E - \Lambda_{UU} \cdot \Lambda_{UUdg}^{-1}$
2. Матрица средних относительных частот на подмножестве U	$\hat{N}_U = (E - \hat{P}_{UU})^{-1}$	
3. Вычисление матрицы средних относительных частот через исходные характеристики	$\hat{N}_U = (E - P_{UU})^{-1} \cdot (E - P_{UUdg}) =$ $= (E - P_{UUdg}) \cdot (E - P_{UU})^{-1}$	$\hat{N}_U = \Lambda_{UU}^{-1} \cdot \Lambda_{UUdg} =$ $= \Lambda_{UUdg} \cdot \Lambda_{UU}^{-1}$
4. Строка средних относительных частот состояний на подмножестве U с учетом начального распределения	$\hat{n}_U = \bar{r}_U \cdot \hat{N}_U$	
5. Строка средней продолжительности состояний подмножества U с учетом начального распределения	$\bar{n}_U = \hat{n}_U \cdot M_U$	$\bar{t}_U = \hat{n}_U \cdot \Theta_U$
6. Средняя продолжительность нахождения процесса в подмножестве U до выхода из U	$n_U = \bar{n}_U \cdot \dot{e}$	$t_U = \bar{t}_U \cdot \dot{e}$

Итак, суть метода относительных частот сводится к следующему.

1. Формируется матрица вероятностей проходов на множестве состояний.

2. По некоторому признаку на эргодическом множестве состояний выделяется подмножество несущественных состояний и формируется матрица вероятностей проходов на этом подмножестве.

3. Вычисляется матрица относительных частот этого подмножества, каждый элемент которой является математическим ожиданием числа вхождений (попаданий) в каждое состояние до выхода из этого подмножества при условии, что любое другое состояние является начальным при вхождении в это подмножество. Эти математические ожидания названы относительными частотами состояний.

4. Вычисляются относительные частоты состояний выделенного подмножества с учетом начального распределения вероятностей состояний. Задача нахождения начального распределения здесь не рассматривается.

5. Вычисляются средние числа шагов нахождения в состояниях для процесса в дискретном времени и средние времена нахождения в состояниях для процесса в непрерывном времени.

6. Суммирование этих характеристик по всем состояниям подмножества приводит к конечному результату: среднему числу шагов нахождения в подмножестве состояний для процесса в дискретном времени и среднему времени нахождения в подмножестве состояний для процесса в непрерывном времени.

Метод относительных частот может найти применение в исследованиях свойств технических систем при их проектировании и совершенствовании. Следует отметить, что основой метода являются средние продолжительности состояний и подмножеств состояний для процессов в дискретном и непрерывном времени. Приведенный пример иллюстрирует это положение.

Рассмотренный метод может также оказаться полезным при сборе и обработке статистических данных, полученных в результате испытаний или наблюдений при эксплуатации систем. Существенной информацией при этом являются числа фиксируемых событий за время

наблюдения, которые могут быть статистическим аналогом соответствующих относительных частот состояний. Метод позволяет применить этот статистический материал при моделировании функционирования реальных систем.

8. Пример

Рассмотрим простой иллюстративный пример применения метода относительных частот. В основу примера положена модель функционирования линии связи в условиях недоверного контроля технического состояния, изложенная в [4]. С течением времени линия связи проходит три фазы эксплуатации: использование по назначению, периодические проверки и восстановление. Функционирование линии связи представлено пятью состояниями: Р и Н – работоспособное и неработоспособное состояния линии соответственно; ПР и ПН – периодические проверки линии, находящейся в работоспособном и неработоспособном состоянии соответственно; В – восстановление линии. Граф состояний приведен на рис. 1.

Рассматриваемый вариант имеет следующие особенности:

1. В работоспособном состоянии Р может произойти скрытый отказ с интенсивностью λ , в результате чего происходит переход в неработоспособное состояние Н.
2. Периодические проверки проводятся с постоянным периодом τ , который отсчитывается от начала состояния Р.
3. Линия связи функционирует в условиях недоверного периодического контроля: имеются ошибки контроля I рода с вероятностью α и ошибки контроля II рода с вероятностью β .
4. Время проверки является пренебрежимо малым по сравнению с периодом τ , средним временем безотказной работы и средним временем восстановления, то есть фактически имеет место отражение от состояний ПР и ПН с учетом ошибок контроля.
5. Время восстановления работоспособности распределено по показательному закону с интенсивностью μ ; восстановление завершается переходом в работоспособное состояние.

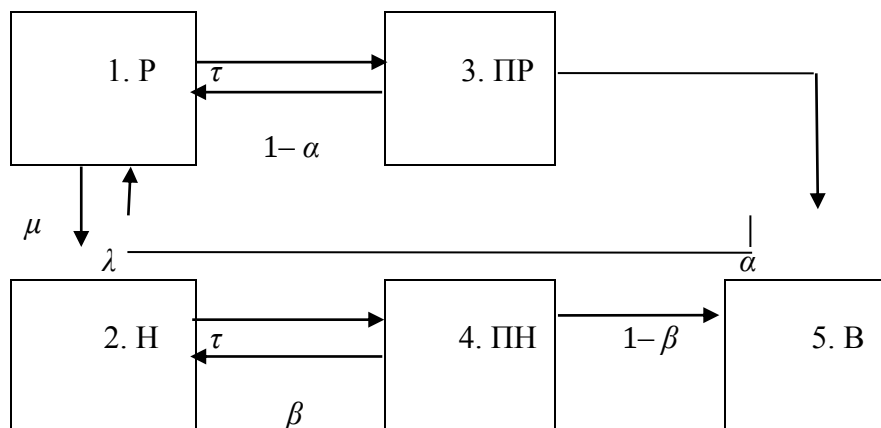


Рис 1. Граф состояний линии связи

Итак, по сравнению с моделью [4] приведен упрощенный вариант: явные отказы отсутствуют, восстановление после отказа является идеальным (брак восстановления отсутствует), контроль работоспособности только периодический. Однако данная модель усложнена за счет периодического контроля с постоянным периодом. Ввиду этого особенностью данного примера является то обстоятельство, что процесс функционирования моделируемой системы протекает как в дискретном, так и в непрерывном времени: переходы Р→ПР и Р→ПН проис-

ходят в дискретном времени (в конце постоянного периода контроля), а переходы $P \rightarrow H$ и $V \rightarrow P$ происходят в непрерывном времени. Поэтому процесс функционирования системы не является строго в дискретном или непрерывном времени. Данная модель реализуется приведенным методом относительных частот.

Рассмотрим случайный процесс на интервале времени $[0, \tau]$. Момент времени $t = 0$ является началом отсчета времени после завершения восстановления и начала работоспособного состояния, а $t = \tau$ – момент начала периодической проверки. Вероятности проходов из состояний P и H являются вероятностями этих состояний в момент времени $t = \tau$. Из графа состояний следует, что начальным состоянием на этом интервале могут быть состояния P или H . Составим систему дифференциальных уравнений на интервале $[0, \tau]$ при условии, что состояние P является начальным:

$$p'_{11}(t) = -\lambda \cdot p_{11}(t); \quad p'_{12}(t) = \lambda \cdot p_{11}(t); \quad p_{11}(0) = 1.$$

Решение этой системы уравнений:

$$p_{11}(t) = \exp(-\lambda \cdot t); \quad p_{12}(t) = 1 - \exp(-\lambda \cdot t).$$

Переходы из состояния P в состояния периодической проверки происходят в момент времени $t = \tau$. Поэтому вероятности проходов

$$\hat{p}_{13} = p_{11}(\tau) = \exp(-\lambda \cdot \tau); \quad \hat{p}_{14} = p_{12}(\tau) = 1 - \exp(-\lambda \cdot \tau).$$

Если состояние H является начальным, то оно продолжается в течение времени τ и переход в состояние PH происходит с вероятностью 1.

Матрица вероятностей проходов на всем множестве состояний при оговоренных условиях имеет вид:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \hat{p}_{13} & \hat{p}_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1-\alpha & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 1-\beta \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ограничимся двумя показателями: коэффициентом технического использования и средним числом проверок, приходящимся на одно восстановление.

Примечание. Среднее число проверок, приходящееся на одно восстановление, поддается прямому оцениванию по результатам наблюдений за эксплуатацией оборудования. Полученные статистические данные могут быть использованы для формирования математической модели с реальными исходными характеристиками.

Средняя продолжительность состояний P и H при однократном попадании в состояние 1:

$$\theta_{11} = \int_0^{\tau} p_{11}(t) dt = \frac{1 - \exp(-\lambda \cdot \tau)}{\lambda}; \quad \theta_{12} = \int_0^{\tau} p_{12}(t) dt = \tau - \frac{1 - \exp(-\lambda \cdot \tau)}{\lambda}.$$

Если состояние H является начальным, то продолжительность этого состояния составит $\theta_{22} = \tau$.

Выделим подмножество состояний $U = \{1, 2, 3, 4\}$ и сформируем матрицы $\hat{P}_{UU}$ путем удаления 5-й строки и 5-го столбца из матриц $\hat{P}$:

$$\hat{P}_{UU} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \hat{p}_{13} & \hat{p}_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1-\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица относительных частот подмножества U , $\hat{N}_U = (E - \hat{P}_{UU})^{-1}$ полностью не приводится. Поскольку состояние P всегда является начальным при вхождении в подмножество U , то приводится только первая строка матрицы $\hat{N}_U$:

$$\hat{n}_U = \|\hat{n}_U(1, j)\| = \frac{1}{1 - (1 - \alpha) \cdot \hat{p}_{13}} = \left\| 1 \quad \frac{\beta \cdot (1 - \hat{p}_{13})}{1 - \beta} \quad \hat{p}_{13} \quad \frac{1 - \hat{p}_{13}}{1 - \beta} \right\|.$$

Средние времена нахождения в состояниях подмножества U на одном цикле, то есть до восстановления, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} t_U(1, 1) &= \hat{n}_U(1, 1) \cdot \theta_{11} = \frac{\theta_{11}}{1 - (1 - \alpha) \cdot \hat{p}_{13}}; \\ t_U(1, 2) &= \hat{n}_U(1, 1) \cdot \theta_{12} + \hat{n}_U(1, 2) \cdot \theta_{22} = \frac{1}{1 - (1 - \alpha) \cdot \hat{p}_{13}} \cdot \left(\frac{1 - \beta \cdot \hat{p}_{13}}{1 - \beta} \cdot \tau - \theta_{11} \right); \\ t_U(1, 3) &= 0; \quad t_U(1, 4) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, строка средних времен нахождения в состояниях:

$$\bar{t}_U = \|t_U(1, j)\| = \frac{1}{1 - (1 - \alpha) \cdot \hat{p}_{13}} \cdot \left\| \theta_{11} \quad \frac{1 - \beta \cdot \hat{p}_{13}}{1 - \beta} \cdot \tau - \theta_{11} \quad 0 \quad 0 \right\|.$$

Среднее время цикла складывается из средних времён нахождения в состояниях 1, 2, 5:

$$t_{\bar{0}} = t_U(1, 1) + t_U(1, 2) + t_5 = \frac{(1 - \beta \cdot \hat{p}_{13}) \cdot \tau}{(1 - \beta) \cdot [1 - (1 - \alpha) \cdot \hat{p}_{13}]} + \frac{1}{\mu},$$

где $t_5 = 1/\mu$.

Коэффициент технического использования

$$K_{\text{ти}} = \frac{t_U(1, 1)}{t_{\bar{0}}} = \frac{(1 - \beta) \cdot \theta_{11} \cdot \mu}{(1 - \beta \cdot \hat{p}_{13}) \cdot \tau \cdot \mu + (1 - \beta) \cdot [1 - (1 - \alpha) \cdot \hat{p}_{13}] }.$$

Среднее число проверок на одно восстановление:

$$n_{\text{пр}} = \hat{n}_U(1, j) + \hat{n}_U(1, j) = \frac{1 - \beta \cdot \hat{p}_{13}}{(1 - \beta) \cdot [1 - (1 - \alpha) \cdot \hat{p}_{13}]}.$$

Присвоим исходным характеристикам следующие значения: $\lambda = 10^{-4}$ 1/час, $\tau = 0.02$ час, $\mu = 2$ 1/час. В табл. 2 и 3 приведены значения коэффициента технического использования и среднего числа проверок на одно восстановление в зависимости от вероятностей ошибок контроля I и II рода при указанных значениях исходных характеристик. Видно, что эти показатели существенно зависят от вероятности ошибок контроля I рода и практически не зависят от вероятности ошибок контроля II рода.

Таблица 2. Значения коэффициента технического использования в зависимости от вероятностей ошибок контроля α и β при указанных значениях исходных характеристик

$\alpha \backslash \beta$	0	0.001	0.01	0.1
0	0.99995	0.99995	0.99995	0.99995
0.001	0.976	0.976	0.976	0.976
0.01	0.800	0.800	0.800	0.800
0.1	0.286	0.286	0.286	0.286

Таблица 3. Зависимость среднего числа проверок на одно восстановление в зависимости от вероятностей ошибок контроля α и β при указанных значениях исходных характеристик

$\alpha \backslash \beta$	0	0.001	0.01	0.1
0	$5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$
0.001	998	998	998	998
0.01	100	100	100	100
0.1	10	10	10	10

Заключение

В статье приведён метод исследования вероятностной системы, основанный на описании случайного процесса переходов между состояниями с помощью полумарковского процесса. Метод разработан для однородного эргодического процесса в дискретном времени и для процесса в непрерывном времени. Основой модели является матрица вероятностей проходов и матрица относительных частот состояний на некотором подмножестве состояний. По матрицам относительных частот подмножеств состояний могут быть найдены характеристики системы, используемые при проектировании и эксплуатации систем. Реализация метода базируется на преобразованиях числовых и функциональных матриц.

Приведённый метод может быть положен в основу моделирования широкого класса технических систем. Если процесс не является однородным или в некоторых состояниях процесс протекает с постоянной или ограниченной продолжительностью, или распределение времени до наступления случайных событий отличается от показательного, то метод несколько усложняется, требуется исследование дополнительных факторов.

Можно отметить применение метода относительных частот при наблюдении и сборе статистических сведений об эксплуатационных характеристиках систем. Наиболее простой подход – это фиксирование числа событий за время наблюдения, при этом событие – это прохождение через состояние.

Литература

1. Голомиток Л. В., Зеленцов Б. П., Сметанин Л. Д., Суторихин Н. Б. Влияние контроля на надежность коммутационных станций // Электросвязь. 1984. № 6. С. 6–8.
2. Зеленцов Б. П. Матричные модели надежности систем: инженерные методы расчета. Новосибирск: Наука, 1991. 112 с.
3. Зеленцов Б. П. Матричные модели функционирования оборудования систем связи // Вестник СибГУТИ. 2015. № 4.
4. Зеленцов Б. П., Максимов В. П., Шувалов В. П. Модель функционирования линии связи в условиях недостоверного контроля технического состояния // Вестник СибГУТИ. 2015. № 3.
5. Кемени Д., Снелл Д. Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970. 272 с.
6. Королюк В. С., Турбин А. Ф. Полумарковские процессы и их приложения. Киев: Наукова думка, 1976.
7. Миллер Б. М., Панков А. Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2002. 320 с.
8. Сильвестров Д. С. Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний. М.: Сов. радио, 1980. 272 с.

*Статья поступила в редакцию 18.10.2016;
переработанный вариант – 20.01.2017*

Зеленцов Борис Павлович

д.т.н., профессор кафедры высшей математики СибГУТИ (630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86), e-mail: zelentsovb@mail.ru.

Method of relative frequencies for probabilistic systems modeling

B. P. Zelentsov

In this paper, a method of probabilistic systems modeling is developed. The method is based on transition probabilities between states via semimarkov process. Mean relative frequencies of states classified as states subsets are calculated by operations with numerical and functional matrices. The method can be applied for systems investigation to find system characteristics such as probability and mean time of being in a subset of states etc.

Keywords: semimarkov process, matrix of relative frequencies of states, mean number of steps being in a subset of states for process in discrete time, mean time of being in a subset of states for process in continuous time.