

Укрупнение состояний сложных систем, моделируемых марковскими процессами

Б. П. Зеленцов

Излагается метод укрупнения состояний системы, эволюционирование которой описывается однородным марковским процессом в дискретном или непрерывном времени. В соответствии с излагаемым методом система с данным множеством состояний приводится к множеству с меньшим числом состояний путём введения так называемых граничных состояний подмножеств. Переходы между состояниями на исходном множестве заменяются на переходы между граничными состояниями. Метод позволяет оперировать с матрицами меньших размеров. Информация об исходном множестве состояний «упаковывается» в систему с меньшим числом состояний с сохранением средней продолжительности нахождения в подмножествах состояний. Приведённый метод является одним из путей преодоления трудностей, связанных с моделированием систем большой размерности.

Ключевые слова: однородный марковский процесс в дискретном и непрерывном времени, укрупнение состояний, граничные состояния подмножеств.

1. Введение

Сложные технические и организационные системы характеризуются многоцелевым назначением, структурной, функциональной, временной и информационной избыточностью, стохастичностью связей между элементами, неоднозначностью поведения при различных условиях, разнообразием и вероятностным характером воздействий внешней среды, неполнотой исходной информации. Особо следует отметить наличие случайных факторов, ввиду чего вероятностные закономерности являются преобладающими при их функционировании. Поэтому сложные системы обычно относят к классу вероятностных систем. Сложные системы состоят, как правило, из большого числа элементов различного назначения и описываются большим числом состояний. В частности, к сложным системам длительного использования относятся телекоммуникационные системы и их оборудование.

Математическое моделирование функционирования сложных систем является наиболее распространённым методом их исследования. Одной из проблем в этой области является увеличение размерности систем, которое выражается в увеличении числа состояний системы. Увеличение числа состояний вызывает естественные трудности на всех этапах реализации модели: при формировании множества состояний системы и исходных характеристик системы, необходимости оперирования с характеристиками большой размерности. В аналитических моделях систем большой размерности возрастает трудоёмкость получения формул, а сами формулы настолько сложны, что их применение в инженерных расчетах практически не оправдано. Зачастую большое число состояний является существенным препятствием при моделировании функционирования систем. В этом случае переходят к алгоритмическому (аналитическому) и имитационному моделированию [1, 3, 14]. Эти обстоятельства определяют актуальность проблемы уменьшения размерности моделей систем.

Одним из основных путей преодоления трудностей, связанных с большой размерностью сложных систем, является укрупнение состояний, при котором система с данным числом состояний заменяется системой с меньшим числом состояний. Проблема укрупнения – это проблема преобразования первоначальной системы в систему с меньшим числом состояний, изучение которой с точки зрения получения выходных характеристик не приводит к существенной потере информации и искажению результатов моделирования. В связи с этим важное значение имеет разработка новых подходов к укрупнению состояний и развитие известных методов укрупнения состояний, а также доведение математически обоснованных методов до инженерной практики.

В данной статье разработан метод укрупнения, в соответствии с которым система с данным числом состояний приводится к системе с меньшим числом состояний, при этом информация об исходном множестве состояний определенным образом упаковывается в систему с меньшим числом состояний с сохранением определенных выходных характеристик системы.

2. Краткий обзор подходов к проблеме укрупнения состояний

В литературе предложены разные подходы к проблеме уменьшения числа состояний дискретного процесса. Можно отметить следующие признаки классификации подходов и методов укрупнения состояний:

- по механизму уменьшения числа состояний: «склеивание» состояний, при котором несколько состояний заменяются на одно, отбрасывание маловероятных состояний, приведение подмножества состояний к входным состояниям этого подмножества и иные подходы, при которых n состояний заменяются на m состояний, $m < n$;

- по совокупности сохраняемых выходных характеристик системы: сохраняются все выходные характеристики системы или сохраняется определенная совокупность этих характеристик;

- по точности сохраняемых характеристик: выходные характеристики укрупненной системы сохраняют точные значения или эти характеристики сохраняются приближенно; в последнем случае укрупнение может быть с оценкой погрешности или без нее;

- по возможности применения метода укрупнения при моделировании технических и организационных систем.

Такие, казалось бы, естественные способы уменьшения числа состояний, как произвольное объединение нескольких состояний в одно укрупнённое, произвольное объединение нескольких элементов системы в один укрупнённый элемент, сокращение числа состояний за счет отбрасывания маловероятных состояний, произвольное разбиение множества состояний на подмножества могут привести к значительной погрешности выходных характеристик системы. Эти подходы зачастую не имеют математического обоснования [16].

Позиция автора заключается в том, что уменьшение числа состояний не должно приводить к потере точности выходных характеристик системы. Если же вычисляются приближенные значения этих характеристик, то это обязательно должно сопровождаться оценкой погрешности. Поэтому предложения по укрупнению состояний, даже отличающиеся очевидностью и простотой, требуют оценки погрешности. Всё это усложняет математическую модель. В работе [13] рассмотрены условия существования так называемого «нулевого приближения» по схеме укрупнения [9]. Однако оценка погрешности здесь не производится и критерий «слабых связей» не обоснован. В работе [15] отмечено, что укрупнение состояний может быть точным (эквивалентным) или приближенным (квазиэквивалентным). Исследованы условия, при которых приближённые значения вероятностей укрупнённых состояний стремятся к точным значениям, однако оценка погрешности не производится.

В работах [10, 12] предложен метод декомпозиции, в соответствии с которым система разбивается на части таким образом, что она может быть представлена в виде последовательно соединенных частей. Метод декомпозиции применим при разбиении системы на независимые части (подсистемы). Исследованы условия декомпозиции. Если же подсистемы зависимы, то метод может привести к существенной погрешности при вычислении выходных характеристик системы. Декомпозицию можно рассматривать как метод диакоптики.

Математически обоснованные достаточные условия укрупнения марковской цепи [2, 9] заключаются в том, что множество состояний системы разбивается на подмножества, а матрица переходных вероятностей представляется в виде соответствующей блочной (клеточной) матрицы. Если сумма элементов каждой строки блока не зависит от номера строки этого блока, то такое множество состояний является укрупняемым: каждое подмножество может быть заменено одним состоянием. Сумма элементов строки блока является переходной вероятностью новой, укрупнённой цепи. Аналогичные достаточные условия сформулированы для марковского процесса в непрерывном времени, где в качестве характеристики переходов между состояниями используются интенсивности переходов [8, 10]. Сформулированные достаточные условия укрупняемости марковской цепи и марковского процесса обеспечивают «склеивание» состояний каждого подмножества и позволяют сохранить точные значения предельных вероятностей состояний укрупнённой системы, при этом предельная вероятность нового, укрупнённого состояния получается суммированием предельных вероятностей состояний соответствующих укрупняемых состояний исходного процесса. Однако практическое применение сформулированных достаточных условий укрупняемости затрудняется тем, что эта идея не доведена до метода, пригодного для применения в инженерной практике. В частности, не исследован вопрос о совокупности сохраняемых выходных характеристик системы.

Разработаны принципы фазового укрупнения, сущность которого заключается в том, что фазовое пространство исходной системы расщепляется на конечное число непересекающихся классов. Состояния каждого класса «склеиваются» в одно состояние, а вероятности исходных состояний суммируются. В новом, укрупнённом фазовом пространстве строится укрупнённая система [11]. Данный подход основан на асимптотических методах. Это дает возможность получить приближенные значения выходных характеристик исходной системы.

Разработан метод приведения к входным состояниям, в соответствии с которым система с данным числом состояний приводится к системе с меньшим числом состояний [6]. Исходное множество состояний разбивается на непересекающиеся подмножества, в которых выделяются входные и выходные состояния. Укрупнённое множество состояний является объединением входных состояний укрупняемых подмножеств. Информация об исходном множестве состояний определенным образом «упаковывается» в систему с меньшим числом состояний с сохранением (без потери точности) некоторых выходных характеристик исходной системы. Особенность этого подхода заключается в том, что состояния укрупнённой системы описываются такими же характеристиками, как и исходная, то есть обеспечивается изоморфизм исходной и укрупнённой системы, в том числе укрупнённая система сохраняет свойство марковости. Рассмотрена идея об укрупнении состояний по функциональному признаку, то есть по функциям, выполняемым системой в каждом состоянии [7].

3. Постановка задачи укрупнения

С точки зрения охвата укрупнением множества состояний возможны следующие виды укрупнения:

1) простое укрупнение, когда множество состояний системы разбивается на два подмножества (в данной статье рассматривается такой вид укрупнения);

2) блочное укрупнение, когда множество состояний системы разбивается на несколько подмножеств (блоков);

3) многоуровневое укрупнение, когда укрупнённое множество состояний укрупняется ещё один или несколько раз, при этом число состояний укрупнённого множества на каждом уровне имеет тенденцию к уменьшению.

Замечание. Если укрупняется множество состояний некоторой технической системы, то разбиение на подмножества целесообразно производить по логически обоснованному качественному признаку, который имеет инженерно-технический смысл [7]. Таким признаком может быть вид функционирования, профилактическое обслуживание, перепрограммирование, замена оборудования, проверка технического состояния, уровень эффективности и качества функционирования системы и др. В теории надежности, например, таким признаком зачастую является безотказность системы: множество состояний системы разбивается на подмножество работоспособных и подмножество неработоспособных состояний.

Итак, рассматривается система, множество дискретных состояний которой W является эргодическим. По некоторому качественному признаку множество W разбивается на два непересекающихся несущественных подмножества состояний U и V . С течением времени имеют место переходы как внутри подмножеств U и V , так и между ними. Задача укрупнения состоит в том, что каждое из подмножеств U и V заменяется другим подмножеством с меньшим числом состояний. При этом сохраняется такой важный показатель, как средняя продолжительность нахождения в исходном подмножестве состояний.

Функционирование системы может протекать в дискретном или непрерывном времени. Соответственно случайный процесс, моделирующий функционирование системы, протекает в дискретном или непрерывном времени. Принято, что этот процесс описывается однородной марковской цепью в дискретном времени или однородным марковским процессом в непрерывном времени. Предлагаемый подход основан на оперировании с матрицами [4]. Исходными характеристиками системы являются матрица переходных вероятностей P для процесса в дискретном времени и матрица интенсивностей Λ для процесса в непрерывном времени.

Пребывание системы в подмножестве U и следующее за ним пребывание в подмножестве V будем называть UV -циклом системы, а пребывание системы в подмножестве V и следующее за ним нахождение в подмножестве U – VU -циклом. Таким образом, время функционирования системы длительного использования разбивается на циклы, состоящие из последовательных переходов из одного подмножества состояний в другое. Рассмотрим переходы между состояниями внутри каждого подмножества и между этими подмножествами. Эти процессы описываются с помощью подматриц матрицы переходных вероятностей P и матрицы интенсивностей Λ .

4. Характеристики подмножеств состояний

Исходные матрицы разбиваются на четыре подматрицы в соответствии с UV -разбиением множества W :

$$P = \begin{pmatrix} P_{UU} & P_{UV} \\ P_{VU} & P_{VV} \end{pmatrix}; \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{UU} & \Lambda_{UV} \\ \Lambda_{VU} & \Lambda_{VV} \end{pmatrix}.$$

Переходы между состояниями внутри подмножеств описываются диагональными блоками матриц P и Λ : P_{UU} , P_{VV} , Λ_{UU} , Λ_{VV} , а переходы между подмножествами – блоками: P_{UV} , P_{VU} , Λ_{UV} , Λ_{VU} .

Характеристики подмножеств состояний U и V приведены в табл. 1. Формулы для этих характеристик взяты из [4, 9].

Таблица 1. Характеристики подмножеств состояний

№ п/п	Наименование характеристики	Обозначение и формула для однородного процесса		Размеры матриц
		в дискретном времени	в непрерывном времени	
1	Подматрицы переходов между состояниями подмножества U	P_{UU}	Λ_{UU}	$m_U \times m_U$
2	Подматрицы переходов между состояниями подмножества V	P_{VV}	Λ_{VV}	$m_V \times m_V$
3	Матрицы средней продолжительности состояний подмножества U	$N_U = \ n_U(i, j)\ = (E - P_{UU})^{-1}$	$T_U = \ t_U(i, j)\ = -\Lambda_{UU}^{-1}$	$m_U \times m_U$
4	Матрицы средней продолжительности состояний подмножества V	$N_V = \ n_V(i, j)\ = (E - P_{VV})^{-1}$	$T_V = \ t_V(i, j)\ = -\Lambda_{VV}^{-1}$	$m_V \times m_V$
5	Строки средней продолжительности состояний подмножества U при заданном начальном распределении	$\bar{n}_U = \ n_U(j)\ = \bar{r}_U \cdot N_U$	$\bar{t}_U = \ t_U(j)\ = \bar{r}_U \cdot T_U$	$1 \times m_U$
6	Строки средней продолжительности состояний подмножества V при заданном начальном распределении	$\bar{n}_V = \ n_V(j)\ = \bar{r}_V \cdot N_V$	$\bar{t}_V = \ t_V(j)\ = \bar{r}_V \cdot T_V$	$1 \times m_V$
7	Средняя продолжительность нахождения в подмножестве U при заданном начальном распределении	$n_U = \bar{n}_U \cdot \dot{e}$	$t_U = \bar{t}_U \cdot \dot{e}$	
8	Средняя продолжительность нахождения в подмножестве V при заданном начальном распределении	$n_V = \bar{n}_V \cdot \dot{e}$	$t_V = \bar{t}_V \cdot \dot{e}$	

Обозначения и определения характеристик в дискретном времени: N_U – матрица среднего числа шагов нахождения в состояниях подмножества U ; $n_U(i, j)$ – среднее число шагов нахождения в состоянии $u_j \in U$ до выхода из U при условии, что состояние $u_i \in U$ является начальным состоянием подмножества U ; $\bar{n}_U$ – строка среднего числа шагов нахождения в состояниях подмножества U при заданном начальном распределении; $n_U(j)$ – среднее число шагов нахождения в состоянии $u_j \in U$ до выхода из U при заданном начальном распределении; n_U – среднее число шагов нахождения в подмножестве U до выхода из U при заданном начальном распределении; $\bar{r}_U = \|r_U(i)\|$ – распределение вероятностей начальных состояний подмножества U ; $r_U(i)$ – вероятность того, что состояние $u_i \in U$ является начальным при вхождении в подмножество U ; E – единичная матрица соответствующего порядка; $\dot{e}$ – столбец, все элементы которого равны 1; m_U – число состояний подмножества U .

Аналогично определяются характеристики подмножества V в дискретном времени.

Обозначения и определения характеристик в непрерывном времени: T_U – матрица среднего времени нахождения в состояниях подмножества U ; $t_U(i, j)$ – среднее время нахождения в состоянии $u_j \in U$ до выхода из U при условии, что состояние $u_i \in U$ является начальным состоянием подмножества U ; $\bar{t}_U$ – строка среднего времени нахождения в состояниях под-

множества U при заданном начальном распределении; $t_U(j)$ – среднее время нахождения в состоянии $u_j \in U$ до выхода из U при заданном начальном распределении; t_U – среднее время нахождения в подмножестве U до выхода из U при заданном начальном распределении.

Аналогично определяются характеристики подмножества V в непрерывном времени.

Комментарии.

1. Если начальным состоянием является $u_i \in U$, то средняя продолжительность состояний определяется i -й строкой матрицы N_U для процесса в дискретном времени или i -й строкой матрицы T_U для процесса в непрерывном времени.

2. В общем случае матрицы N_U и T_U имеют разные строки. Это означает, что продолжительность состояний зависит от начального состояния подмножества. Таким образом, продолжительность состояний зависит от распределения начальных вероятностей состояний каждого подмножества.

3. Векторы $\bar{r}_U$ и $\bar{r}_V$ являются распределениями вероятностей начальных состояний при вхождении в подмножества U и V соответственно. Эти векторы являются стохастическими, то есть сумма элементов каждого вектора равна 1.

4. Если подмножество U характеризуется распределением вероятностей начальных состояний $\bar{r}_U$, то средняя продолжительность состояний определяется линейной комбинацией строк матриц N_U и T_U с весовыми коэффициентами $r_U(i)$.

5. Характеристики переходов между подмножествами состояний

Переходы между подмножествами U и V описываются матрицами вероятностей попадания B_{UV} и B_{VU} , а возвращения в одноименные подмножества описываются матрицами A_U и A_V . Формулы для вычисления этих матриц приведены в табл. 2. Эти матрицы вычисляются с помощью подматриц матриц P и Λ [4].

Таблица 2. Характеристики переходов между подмножествами состояний

№ п/п	Наименование характеристики	Обозначение и формула для однородного процесса		Размеры матриц
		в дискретном времени	в непрерывном времени	
1	Подматрицы, описывающие переход $U \rightarrow V$	P_{UV}	Λ_{UV}	$m_U \times m_V$
2	Подматрицы, описывающие переход $V \rightarrow U$	P_{VU}	Λ_{VU}	$m_V \times m_U$
3	Матрицы вероятностей попаданий при переходе $U \rightarrow V$	$B_{UV} = \ b_{UV}(i, j)\ =$ $= (E - P_{UU})^{-1} \cdot P_{UV} \quad \bigg \quad = -\Lambda_{UU}^{-1} \cdot \Lambda_{UV}$		$m_U \times m_V$
4	Матрицы вероятностей попаданий при переходе $V \rightarrow U$	$B_{VU} = \ b_{VU}(i, j)\ =$ $= (E - P_{VV})^{-1} \cdot P_{VU} \quad \bigg \quad = -\Lambda_{VV}^{-1} \cdot \Lambda_{VU}$		$m_V \times m_U$
5	Матрица вероятностей возвращения в подмножество U	$A_U = \ a_U(i, j)\ = B_{UV} \cdot B_{VU}$		$m_U \times m_U$
6	Матрица вероятностей возвращения в подмножество V	$A_V = \ a_V(i, j)\ = B_{VU} \cdot B_{UV}$		$m_V \times m_V$

В таблице обозначено: $b_{UV}(i, j)$ – вероятность того, что при переходе $U \rightarrow V$ система попадет в состояние $v_j \in V$ при условии, что состояние $u_i \in U$ является начальным; $b_{VU}(i, j)$ – вероятность того, что при переходе $V \rightarrow U$ система попадет в состояние $u_j \in U$ при условии, что состояние $v_i \in V$ является начальным; $a_U(i, j)$ – вероятность того, что состояние $u_j \in U$ является начальным при переходе $V \rightarrow U$ при условии, что на предыдущем цикле начальным было состояние $u_i \in U$; $a_V(i, j)$ – вероятность того, что состояние $v_j \in V$ является начальным при переходе $U \rightarrow V$ при условии, что на предыдущем цикле начальным было состояние $v_i \in V$.

Матрица B_{UV} описывает переход $U \rightarrow V$: система с начальным состоянием $u_i \in U$ попадает в подмножество U и после некоторого пребывания в этом подмножестве переходит в состояние $v_j \in V$. Матрица A_U описывает возвращение в подмножество U : с начальным состоянием $u_i \in U$ система попадает в подмножество U , после некоторого пребывания в U переходит в подмножество V и после некоторого пребывания в V возвращается в подмножество U , попадая в состояние $u_j \in U$, которое является начальным в следующем UV -цикле. Таким образом, переходы между двумя соседними циклами описываются матрицей A_U вероятностей возвращения в подмножество U для UV -цикла или матрицей A_V возвращения в подмножество V для VU -цикла.

6. Граничные состояния подмножеств

Приведем определения входных, выходных и граничных состояний подмножеств.

Состояние $u_i \in U$ является входным состоянием подмножества U , если оно может быть начальным состоянием подмножества U при переходе $V \rightarrow U$; состояние $v_i \in V$ является входным состоянием подмножества V , если оно может быть начальным состоянием подмножества V при переходе $U \rightarrow V$. Входные состояния подмножеств U и V образуют подмножества входных состояний этих подмножеств, U^+ и V^+ соответственно.

Состояние $u_j \in U$ является выходным состоянием подмножества U , если из него возможен непосредственный переход в подмножество V ; состояние $v_j \in V$ является выходным состоянием подмножества V , если из него возможен непосредственный переход в подмножество U . Выходные состояния подмножеств U и V образуют подмножества выходных состояний этих подмножеств, U^- и V^- соответственно.

Граничное состояние подмножества – это состояние, являющееся входным или выходным состоянием этого подмножества. Подмножество граничных состояний U^r образуется объединением подмножеств U^+ и U^- . Аналогично образуется подмножество V^r .

При переходах между подмножествами U и V следует учитывать только граничные состояния. А именно, при переходе $U \rightarrow V$ выход из U возможен только из состояний подмножества U^- , а вход в подмножество V – только в состояния подмножества V^+ . Аналогично при переходе $V \rightarrow U$ выход из V возможен только из состояний подмножества V^- , а вход в подмножество U – только в состояния подмножества U^+ . Таким образом, переходы $U \rightarrow V \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow \dots$ заменяются на переходы между граничными подмножествами. Иными словами, переходы между подмножествами U и V заменяется на переходы между подмножествами U^+ , U^- , V^+ и V^- . Число состояний граничных подмножеств обозначено: m_U^+ , m_U^- , m_V^+ , m_V^- .

Итак, исходные подмножества состояний заменены на четыре подмножества, число состояний которых не превосходит число состояний подмножеств U и V .

7. Усечение матричных характеристик

Поскольку переходы между подмножествами U и V заменяются на переходы между граничными подмножествами, то состояния, не являющиеся граничными, можно не учитывать при переходах между подмножествами U и V . Поэтому матричные характеристики исходных подмножеств U и V можно усекать. Усечение заключается в том, что удаляются строки и столбцы состояний, которые не являются граничными. Усечённые матричные характеристики приведены в табл. 3.

Таблица 3. Усечённые матричные характеристики подмножеств состояний

№ п/п	Характер усечения	Усечённая матрица		Размеры усеченной матрицы
		в дискретном времени	в непрерывном времени	
1	Усечение строк, относящихся к подмножеству U	N_U^+	T_U^+	$m_U^+ \times m_U$
2	Усечение строк, относящихся к подмножеству V	N_V^+	T_V^+	$m_V^+ \times m_V$
3	Усечение строк и столбцов, относящихся к подмножеству U	N_U^Γ	T_U^Γ	$m_U^+ \times m_U^-$
4	Усечение строк и столбцов, относящихся к подмножеству V	N_V^Γ	T_V^Γ	$m_V^+ \times m_V^-$
5	Усечение строк и столбцов подматрицы переходов $U \rightarrow V$	P_{UV}^Γ	Λ_{UV}^Γ	$m_U^- \times m_V^+$
6	Усечение строк и столбцов подматрицы переходов $V \rightarrow U$	P_{VU}^Γ	Λ_{VU}^Γ	$m_V^- \times m_U^+$
7	Усечённое распределение начальных вероятностей подмножества U	$\bar{r}_U^+$		$1 \times m_U^+$
8	Усечённое распределение начальных вероятностей подмножества V	$\bar{r}_V^+$		$1 \times m_V^+$

Усечённые матрицы N_U^+ и T_U^+ имеют строки, соответствующие состояниям $u_i \in U^+$, а остальные строки удалены; все столбцы сохранены. В усечённых матрицах N_U^Γ и T_U^Γ оставлены строки, соответствующие состояниям $u_i \in U^+$, а остальные строки удалены; кроме того, оставлены столбцы, соответствующие состояниям $u_j \in U^-$, а остальные столбцы удалены. Матрицы P_{UV}^Γ и Λ_{UV}^Γ являются результатом усечения исходных матриц P_{UV} и Λ_{UV} : в них оставлены строки, соответствующие состояниям $u_j \in U^-$, а остальные строки удалены; оставлены столбцы, соответствующие состояниям $v_j \in V^+$, а остальные столбцы удалены. В распределении начальных вероятностей состояний подмножества U , $\bar{r}_U^+$ оставлены элементы, соответствующие состояниям $u_i \in U^+$, а остальные элементы удалены.

Аналогично определяются усечённые матрицы N_V^+ , T_V^+ , N_V^Γ , T_V^Γ , P_{VU}^Γ , Λ_{VU}^Γ , $\bar{r}_V^+$.

8. Укрупнённый процесс

Итак, переходы между подмножествами U и V заменяются на переходы между граничными подмножествами, а характеристики подмножеств состояний приводятся к входным состояниям этих подмножеств. Соответствующие формулы приведены в табл. 4.

Таблица 4. Характеристики укрупнённого процесса

№ п/п	Наименование характеристики	Обозначение и формула		Размеры матриц
		в дискретном времени	в непрерывном времени	
1	Матрицы вероятностей попаданий между подмножествами $U \rightarrow V$	$B_{UV}^\Gamma = \ b_{UV}^\Gamma(i, j)\ =$ $= N_U^\Gamma \cdot P_{UV}^\Gamma \quad \bigg \quad = T_U^\Gamma \cdot \Lambda_{UV}^\Gamma$		$m_U^+ \times m_V^+$
2	Матрицы вероятностей попаданий между подмножествами $V \rightarrow U$	$B_{VU}^\Gamma = \ b_{VU}^\Gamma(i, j)\ =$ $= N_V^\Gamma \cdot P_{VU}^\Gamma \quad \bigg \quad = T_V^\Gamma \cdot \Lambda_{VU}^\Gamma$		$m_V^+ \times m_U^+$
3	Матрица вероятностей возвращения в подмножество U	$A_U^\Gamma = \ a_U^\Gamma(i, j)\ = B_{UV}^\Gamma \cdot B_{VU}^\Gamma$		$m_U^+ \times m_U^+$
4	Матрица вероятностей возвращения в подмножество V	$A_V^\Gamma = \ a_V^\Gamma(i, j)\ = B_{VU}^\Gamma \cdot B_{UV}^\Gamma$		$m_V^+ \times m_V^+$
5	Строка средней продолжительности состояний подмножества U	$\bar{n}_U = \bar{r}_U^+ \cdot N_U^+$	$\bar{t}_U = \bar{r}_U^+ \cdot T_U^+$	$1 \times m_U$
6	Строка средней продолжительности состояний подмножества V	$\bar{n}_V = \bar{r}_V^+ \cdot N_V^+$	$\bar{t}_V = \bar{r}_V^+ \cdot T_V^+$	$1 \times m_V$
7	Средняя продолжительность нахождения в подмножестве U	$n_U = \bar{n}_U \cdot \dot{e}$	$t_U = \bar{t}_U \cdot \dot{e}$	
8	Средняя продолжительность нахождения в подмножестве V	$n_V = \bar{n}_V \cdot \dot{e}$	$t_V = \bar{t}_V \cdot \dot{e}$	

В таблице обозначено: $b_{UV}^\Gamma(i, j)$ – вероятность того, что при переходе $U \rightarrow V$ система попадёт в состояние $v_j \in V^+$ при условии, что состояние $u_i \in U^+$ является начальным на UV -цикле; $a_U^\Gamma(i, j)$ – вероятность того, что состояние $u_j \in U^+$ является начальным при переходе $V \rightarrow U$ при условии, что на предыдущем цикле начальным было состояние $u_i \in U^+$.

Аналогично определяются элементы матриц $b_{VU}^\Gamma(i, j)$ и $a_V^\Gamma(i, j)$.

Переход $U^+ \rightarrow V^+$ описывается матрицей вероятностей попаданий B_{UV}^Γ , которая вычисляется с помощью соответствующих усечённых матричных характеристик. Размеры матрицы B_{UV}^Γ не превосходят размеров матрицы B_{UV} , вычисленной по исходным матричным характеристикам (табл. 2). Возвращение в подмножество U описывается матрицей вероятностей возвращения A_U^Γ , порядок которой не превосходит порядка матрицы A_U , вычисленной по исходным матричным характеристикам (табл. 2).

Характеристики продолжительности нахождения в состояниях вычисляются с помощью усеченных распределений начальных вероятностей подмножеств U и V , $\bar{r}_U^+$ и $\bar{r}_V^+$. Вычисление этих распределений здесь не рассматривается. Следует отметить, что эти распределения вычисляются соответственно по матрицам A_U^Γ и A_V^Γ , порядок которых не превосходит порядка матриц A_U и A_V . Алгоритм вычисления усеченных распределений $\bar{r}_U^+$ и $\bar{r}_V^+$ в переходном и стационарном режимах при функционировании систем длительного использования такой же, как и для вычисления распределений $\bar{r}_U$ и $\bar{r}_V$, рассмотренных в [4].

При реализации алгоритма укрупнения следует выделить граничные состояния (входные и выходные) подмножеств U и V и определить соответствующие числа граничных состояний. Эту операцию можно выполнить по графу состояний с учетом переходов $U \rightarrow V$ и $V \rightarrow U$ или по исходным матрицам. Затем следует найти усеченные матричные характеристики, приведённые в табл. 3.

При нахождении распределений $\bar{r}_U^+$ и $\bar{r}_V^+$ полезно принимать во внимание следующие обстоятельства.

1. Если матрица A_U^Γ (A_V^Γ) имеет равные строки, то эти строки и являются предельным распределением $\bar{r}_U^+$ ($\bar{r}_V^+$).

2. Если $\bar{r}_U^+$ ($\bar{r}_V^+$) является предельным распределением при возвращении в подмножество U^+ (V^+), то распределение $\bar{r}_V^+ = \bar{r}_U^+ \cdot B_{UV}^\Gamma$ ($\bar{r}_U^+ = \bar{r}_V^+ \cdot B_{VU}^\Gamma$) является предельным при возвращении в подмножество V^+ (U^+).

3. Если входным состоянием подмножества U (V) является одно единственное состояние, то усечение матрицы N_U^+ и T_U^+ (N_V^+ и T_V^+) представляет собой одну строку, соответствующую этому входному состоянию. При этом матрица вероятностей возвращения состоит из одного элемента: $A_U^\Gamma = (1)$ ($A_V^\Gamma = (1)$).

Изложенный метод укрупнения можно рассматривать также как приведение подмножеств U и V к двум эквивалентным состояниям u и v соответственно. Матричные характеристики подмножеств U и V заменяются на соответствующие усечённые матричные характеристики и в результате выполнения операций с этими характеристиками получают среднюю продолжительность эквивалентных состояний.

9. Показатели укрупняемости

Эффект от уменьшения числа состояний можно оценить коэффициентом укрупняемости, который представляет собой число «упакованных» состояний одного подмножества или всего множества состояний, приходящееся на одно входное состояние. В табл. 5 приведены формулы для вычисления коэффициента укрупняемости каждого подмножества и всего множества состояний.

Коэффициент укрупняемости является удобным показателем для практического применения, поскольку он характеризует эффект укрупнения, а именно, коэффициент укрупняемости возрастает с увеличением числа «упакованных» состояний. Следует иметь в виду, что при отсутствии укрупнения коэффициент укрупняемости равен нулю.

Таблица 5. Вычисление коэффициента укрупняемости

№ п/п	Наименование показателя	Формула для вычисления
1	Коэффициент укрупняемости подмножества U	$L_U = \frac{m_U - m_U^+}{m_U^+}$
2	Коэффициент укрупняемости подмножества V	$L_V = \frac{m_V - m_V^+}{m_V^+}$
3	Коэффициент укрупняемости всего множества состояний, где $m^+ = m_U^+ + m_V^+$, $m = m_U + m_V$	$L_W = \frac{m - m^+}{m^+}$

10. Пример укрупнения

Приведем простой иллюстративный пример с небольшим числом состояний на основе модели функционирования линии связи в условиях недостоверного контроля технического состояния [5]. В модель заложено пять состояний: Р – работоспособное состояние, Н – неработоспособное состояние, ПР – проверка работоспособного состояния, ПН – проверка неработоспособного состояния, В – восстановление после отказа. Матрица интенсивностей имеет вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -(\lambda + \gamma) & \lambda & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & \gamma & 0 \\ (1-\alpha)\mu & 0 & -\mu & 0 & \alpha\mu \\ 0 & \beta\mu & 0 & -\mu & (1-\beta)\mu \\ \mu_V & 0 & 0 & 0 & -\mu_V \end{pmatrix}.$$

В матрице обозначено: λ – интенсивность отказов; γ – интенсивность начала периодической проверки со случайным периодом; μ – интенсивность завершения периодической проверки; α – вероятность ошибки контроля I рода; β – вероятность ошибки контроля II рода; μ_V – интенсивность завершения восстановления.

С интенсивностью λ происходит переход Р→Н, а с интенсивностью μ_V – переход В→Р. Ошибка контроля I рода заключается в том, что с интенсивностью $\alpha\mu$ имеет место переход ПР→В, а ошибка контроля II рода заключается в том, что происходит переход ПН→Н с интенсивностью $\beta\mu$. Граф состояний может быть легко восстановлен по матрице Λ .

Замечание. По сравнению с [5] модель несколько упрощена: явные отказы отсутствуют, имеются только скрытые отказы, обнаруживаемые при периодических проверках со случайным периодом.

Разбиение множества состояний на подмножества производится по функциональному признаку: $U = \{P, H, PR, PH\}$; $V = \{B\}$. Из матрицы интенсивностей следует, что при переходе $V \rightarrow U$ входным всегда является состояние Р, поэтому подмножества граничных состояний:

$$U^+ = \{P\}; U^- = \{PR, PH\}; V^+ = \{B\}; V^- = \{B\}.$$

Разбиение матрицы Λ на подматрицы:

$$\Lambda_{UU} = \begin{pmatrix} -(\lambda + \gamma) & \lambda & \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & \gamma \\ (1-\alpha)\mu & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & \beta\mu & 0 & -\mu \end{pmatrix}; \quad \Lambda_{UV} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha\mu \\ (1-\beta)\mu \end{pmatrix}; \quad \Lambda_{VU} = (\mu_B \quad 0 \quad 0 \quad 0); \quad \Lambda_{VV} = (\mu_B).$$

Матрица T_U полностью не приводится. Усеченная матрица T_V^+ представляет собой первую строку матрицы T_U :

$$T_U^+ = \frac{1}{\lambda + \alpha\gamma} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda}{(1-\beta)\gamma} & \frac{\gamma}{\mu} & \frac{\lambda}{(1-\beta)\mu} \end{pmatrix}.$$

Другие усеченные характеристики:

$$T_U^\Gamma = \frac{1}{\lambda + \alpha\gamma} \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\mu} & \frac{\lambda}{(1-\beta)\mu} \end{pmatrix}; \quad T_V = T_V^+ = T_V^\Gamma = (1/\mu_B); \quad \Lambda_{UV}^\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha\mu \\ (1-\beta)\mu \end{pmatrix}; \quad \Lambda_{VU}^\Gamma = (\mu_B);$$

$$B_{UV}^\Gamma = T_U^\Gamma \cdot \Lambda_{UV}^\Gamma = (1); \quad B_{VU}^\Gamma = T_V^\Gamma \cdot \Lambda_{VU}^\Gamma = (1); \quad A_U^\Gamma = B_{UV}^\Gamma \cdot B_{VU}^\Gamma = (1); \quad A_V^\Gamma = B_{VU}^\Gamma \cdot B_{UV}^\Gamma = (1).$$

Предельные распределения начальных вероятностей входных состояний:

$$\bar{r}_U^+ = (1); \quad \bar{r}_V^+ = (1).$$

Строка среднего времени нахождения в состояниях подмножества U и среднее время нахождения в подмножестве U до выхода из U :

$$\bar{t}_U = \bar{r}_U^+ \cdot T_U^+ = \frac{1}{\lambda + \alpha\gamma} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda}{(1-\beta)\gamma} & \frac{\gamma}{\mu} & \frac{\lambda}{(1-\beta)\mu} \end{pmatrix}; \quad t_U = \bar{t}_U \cdot \dot{e} = \frac{(\lambda + (1-\beta)\gamma) \cdot (\gamma + \mu)}{(1-\beta) \cdot (\lambda + \alpha\gamma)\gamma\mu}.$$

Среднее время нахождения в состояниях Р и Н на одном цикле:

$$t_P = \frac{1}{\lambda + \alpha\gamma}; \quad t_H = \frac{\lambda}{(1-\beta) \cdot (\lambda + \alpha\gamma)\gamma}.$$

Стационарные коэффициенты готовности и неготовности:

$$K_{\text{гст}} = \frac{t_P}{t_P + t_H} = \frac{(1-\beta)\gamma}{\lambda + (1-\beta)\gamma}; \quad K_{\text{нст}} = \frac{t_H}{t_P + t_H} = \frac{\lambda}{\lambda + (1-\beta)\gamma}.$$

Параметры для вычисления коэффициентов укрупняемости и коэффициенты укрупняемости:

$$m_U = 4; \quad m_V = 1; \quad m_U^+ = 1; \quad m_V^+ = 1; \quad L_U = 3; \quad L_V = 0; \quad L_W = 1,5.$$

11. Заключение

Предложенный метод укрупнения путем приведения к входным состояниям подмножеств позволяет привести систему, состояния которой разбиты на два подмножества по некоторому признаку, к системе с меньшим числом состояний, при этом информация об исходном множестве состояний определенным образом «упаковывается» в систему с меньшим числом состояний. Особенностью метода является сохранение значений среднего числа шагов и среднего времени нахождения в состояниях соответственно для процесса в дискретном и непрерывном времени. На основе этих характеристик могут быть вычислены другие характеристики системы, например, вероятность нахождения в подмножестве состояний и частота переходов между подмножествами состояний.

Характеристики системы находятся путем оперирования с матрицами, описывающими граничные подмножества, то есть с матрицами меньших размеров по сравнению с исходными. Эффект от укрупнения заключается в том, что уменьшается число строк и столбцов матричных характеристик, описывающих переходы между состояниями укрупненной системы.

Приведенный метод может быть использован в инженерной практике. Входные состояния подмножеств можно определить по графу состояний или по исходным матрицам: по матрице переходных вероятностей для процесса в дискретном времени или по матрице интенсивностей для процесса в непрерывном времени. Алгоритм укрупнения на основе оперирования с матрицами легко реализуем с помощью таких инструментов, как Mathcad или MATLAB. Операции могут быть выполнены в числовом или аналитическом виде.

Литература

1. *Замятина О. М.* Моделирование систем. Томск: Изд. ТПУ, 2009. 204 с.
2. *Захаров В. К., Сарманов О. В.* Укрупнение состояний цепи Маркова и стационарное изменение спектра // Докл. АН СССР. Физика, математика. 1965. Вып. 160, № 4.
3. *Зеленцов Б. П.* Аналитическое моделирование сложных вероятностных систем // Труды ВЦ СО РАН. Информатика. 1994. Вып 1. С. 143–152.
4. *Зеленцов Б. П.* Матричные модели функционирования оборудования систем связи // Вестник СибГУТИ. 2015. № 4.
5. *Зеленцов Б. П., Максимов В. П., Шувалов В. П.* Модель функционирования линии связи в условиях недостоверного контроля технического состояния // Вестник СибГУТИ. 2015. № 3.
6. *Зеленцов Б. П.* Укрупнение состояний при расчете надежности систем // Надежность и контроль качества. 1988. № 8.
7. *Зеленцов Б. П.* Укрупнение состояний по функциональному признаку при расчете надежности оборудования систем коммутации // Анализ и моделирование сигналов и систем связи: Сб. науч. тр. учебных ин-тов связи. СПб.: Изд. ЛЭИС, 1993. С. 74–80.
8. *Каиштанов В. А., Медведев А. И.* Теория надежности сложных систем. М.: Физматлит, 2010. 608 с.
9. *Кемени Д., Снелл Д.* Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970.
10. *Клемин А. И., Емельянов В. С., Морозов В. Е.* Расчет надежности ядерных энергетических установок. М.: Энергоиздат, 1982. 208 с.
11. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Фазовое укрупнение сложных систем. Киев: Вища школа, 1978. 112 с.
12. Надежность технических систем: справочник / под ред. И.А. Ушакова. М.: Радио и связь, 1985. 608 с.
13. *Смирнов И. М.* Приближенное укрупнение состояний марковской цепи со слабыми связями // Автоматика и телемеханика. 1988. Вып. 1.
14. *Советов Б. Я., Яковлев С. А.* Моделирование систем. М.: Высш. шк., 2009. 343 с.
15. *Черкасов А. В.* Принцип квазиэквивалентности укрупнения состояний марковских моделей // Молодой учёный. 2016. № 11.
16. *Ярыгин Г. А.* Расчет надежности систем с большим числом состояний // Надежность и контроль качества. 1979. № 2.

*Статья поступила в редакцию: 18.10.2016;
Переработанный вариант: 23.01.2017*

Зеленцов Борис Павлович

д.т.н., профессор кафедры высшей математики СибГУТИ (630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86), e-mail: zelentsovb@mail.ru.

Aggregation of States of Probabilistic Systems**B.P. Zelentsov**

A method of aggregation of states of a probabilistic system described by Markov process in discrete and continuous time is considered. The set of system states is partitioned into two subsets. The number of system states is reduced to a smaller number of states by introducing boundary states of the subsets. The transitions between the subsets are replaced by transitions between the boundary states. The method allows to operate with matrices of smaller dimensions and to remain the value of average duration of stay in the subsets of states. The method can be applied for modeling high-dimensional systems.

Keywords: discrete Markov process in discrete and continuous time, aggregation of states, boundary states of subsets.