

Циклическое функционирование систем длительного использования

Б. П. Зеленцов

Приведена аналитическая модель функционирования системы длительного использования, заключающаяся в том, что множество возможных состояний системы разбито на два подмножества и функционирование системы во времени представлено в виде переходов между этими подмножествами. Переходы системы внутри подмножеств и между подмножествами описаны средствами теории марковских процессов в дискретном и непрерывном времени с использованием матричных методов, при этом переходы между подмножествами рассматриваются как в переходном, так и стационарном режимах. Приведенный подход позволяет моделировать функционирование оборудования широкого класса систем.

Ключевые слова: система длительного использования, переходы между подмножествами состояний, характеристики системы в переходном и стационарном режимах, марковский процесс в дискретном и непрерывном времени.

1. Введение

Технические системы различного назначения и их оборудование относятся к сложным системам длительного использования, они представляют собой совокупность элементов, которые образуют определенную целостность и единство и характеризуются сложностью структуры, стохастичностью связей между элементами, неоднозначностью алгоритмов поведения при различных условиях, разнообразием и вероятностным характером воздействий внешней среды, неполнотой исходной информации. Особо следует отметить наличие случайных факторов, ввиду чего вероятностные закономерности являются преобладающими при моделировании этих систем. Детерминированные закономерности накладываются на случайные факторы, что определяет специфику модели в каждом конкретном случае.

Одной из проблем исследования сложных систем является построение таких моделей реальных систем, которые пригодны для теоретического и экспериментального изучения их свойств. Математическое моделирование является наиболее распространенным и перспективным методом изучения сложных систем, который позволяет проводить исследование на этапе проектирования, решать задачи анализа и синтеза, прогнозировать качество обслуживания абонентов и эффективность функционирования, обосновывать необходимую или оптимальную структуру при проектировании новых и совершенствовании существующих систем и правильно интерпретировать статистические данные.

К классу систем длительного использования относится оборудование телекоммуникационных систем, для которого вероятностные закономерности также являются преобладающими. В этих системах с течением времени происходят процессы, связанные с качеством функционирования, пропускной способностью каналов, имеют место отказы и восстановления элементов оборудования, контроль состояния элементов оборудования, профилактическое обслуживание и другие факторы. При эксплуатации таких систем имеют место повторяющиеся циклы, обусловленные, например, перегрузками, отказами, снижением качества обслуживания и др. Это обстоятельство является предпосылкой для формирования модели циклического функционирования систем.

Известно, что для исследования сложных систем используют аналитические, алгоритмические и имитационные модели, в которых реализуются разные формы зависимости между исходными и обобщенными характеристиками системы [3]. К аналитическим относятся модели, основанные на логико-вероятностных методах, методах теории графов, методах, основанных на составлении и решении систем дифференциальных уравнений, методах математического программирования, марковских и полумарковских процессах, матричных методах [6]. С усложнением систем аналитические зависимости между исходными и обобщенными характеристиками системы также усложняются, что приводит к громоздким аналитическим моделям. В этом случае целесообразно применять алгоритмическое и имитационное моделирование, которое реализуется в виде машинного алгоритма, когда соответствие между исходными и обобщенными характеристиками системы устанавливается в числовом виде [3, 10]. Математические модели вероятностных систем строят как в дискретном, так и в непрерывном времени.

Целью статьи является изложение подхода к моделированию систем длительного использования, при котором рассмотрено функционирование в виде циклических переходов между подмножествами состояний. Переходы системы внутри подмножеств и между подмножествами описаны методами однородных марковских процессов в дискретном и непрерывном времени.

Преобразования и операции выполняются в матричном виде, при этом производятся преобразования числовых и/или функциональных матриц. Интерес к матричным методам обусловлен их преимуществами: компактностью и простотой преобразований исходных характеристик в обобщенные, наличием стандартного математического обеспечения. Следует отметить, что матричные методы относятся к численно-аналитическим методам, то есть могут быть применены как для численных расчетов, так и для аналитических исследований. С помощью матричных методов могут быть получены характеристики системы разного вида: вероятностные, например, коэффициент готовности, временные, например, средняя наработка на отказ, частотные, например, среднее число проверок технического состояния в единицу времени, экономические, например, ожидаемый доход от использования системы, и другие характеристики, связанные со спецификой исследуемой системы [5, 7]. Большая часть статьи состоит из известных, ранее опубликованных материалов, которые в статье сведены в единую систему.

2. Постановка задачи

Пусть множество W состояний системы является эргодическим. Это множество разбивается на два подмножества U и V : ($W = U + V$, $U \cdot V = \emptyset$). Разбиение множества состояний системы на подмножества целесообразно производить по некоторому признаку таким образом, чтобы в состояниях этих подмножеств система имела некоторые заданные свойства. Каждое из подмножеств U и V является подмножеством несущественных состояний в том смысле, что вероятность нахождения в состояниях каждого подмножества до перехода в другое подмножество стремится к нулю с течением времени.

Эволюционирование системы во времени заключается как в переходах внутри подмножеств U и V , так и в переходах между ними. Назовём UV -циклом нахождение системы в подмножестве U и следующее за ним нахождение в подмножестве V . Тогда эволюционирование системы во времени можно представить последовательными переходами из одного подмножества в другое: $U \rightarrow V \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow \dots$ Это означает, что время эксплуатации системы разбивается на циклы, а эксплуатация состоит из последовательных переходов из одного подмножества в другое.

Характеристиками этих подмножеств при циклическом функционировании системы могут быть: распределение времени нахождения в подмножествах состояний, предельные веро-

ятности подмножеств состояний, средние времена нахождения в подмножествах, частоты переходов между подмножествами и др. В каждом конкретном случае в зависимости от признака разбиения множества состояний на подмножества U и V характеристики системы будут иметь тот или иной инженерно-технический смысл. Например, в теории надежности часто такое разбиение производят по признаку безотказности, при этом U и V являются соответственно подмножествами работоспособных и неработоспособных состояний. Тогда переход $U \rightarrow V$ происходит при отказе системы, а обратный переход – при устранении отказа.

3. Исходные матричные характеристики

Исходными матричными характеристиками являются стохастическая матрица P переходных вероятностей однородной марковской цепи для процесса в дискретном времени и квазистохастическая матрица Λ интенсивностей переходов между состояниями однородного марковского процесса в непрерывном времени [5]. Исходные матрицы разбиваются на четыре подматрицы в соответствии с UV -разбиением множества W (см. табл. 1). Сейчас и далее будем рассматривать процесс одновременно в дискретном и непрерывном времени.

Таблица. 1. Исходные матричные характеристики

Матричная характеристика	в дискретном времени	в непрерывном времени
1. Исходная матрица переходов между состояниями	матрица переходных вероятностей $P = \ p(i, j)\ $	матрица интенсивностей переходов $\Lambda = \ \lambda(i, j)\ $
2. Необходимые условия проверки правильности составления исходной матрицы	а) $ E - P = 0$; б) $P \cdot \dot{e} = \dot{e}$	а) $ \Lambda = 0$; б) $\Lambda \cdot \dot{e} = \dot{o}$
3. Разбиение исходной матрицы на блоки (подматрицы)	$P = \begin{Bmatrix} P_{UU} & P_{UV} \\ P_{VU} & P_{VV} \end{Bmatrix}$	$\Lambda = \begin{Bmatrix} \Lambda_{UU} & \Lambda_{UV} \\ \Lambda_{VU} & \Lambda_{VV} \end{Bmatrix}$

В таблице обозначено:

$p_{ij}, i \neq j$ – вероятность перехода между состояниями $w_i \rightarrow w_j$ на одном шаге;

$\lambda_{ij}, i \neq j$ – интенсивность перехода между состояниями $w_i \rightarrow w_j$;

p_{ii} – вероятность того, что на одном шаге состояние w_i не изменится;

$\lambda_{ii} = -\sum_j \lambda_{ij}$ – суммарная интенсивность выхода из состояния w_i , взятая со знаком минус;

E – единичная матрица;

$\dot{e}$ – столбец, все элементы которого равны 1;

$\dot{o}$ – столбец, все элементы которого равны 0;

P_{UU} (P_{VV}) – подматрица переходных вероятностей на подмножестве U (V);

P_{UV} (P_{VU}) – подматрица переходных вероятностей между подмножествами U и V (V и U);

Λ_{UU} (Λ_{VV}) – подматрица интенсивностей переходов на подмножестве U (V);

Λ_{UV} (Λ_{VU}) – подматрица интенсивностей переходов между подмножествами U и V (V и U).

В дальнейшем изложении известные формулы приводятся без вывода, даются ссылки на литературные источники.

4. Переходы между подмножествами состояний

Переходы между разноимёнными подмножествами описываются матрицами B_{UV} и B_{VU} , которые содержат вероятности попадания в состояния при переходах из одного подмножества в другое. Формулы для вычисления этих матриц приведены в табл. 2. Обоснование и

вывод этих формул содержатся в [7, 9]. Так, матрица B_{UV} содержит вероятности попадания в подмножество V при условии, что процесс начинается в подмножестве U . Более детально: система начинает функционировать в одном из состояний подмножества U , затем пребывает внутри этого подмножества и завершает этот процесс попаданием в состояния подмножества V . Аналогичный смысл имеет матрица B_{VU} .

Переходы между двумя соседними циклами описываются матрицами вероятностей возвращения A_U и A_V . Матрица A_U содержит вероятности возвращения в состояния подмножества U при условии, что процесс начинается также в состояниях подмножества U . Другими словами: процесс начинается в подмножестве U , затем переходит в подмножество V и опять возвращается в подмножество U . Аналогичный смысл имеет матрица A_V . Обоснование матриц возвращения и вывод формул для их вычисления содержатся в [7, 9]. Формулы для вычисления матриц вероятностей возвращения приведены в табл. 2.

Таблица. 2. Матричные характеристики переходов между подмножествами состояний

Матричная характеристика	в дискретном времени	в непрерывном времени
1. Матрица вероятностей попаданий при переходе $U \rightarrow V$	$B_{UV} = \ b_{UV}(i, j)\ = (E - P_{UU})^{-1} \cdot P_{UV}$	$B_{UV} = \ b_{UV}(i, j)\ = -\Lambda_{UU}^{-1} \cdot \Lambda_{UV}$
2. Матрица вероятностей попаданий при переходе $V \rightarrow U$	$B_{VU} = \ b_{VU}(i, j)\ = (E - P_{VV})^{-1} \cdot P_{VU}$	$B_{VU} = \ b_{VU}(i, j)\ = -\Lambda_{VV}^{-1} \cdot \Lambda_{VU}$
3. Матрица вероятностей возвращения в подмножество U на UV -цикле	$A_U = \ a_U(i, j)\ = B_{UV} \cdot B_{VU}$	
4. Матрица вероятностей возвращения в подмножество V на VU -цикле	$A_V = \ a_V(i, j)\ = B_{VU} \cdot B_{UV}$	

В таблице обозначено:

$b_{UV}(i, j)$ – вероятность того, что при переходе $U \rightarrow V$ система попадет в состояние $v_j \in V$ при условии, что состояние $u_i \in U$ является начальным;

$b_{VU}(i, j)$ – вероятность того, что при переходе $V \rightarrow U$ система попадет в состояние $u_j \in U$ при условии, что состояние $v_i \in V$ является начальным;

$a_U(i, j)$ – вероятность того, что система попадет в состояние $u_j \in U$ при возвращении из V в U при условии, что состояние $u_i \in U$ является начальным на предыдущем UV -цикле;

$a_V(i, j)$ – вероятность того, что система попадет в состояние $v_j \in V$ при возвращении из U в V при условии, что состояние $v_i \in V$ является начальным на предыдущем VU -цикле.

Матрицы B_{UV} , B_{VU} , A_U , A_V являются стохастическими: сумма элементов каждой строки этих матриц равна 1, то есть

$$B_{UV} \cdot \vec{e} = \vec{e}; \quad B_{VU} \cdot \vec{e} = \vec{e}; \quad A_U \cdot \vec{e} = \vec{e}; \quad A_V \cdot \vec{e} = \vec{e}. \quad (1)$$

Таким образом, матрицы B_{UV} и B_{VU} описывают попадания при переходах между различными подмножествами, а матрицы A_U и A_V – возвращения в одноименные подмножества на соседних циклах.

5. Начальные условия циклов

Итак, циклическое функционирование вероятностной системы заключается в последовательных переходах между состояниями внутри подмножеств и между подмножествами состояний.

При циклическом функционировании нахождение системы в каждом подмножестве начинается при определенных начальных условиях. Эти начальные условия могут меняться

от цикла к циклу или стабилизироваться в стационарном режиме. Очевидно, что от начальных условий циклов зависят вероятностные характеристики подмножеств и, следовательно, характеристики системы.

Формально матрицы A_U и A_V являются матрицами переходных вероятностей некоторой новой марковской цепи. Это позволяет рассматривать переходный и установившийся режимы при циклическом функционировании системы.

В начальный период функционирования системы наблюдается переходный режим, в котором распределения начальных вероятностей циклов зависят от номера цикла c , то есть меняются от цикла к циклу. Однако после достаточно большого числа циклов (теоретически при $c \rightarrow \infty$) система переходит в стационарный режим, то есть режим, в котором начальные распределения подмножеств перестают зависеть от номера цикла c . Таким образом, в стационарном режиме начальные условия циклов стабилизируются.

Пусть для определенности процесс начинается в подмножестве U . Первый цикл будем считать начальным. На первом цикле задано распределение начальных вероятностей $\bar{r}_U(1) = \|r_U(1, i)\|$, где $r_U(1, i)$ – вероятность того, что состояние u_i является начальным на первом цикле. Очевидно, что $\bar{r}_U(2) = \|r_U(2, i)\| = \bar{r}_U(1) \cdot A_U$, $\bar{r}_U(3) = \|r_U(3, i)\| = \bar{r}_U(1) \cdot A_U^2$ и т.д., то есть

$$\bar{r}_U(c) = \|r_U(c, i)\| = \bar{r}_U(1) \cdot A_U^{c-1}. \quad (2)$$

Распределение вероятностей состояний подмножества V на c -м цикле будет иметь вид:

$$\bar{r}_V(c) = \|r_V(c, i)\| = \bar{r}_U(c) \cdot B_{UV} = \bar{r}_U(1) \cdot A_U^{c-1} \cdot B_{UV}, \quad (3)$$

где $r_V(c, i)$ – вероятность того, что состояние v_i является начальным при переходе в подмножество V на c -м цикле.

Итак, время эксплуатации системы разделяется на два режима: переходный и стационарный. В переходном режиме распределения начальных вероятностей циклов меняются от цикла к циклу, а в стационарном не зависят от номера цикла, при этом

$$\bar{r}_U = \|r_U(i)\| = \lim_{c \rightarrow \infty} \bar{r}_U(c) \quad (4)$$

при любом $\bar{r}_U(1)$. Существование предельных вероятностей в стационарном периоде означает, что распределение $\bar{r}_U(c)$ перестаёт зависеть от номера цикла.

Формулы для вычисления начальных условий для UV -цикла в переходном режиме, а также соотношения между начальными распределениями в стационарном режиме приведены в табл. 3.

Таблица 3. Начальные условия UV -циклов

Начальные условия	Формулы для вычисления
1. Распределение начальных вероятностей подмножества U на c -м цикле	$\bar{r}_U(c) = \ r_U(c, i)\ = \bar{r}_U(1) \cdot A_U^{c-1}$
2. Распределение начальных вероятностей подмножества V на c -м цикле	$\bar{r}_V(c) = \ r_V(c, i)\ = \bar{r}_U(1) \cdot A_U^{c-1} \cdot B_{UV}$
3. Распределение начальных вероятностей подмножества U в стационарном режиме	$\bar{r}_U = \ r_U(i)\ = \bar{r}_V \cdot B_{VU}$
4. Распределение начальных вероятностей подмножества V в стационарном режиме	$\bar{r}_V = \ r_V(i)\ = \bar{r}_U \cdot B_{UV}$

В таблице обозначено:

$r_U(c, i)$ – вероятность того, что состояние u_i является начальным на c -м цикле;

$r_V(c, i)$ – вероятность того, что состояние v_i является начальным на c -м цикле;

$r_U(i)$ – вероятность того, что состояние u_i является начальным при вхождении в подмножество U в стационарном режиме;

$r_V(i)$ – вероятность того, что состояние v_i является начальным при вхождении в подмножество V в стационарном режиме.

Необходимо отметить, что рассмотренные векторы являются стохастическими, то есть

$$\bar{r}_U \cdot \dot{e} = 1; \quad \bar{r}_V \cdot \dot{e} = 1. \quad (5)$$

Следует также отметить, что соотношения (4) являются теоретическими. В реальных моделях система может находиться в установившемся режиме начиная даже с первого или второго цикла. Зачастую начальное распределение вероятностей состояний в стационарном режиме находится из физических соображений, то есть нет необходимости искать предельные распределения математическими методами. Кроме того, по одному известному начальному распределению ($\bar{r}_U$ или $\bar{r}_V$) может быть найдено другое стационарное распределение. Поэтому при вероятностных расчетах целесообразно находить предельное распределение $\bar{r}_U$ или $\bar{r}_V$ для подмножества с меньшим числом состояний.

Итак, в переходном режиме начальные распределения циклов зависят от номера цикла, а в установившемся они «стабилизируются» и уже не зависят от него. Ввиду этого в переходном режиме обобщенные характеристики системы изменяются от цикла к циклу, а в стационарном не зависят от него.

6. Средняя продолжительность нахождения в подмножестве состояний

Мы ограничимся характеристиками подмножеств двух типов: средней продолжительностью и дисперсией продолжительности каждого подмножества для процесса в дискретном времени и для процесса в непрерывном времени.

Пусть v_U – случайное число шагов нахождения в подмножестве U при начальном условии $\bar{r}_U$. Вероятность того, что система будет находиться на k -м шаге в этом подмножестве, равна $\bar{r}_U \cdot P_{UU}^{k-1} \cdot \dot{e}$, то есть эта вероятность находится путём суммирования всех элементов матрицы P_{UU}^{k-1} с учетом начальных вероятностей. Вероятность перехода $U \rightarrow V$ на k -м шаге, то есть вероятность выхода из подмножества U на k -м шаге, равна $\bar{r}_U \cdot P_{UU}^{k-1} \cdot P_{UV} \cdot \dot{e}$. Поэтому математическое ожидание числа шагов нахождения в подмножестве U при данном начальном условии вычисляется по формуле:

$$n_U = M(v_U) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \bar{r}_U \cdot P_{UU}^{k-1} \cdot P_{UV} \cdot \dot{e} = \bar{r}_U \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P_{UU}^{k-1} \right) \cdot P_{UV} \cdot \dot{e}, \quad (6)$$

где $P_{UU}^0 = E$ – единичная матрица.

Матричный ряд в (6) сходится к следующей сумме (приводится без вывода):

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P_{UU}^{k-1} = \left((E - P_{UU})^{-1} \right)^2. \quad (7)$$

Таким образом,

$$n_U = M(v_U) = \bar{r}_U \cdot \left((E - P_{UU})^{-1} \right)^2 \cdot P_{UV} \cdot \dot{e}. \quad (8)$$

Это выражение можно упростить, пользуясь формулой для вероятностей попаданий при переходе $U \rightarrow V$ (табл. 2) и её свойством (1):

$$n_U = M(v_U) = \bar{r}_U \cdot (E - P_{UU})^{-1} \cdot B_{UV} \cdot \dot{e} = \bar{r}_U \cdot (E - P_{UU})^{-1} \cdot \dot{e}. \quad (9)$$

В [9] матрица $N_U = \|n_U(i, j)\| = (E - P_{UU})^{-1}$ была названа фундаментальной матрицей подмножества U . Здесь $n_U(i, j)$ – среднее число шагов нахождения в состоянии $u_j \in U$ до выхода из U при условии, что состояние $u_i \in U$ является начальным при вхождении в это подмножество.

Итак, среднее число шагов нахождения в подмножестве U находится путём суммирования всех элементов фундаментальной матрицы с учётом начального распределения. Формулы для вычисления среднего числа шагов нахождения в подмножествах U и V в переходном и стационарном режимах приведены в табл. 4.

Среднее время нахождения в подмножестве состояний для процесса в непрерывном времени находится путем решения системы дифференциальных уравнений для однородного процесса в матричном виде, при этом решение записывают в виде матричной экспоненты [1]. Интегрирование матричной экспоненты приводит к матрице средних условных времён нахождения в состояниях подмножества [7, 8]:

$$T_U = \|t_U(i, j)\| = -\Lambda_{UU}^{-1}, \quad (10)$$

где $t_U(i, j)$ – среднее время нахождения в состоянии $u_j \in U$ до выхода из U при условии, что состояние $u_i \in U$ является начальным при вхождении в это подмножество.

Обозначим через τ_U случайное время нахождения процесса в подмножестве состояний U . Математическое ожидание этого времени находится путём суммирования всех элементов этой матрицы с учётом начального распределения вероятностей этого подмножества:

$$t_U = M(\tau_U) = -\bar{r}_U \cdot \Lambda_{UU}^{-1} \cdot \dot{e}. \quad (11)$$

Формулы для вычисления среднего времени нахождения в подмножествах U и V в переходном и стационарном режимах приведены в табл. 4.

Таблица 4. Средние продолжительности нахождения в подмножествах в переходном и стационарном режимах

Наименование характеристики	в дискретном времени	в непрерывном времени
1. Средняя продолжительность нахождения в подмножестве U на c -м цикле	$n_U(c) = \bar{r}_U(c) \cdot (E - P_{UU})^{-1} \cdot \dot{e}$	$t_U(c) = -\bar{r}_U(c) \cdot \Lambda_{UU}^{-1} \cdot \dot{e}$
2. Средняя продолжительность нахождения в подмножестве V на c -м цикле	$n_V(c) = \bar{r}_V(c) \cdot (E - P_{VV})^{-1} \cdot \dot{e}$	$t_V(c) = -\bar{r}_V(c) \cdot \Lambda_{VV}^{-1} \cdot \dot{e}$
3. Средняя продолжительность нахождения в подмножестве U в стационарном режиме	$n_U = \bar{r}_U \cdot (E - P_{UU})^{-1} \cdot \dot{e}$	$t_U = -\bar{r}_U \cdot \Lambda_{UU}^{-1} \cdot \dot{e}$
4. Средняя продолжительность нахождения в подмножестве V в стационарном режиме	$n_V = \bar{r}_V \cdot (E - P_{VV})^{-1} \cdot \dot{e}$	$t_V = -\bar{r}_V \cdot \Lambda_{VV}^{-1} \cdot \dot{e}$

В таблице обозначено:

$n_U(c)$ [$n_V(c)$] – среднее число шагов нахождения в подмножестве U [V] на c -м цикле;

$t_U(c)$ [$t_V(c)$] – среднее время нахождения в подмножестве U [V] на c -м цикле;

n_U [n_V] – среднее число шагов нахождения в подмножестве U [V] в стационарном режиме;

t_U [t_V] – среднее время нахождения в подмножестве U [V] в стационарном режиме.

Итак, средняя продолжительность нахождения в подмножестве состояний в переходном и стационарном режимах является линейной комбинацией продолжительностей во всех состояниях с весовыми коэффициентами, равными начальным вероятностям состояний при вхождении в подмножество.

По формулам табл. 4 могут быть найдены средние продолжительности нахождения в одном состоянии w_i после попадания в него как частный случай приведённых формул. Среднее число шагов нахождения в этом состоянии для процесса в дискретном времени будет равно $n_i = 1/(1 - p_{ii})$, а среднее время нахождения в этом состоянии для процесса в непрерывном времени составит $t_i = -1/\lambda_{ii}$.

7. Дисперсия числа шагов нахождения в подмножестве состояний

Перейдём к дисперсии продолжительности нахождения в подмножестве состояний. Формулы для вычисления дисперсии будем выводить для стационарного распределения начальных вероятностей подмножества.

Вероятность того, что на k -м шаге система будет находиться в подмножестве U , равна $p_U(k) = \bar{r}_U \cdot P_{UU}^{k-1} \cdot \dot{e}$, где $k = 1, 2, 3, \dots$; $P_{UU}^0 = E$ – единичная матрица; $\bar{r}_U$ – стохастический вектор. Вероятность выхода из подмножества U на k -м шаге равна $\bar{r}_U \cdot P_{UU}^{k-1} \cdot P_{UV} \cdot \dot{e}$. Поэтому математическое ожидание квадрата числа шагов определяется рядом:

$$M(v_U^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \bar{r}_U \cdot P_{UU}^{k-1} \cdot P_{UV} \cdot \dot{e} = \bar{r}_U \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot P_{UU}^{k-1} \right) \cdot P_{UV} \cdot \dot{e}. \quad (12)$$

Сумма матричного ряда в (11) приведена без вывода:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot P_{UU}^{k-1} = (E + P_{UU}) \cdot \left((E - P_{UU})^{-1} \right)^3. \quad (13)$$

Заменим ряд в (11) на эту сумму:

$$M(v_U^2) = \bar{r}_U \cdot (E + P_{UU}) \cdot \left((E - P_{UU})^{-1} \right)^3 \cdot P_{UV} \cdot \dot{e}. \quad (14)$$

С учётом формулы для матрицы B_{UV} и её свойства выражение (13) можно упростить:

$$M(v_U^2) = \bar{r}_U \cdot (E + P_{UU}) \cdot \left((E - P_{UU})^{-1} \right)^2 \cdot \dot{e}. \quad (15)$$

Квадрат математического ожидания получается из формулы для n_U :

$$M^2(v_U) = (n_U)^2 = \bar{r}_U \cdot (E - P_{UU})^{-1} \cdot R_U \cdot (E - P_{UU})^{-1} \cdot \dot{e}, \quad (16)$$

где $R_U = \dot{e} \cdot \bar{r}_U$ – матрица, каждая строка которой равна строке $\bar{r}_U$.

Выражение для дисперсии числа шагов нахождения в подмножестве состояний U :

$$D(v_U) = M(v_U^2) - M^2(v_U) = \bar{r}_U \cdot \left[(E + P_{UU}) \cdot (E - P_{UU})^{-1} - (E - P_{UU})^{-1} \cdot R_U \right] \cdot (E - P_{UU})^{-1} \cdot \dot{e}. \quad (17)$$

Матрицы $(E + P_{UU})$ и $(E - P_{UU})^{-1}$ перестановочны, поэтому

$$D(v_U) = \bar{r}_U \cdot (E - P_{UU})^{-1} \cdot (E + P_{UU} - R_U) \cdot (E - P_{UU})^{-1} \cdot \dot{e}. \quad (18)$$

Частный случай одного состояния: подмножество состоит из одного состояния $U = \{u_i\}$. Дисперсия числа шагов нахождения в этом состоянии после попадания в него при подстановке: $\bar{r}_U = 1$, $E = 1$, $P_{UU} = p_{ii}$, $R_U = 1$: $D(v_i) = p_{ii} / (1 - p_{ii})^2$.

8. Дисперсия времени нахождения в подмножестве состояний

Перейдем к дисперсии времени τ_U нахождения в подмножестве состояний U для процесса в непрерывном времени. Математическое ожидание квадрата этого времени

$$M(\tau_U^2) = \int_0^{\infty} p_U(t) dt^2 = - \int_0^{\infty} t^2 \cdot p'_U(t) dt, \quad (19)$$

где $p_U(t)$ – вероятность того, что в момент времени t процесс находится в подмножестве U . Очевидно, что эта вероятность находится путём суммирования всех элементов матрицы $P_U(t)$, которая является решением матричного дифференциального уравнения $P'_U(t) = P_U(t) \cdot \Lambda_{UU}$ в виде матричной экспоненты:

$$p_U(t) = \bar{r}_U \cdot P_U(t) \cdot \dot{e} = \bar{r}_U \cdot \exp(\Lambda_{UU} \cdot t) \cdot \dot{e}. \quad (20)$$

Математическое ожидание квадрата времени τ_U сводится к интегрированию матричной экспоненты:

$$M(\tau_U^2) = \bar{r}_U \cdot \left(\int_0^{\infty} \exp(\Lambda_{UU} t) dt^2 \right) \cdot \dot{e} = 2 \cdot \bar{r}_U \cdot \left(\Lambda_{UU}^{-1} \right)^2 \cdot \dot{e}. \quad (21)$$

$$\text{Здесь } \int_0^{\infty} P_U(t) dt^2 = \int_0^{\infty} \exp(\Lambda_{UU} t) dt^2 = 2 \cdot \left(\Lambda_{UU}^{-1} \right)^2.$$

Квадрат математического ожидания времени получается из формулы для t_U :

$$M^2(\tau_U) = (t_U)^2 = \left(\bar{r}_U \cdot \Lambda_{UU}^{-1} \cdot \dot{e} \right)^2 = \bar{r}_U \cdot \Lambda_{UU}^{-1} \cdot R_U \cdot \Lambda_{UU}^{-1} \cdot \dot{e}. \quad (22)$$

Подставим последние две формулы в формулу для дисперсии. Получим:

$$D(\tau_U) = M(\tau_U^2) - M^2(\tau_U) = \bar{r}_U \cdot \Lambda_{UU}^{-1} \cdot (2E - R_U) \cdot \Lambda_{UU}^{-1} \cdot \dot{e}. \quad (23)$$

Пояснение. В формуле (23) матрица R_U , вычитаемая из матрицы $2E$, имеет равные строки, при этом каждая ее строка равна начальному распределению состояний подмножества U .

Формулы для вычисления дисперсии продолжительности нахождения в подмножествах состояний приведены в табл. 5.

Таким образом, исходными характеристиками для вычисления математического ожидания и дисперсии времени нахождения в подмножестве состояний является матрица интенсивностей и начальное распределение вероятностей состояний этого подмножества. Вычисление этих характеристик сводится к обращению и умножению матриц, порядок которых равен числу состояний подмножества U . Следует отметить, что эти вычисления возможны только при известном начальном распределении вероятностей состояний подмножества U .

Для лучшего понимания природы полученного результата найдем дисперсию времени нахождения в состоянии w_i после попадания в него: $D(\tau_i) = (\lambda_{ii})^{-1} \cdot (2 - 1) \cdot (\lambda_{ii})^{-1} = 1/\lambda_{ii}^2$.

Таблица 5. Формулы для вычисления дисперсии продолжительности нахождения в подмножествах состояний в стационарном режиме

1. Процесс в дискретном времени: дисперсия числа шагов нахождения в подмножестве U : $D(\nu_U) = \bar{r}_U \cdot (E - P_{UU})^{-1} \cdot (E + P_{UU} - R_U) \cdot (E - P_{UU})^{-1} \cdot \dot{e}$ в подмножестве V : $D(\nu_V) = \bar{r}_V \cdot (E - P_{VV})^{-1} \cdot (E + P_{VV} - R_V) \cdot (E - P_{VV})^{-1} \cdot \dot{e}$
2. Процесс в непрерывном времени: дисперсия времени нахождения в подмножестве U : $D(\tau_U) = \bar{r}_U \cdot \Lambda_{UU}^{-1} \cdot (2E - R_U) \cdot \Lambda_{UU}^{-1} \cdot \dot{e}$ в подмножестве V : $D(\tau_V) = \bar{r}_V \cdot \Lambda_{VV}^{-1} \cdot (2E - R_V) \cdot \Lambda_{VV}^{-1} \cdot \dot{e}$

9. Характеристики циклов системы

Итак, вероятностные характеристики подмножеств состояний зависят от начальных вероятностей состояний. Поэтому характеристики циклов системы также зависят от начальных вероятностей. В табл. 6 приведены формулы для вычисления характеристик циклов системы в переходном и стационарном режимах. Исходными данным для вычисления средней продолжительности и дисперсии продолжительности нахождения в подмножестве состояний являются исходные матрица переходных вероятностей и матрица интенсивностей переходов, а также начальное распределение вероятностей состояний этого подмножества. Вычисление этих характеристик сводится к оперированию с матрицами, порядок которых определяется числом состояний подмножества. Процессы в подмножествах U и V будем считать независимыми, поэтому дисперсии также суммируются.

Таблица 6. Характеристики циклов системы

Наименование характеристики	в дискретном времени	в непрерывном времени
1. Средняя продолжительность цикла в переходном режиме	$n_{UV}(c) = n_U(c) + n_V(c)$	$t_{UV}(c) = t_U(c) + t_V(c)$
2. Дисперсия продолжительности цикла в переходном режиме	$D(v_{UV}, c) =$ $= D(v_U, c) + D(v_V, c)$	$D(\tau_{UV}, c) =$ $= D(\tau_U, c) + D(\tau_V, c)$
3. Средняя продолжительность цикла в стационарном режиме	$n_{UV} = n_U + n_V$	$t_{UV} = t_U + t_V$
4. Дисперсия продолжительности цикла в стационарном режиме	$D(v_{UV}) = D(v_U) + D(v_V)$	$D(\tau_{UV}) = D(\tau_U) + D(\tau_V)$

В таблице обозначено:

v_{UV} [τ_{UV}] – случайное число шагов [случайное время] UV -цикла;

$D(v_U, c)$ [$D(\tau_U, c)$] – дисперсия числа шагов нахождения в подмножестве U [V] на c -м цикле;

$D(v_U)$ [$D(\tau_U)$] – дисперсия времени нахождения в подмножестве U [V] на c -м цикле;

$D(v_U)$ [$D(\tau_U)$] – дисперсия числа шагов нахождения в подмножестве U [V] в стационарном режиме;

$D(\tau_U)$ [$D(\tau_V)$] – дисперсия времени нахождения в подмножестве U [V] в стационарном режиме.

Приведённым характеристикам можно придать различный инженерно-технический смысл, поскольку зачастую показатели функционирования технических систем и их оборудования строятся на таких характеристиках, как математическое ожидание и дисперсия продолжительности нахождения в подмножестве состояний. Например, при исследовании надёжности нахождение системы в подмножестве работоспособных состояний позволяет вычислять среднее время и дисперсию времени безотказной работы системы.

К числу систем длительного использования относятся также телекоммуникационные сети [2], при циклическом функционировании которых учитываются отказы участков сети, методы резервирования и временные характеристики процесса восстановления. Оптимизация этих факторов делает возможным установление необходимого уровня готовности сети.

Пример моделирования системы длительного использования в непрерывном времени приведен в [4], где рассмотрено функционирование линии связи в условиях недостоверного контроля технического состояния. Множество состояний разбито на подмножества по признаку фаз эксплуатации: в состояниях подмножества U имеет место использование линии связи по назначению и проверки технического состояния, а в состоянии подмножества V – восстановление работоспособности. В [11] рассмотрена модель передачи файлов в дискретном времени, в которой учитываются помехи разной природы, которые приводят к ошибкам

на каждом шаге. На основе этой модели вычисляются вероятности одиночных ошибок, двух и трех ошибок подряд на дискретных шагах. Циклы системы формируются такими комбинациями ошибок.

10. Заключение

Представленная модель функционирования системы длительного использования в виде циклов является одним из возможных путей исследования такой системы. При таком подходе множество состояний системы разбивается на подмножества и рассматриваются переходы между состояниями как внутри подмножеств, так и между ними. Начальные условия подмножеств меняются от цикла к циклу в переходном режиме и стабилизируются в стационарном режиме. Соответственно числовые характеристики подмножеств меняются от цикла к циклу в переходном режиме и стабилизируются в стационарном режиме.

Представление функционирования системы в виде циклов позволяет находить вероятностные, временные, частотные характеристики, описывающие функционирование системы при её длительном использовании. Эти характеристики вычисляются матричным методом, при этом операции с матрицами могут быть выполнены в символьном или числовом виде. Операции с матрицами можно выполнять с помощью современных программных средств, таких как Mathcad и MATLAB.

Изложенный подход может найти применение в инженерной практике. Он может быть полезен студентам, аспирантам, инженерам и научным работникам, занимающимся проектированием новых и совершенствованием существующих систем, а также исследованием процессов, определяющих функционирование систем длительного использования.

Литература

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М: Наука, 1976.
2. Егунов М. М., Шувалов В. П. Резервирование и восстановление в телекоммуникационных сетях // Вестник СибГУТИ. 2012. № 2.
3. Замятина О. М. Моделирование систем: Учебное пособие. Томск: Изд-во ТПУ, 2009.
4. Зеленцов Б. П., Максимов В. П., Шувалов В. П. Модель функционирования линии связи в условиях недостоверного контроля технического состояния // Вестник СибГУТИ. 2015. № 3.
5. Зеленцов Б. П. Матричные модели функционирования оборудования систем связи // Вестник СибГУТИ. 2015. № 4.
6. Зеленцов Б. П. Аналитическое моделирование сложных вероятностных систем // Моделирование информационных сетей. Труды Вычислительного центра СО РАН. Серия: Информатика. Вып. 1. Новосибирск, 1994.
7. Зеленцов Б. П. Матричные модели надежности систем: инженерные методы расчета. Новосибирск: Наука, 1991.
8. Кельберт М. Я., Сухов Ю. М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. II: Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов. М.: МЦНМО, 2010.
9. Кемени Д., Снелл Д. Конечные цепи Маркова. М: Наука, 1970.
10. Советов Б. Я., Яковлев С. А. Моделирование систем: учебник для бакалавров. М.: Юрайт, 2013.
11. Bakharev A. V., Zelentsov B. P., Maximov V. P., Shuvalov V. P. Achieving of Reliable Multi-Gigabit Data Delivery in Presence of Multiple Receivers with P2M // 13th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering. Vol. 1. P. 2. Novosibirsk, 2016.

Статья поступила в редакцию 21.02.2017

Зеленцов Борис Павлович

д.т.н., профессор кафедры высшей математики СибГУТИ (630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86), e-mail: zelentsovb@mail.ru.

Cyclic functioning of long used systems

B. P. Zelentsov

An analytic model of long used systems functioning is considered. A set of systems' possible states is partitioned into two subsets and the functioning of the system is represented by transitions between the subsets. The transitions inside the subsets and between the subsets are described by Markov processes in discrete and continuous time. The transitions between the subsets are considered under transient and stationary conditions. The approach considered in this paper allows to simulate the functioning of different systems and its equipment.

Keywords: transition matrix in discrete and continuous time, mean time of being in a subset of states, transient and stationary conditions.