УДК 519.178+512.54

О целочисленных графах Кэли для знакопеременной группы A_n

А. Ю. Овчаренко

В работе рассматривается задача поиска целочисленных графов Кэли на знакопеременных группах A_n при $n = 4,5,6$. Для этого, в частности, определяются различные представления знакопеременных групп A_n произвольной степени в терминах порождающих и определяющих соотношений.

Ключевые слова: подстановка, знакопеременная группа, порождающие, определяющие соотношения, граф Кэли.

1. Введение

Современные фундаментальные и прикладные исследования в огромной мере используют компьютерные вычисления, поэтому актуальной является задача увеличения мощности компьютеров. Последовательные вычисления имеют очевидные ограничения, поэтому исследователи все больше заинтересованы в архитектуре параллельных вычислительных систем. В отличие от последовательного вычисления параллельное вычисление требует, чтобы процессоры имели возможность взаимодействовать друг с другом. Если это ограничение несущественно для небольших сетей, то для эффективности больших сетей становится критическим. Действительно, в больших сетях невозможно устроить так, чтобы каждый процессор был напрямую связан со всеми другими. Отсюда возникает необходимость контролировать свойства сети, такие как диаметр (максимальное расстояние между двумя процессорами) и отказоустойчивость.

Для изучения свойств межсетевого взаимодействия можно использовать инструменты и результаты из теории графов: представим процессор узлом, а канал связи между двумя процессорами – ребром; свойства полученного графа (такие как связность и диаметр) предоставляют непосредственную информацию о сети. Сравнение графов большого порядка (с количеством узлов, исчисляющимся тысячами) показало, что некоторые графы Кэли обладают очень хорошими свойствами. Но многое еще предстоит узнать об этих графах, и для этого требуется изучать их алгебраические свойства.

В настоящей работе исследуются графы Кэли знакопеременных групп A_n. Для того чтобы получить возможность изучать их алгебраические свойства, в работе [1] были найдены определяющие соотношения для различных систем образующих групп всех подстановок конечных множеств. В настоящей работе мы решаем аналогичную задачу для знакопеременных групп A_n. Подобные представления позволяют без особых вычислительных сложностей строить графы Кэли группы. Существенно более сложной задачей является задача определения, является ли данный граф Кэли целочисленным. В данной работе мы рассматриваем эту задачу для графов Кэли на знакопеременных группах A_n при $n = 4,5,6$. Необходимые определения можно найти в [2, 3]. Все необходимые понятия и определения, связанные с представлениями групп в терминах порождающих и определяющих соотношений, можно найти в [4].

2. Порождающие элементы знакопеременных групп

Лемма 1. Пусть A_n – знакопеременная группа подстановок степени $n \geq 3$. Любая подстановка из A_n представляется в виде произведения циклов длины 3. Иными словами, A_n порождается всеми циклами длины 3.

Доказательство.

Единицу группы A_n можно представить как $(123)^3$, что является произведением циклов длины 3. Пусть теперь σ – нетривиальный элемент из A_n. Запишем его как произведение транспозиций из S_n: $\sigma = \tau_1\tau_2 ... \tau_r$.

Число множителей r четно. Без ограничения общности можно считать, что соседние транспозиции не равны друг другу.

Если транспозиции τ_i и τ_{i+1} имеют один общий элемент, назовем его a, то: $\tau_i = (ab)$ и $\tau_{i+1} = (ac)$, где $b \neq c$. Тогда $\tau_i\tau_{i+1} = (ab)(ac) = (acb)$ является циклом длины 3.

Если транспозиции τ_i и τ_{i+1} независимые, то $n \geq 4$ и $\tau_i = (ab)$, $\tau_{i+1} = (cd)$, где элементы a, b, c, d разные. Следовательно, мы можем записать: $\tau_i\tau_{i+1} = (ab)(cd) = (ab)(bc)(bc)(cd) = (bca)(cdb) = (abc)(bcd)$, что является произведением циклов длины 3.

Лемма 2. Для $n \geq 3$ группа A_n порождается циклами длины 3 вида $(1ij)$, где $i \neq j$, $i, j > 2$.

Доказательство. В силу леммы 1 A_n порождается всеми циклами длины 3. Для любого тройного цикла (ijk), не содержащего 1, мы имеем $(ijk) = (1ij)(1jk)$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $a_1 = (123), a_2 = (124), a_3 = (125) \ldots , a_{n-1} = (1, 2, n)$.

Тогда $A_n = \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle$.

Доказательство. Поскольку A_n порождается циклами длины 3 вида $(1ij)$, где $i \neq j$, $i, j > 2$ (см. лемму 2), то нам достаточно найти выражение для произвольного $(1ij)$ в виде произведения a_i.

Мы имеем $(1ij) = (12j)\ (12i)\ (12j)\ (12j)$. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть $b_1 = (123), b_2 = (234), b_3 = (345) \ldots, b_{n-2} = (n-2, n-1, n)$.

Тогда $A_n = \langle b_1, \ldots, b_{n-2} \rangle$.

Доказательство. Поскольку $A_n = \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle$ (см. лемму 3), то нам достаточно найти выражение для произвольного a_i в виде произведения b_i. Прямые вычисления показывают, что $a_i = b_1 b_2 b_3 ... b_i ... b_3^{-1} b_2^{-1} b_1^{-1}$. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $c_1 = (123), c_2 = (134), c_3 = (145) \ldots , c_{n-2} = (1, n-1, n)$.

Тогда $A_n = \langle c_1, \ldots, c_{n-2} \rangle$.

Доказательство. Снова в силу леммы 3 достаточно найти выражение для произвольного a_i в виде произведения c_i. Легко показать, что $a_i = c_1 c_2 ... c_i$. Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть $d_1=(123), d_2=(12)(34), d_3=(12)(45),..., d_{n-1}=(12)(n-1,n)$.

Тогда $A_n=\langle d_1, d_{n-1}\rangle$.

Доказательство. Поскольку $A_n=\langle b_1,\dots,b_{n-2}\rangle$ (см. лемму 4), то нам достаточно найти выражение для произвольного b_i в виде произведения d_1 и d_i. Мы имеем $b_1=d_1$, $b_2=(d_1d_2)^2$, $b_i=(i,i+1,i+2)=d_1d_id_1d_{i-1}$. Лемма доказана.

Заметим, что для доказательства леммы 6 мы могли найти выражение для произвольного c_i в виде произведения d_1 и d_i. Мы имеем $c_1=d_1$, $c_i=(1,\mathrm{i}+1,\mathrm{i}+2)=d_id_1d_2d_1d_3d_1d_2d_1...d_{i-1}d_1=d_ic_1c_2...c_{i-1}$.

Доказательство следующего предложения можно найти в [5], но мы приводим его для полноты изложения.

Предложение 1.

Пусть $G_n=\left\langle x_1,\dots,x_{n-2}\,\middle|\,x_1^3=x_i^2=(x_ix_{i+1})^3=(x_ix_j)^2=1, где \left|j-i\right|\ge 2,\ 2\le i,j\le n-2\right\rangle$.

Тогда $A_n\simeq G_n$.

Доказательство. Покажем, что знакопеременная группа A_n порождается элементами s_i, $1\le i\le n-2$, удовлетворяющими следующим соотношениям: $s_1^3=s_i^2=1$, $(s_is_{i+1})^3=1$, $(s_is_j)^2=1$, где $|j-i|\ge 2,\ 2\le i,j\le n-2$.

Достаточно рассмотреть случай $i+1<j$. Пусть $s_1=(123)$ и $s_i=(12)(i+1,i+2)$, $2\le i\le n-2$. Очевидно, что s_i принадлежат A_n и удовлетворяют указанным соотношениям. Докажем, что они порождают A_n.

Для $n=3$ это тривиально, так как $A_3=\langle s_1\rangle$. Предположим, что $\langle s_1,...,s_{n-3}\rangle$ порождают знакопеременную группу степени $n-1$. Покажем, что для любого j существует такое $g\in A_n$, что $n^g=j$. Для $j=n$ g является произведением s_i, где $1\le i\le n-3$, что и требовалось доказать.

Если $j<n$, то существует подстановка t, которая равна произведению s_i, где $1\le i\le n-3$, такая, что $n^{gt}=j^t=n-1$. Отсюда следует: $n^{gts_{n-1}}=n$, таким образом, $gts_{n-2}\in\langle s_i,...,s_{n-3}\rangle$. Предложение доказано.

3. Основные результаты

В работе [1] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $G=\langle x_1,\dots,x_m\,|\,R\rangle$, $\{x_1,\dots,x_m\}$ – порождающее множество, $R=\{v_1(x_1,\dots,x_m),\dots,v_s(x_1,\dots,x_m)\}$ – набор определяющих соотношений группы G.

Предположим, что $X=\{y_1,\ldots,y_n\}$, $G=\langle X\rangle$ и $x_i=w_i=w_i(y_1,\ldots,y_n)$, $i=1,\ldots,m$, $y_i=u_i=u_i(x_1,\ldots,x_m)$, $i=1,2\ldots n$. Тогда $G\simeq\langle y_1,\ldots,y_n\,|\,S\rangle$, где $S=\left\{v_1(w_1,\ldots,w_m),\ldots,v_s(w_1,\ldots,w_m),u_1(w_1,\ldots,w_m)y_1^{-1},\ldots,u_n(w_1,\ldots,w_m)y_n^{-1}\right\}$.

Используя представление знакопеременной группы A_n из предложения 1 и теорему 1, найдем наборы определяющих соотношений, соответствующих наборам порождающих из лемм 3 – 6.

Предложение 2.

Пусть $$\mathrm{G}=\left\langle x_1,\ldots,x_{n-2}\;\middle|\;\begin{array}{c} x_i^3=(x_{i+1}x_ix_{i-1}\ldots x_1x_{i+1})^2=\left[(x_{i-1}x_ix_{i+1})^2,x_i^{-1}\right]=(x_{i-1}x_{i+1}x_i)^2= \\ (x_ix_{i-1}x_{i+1})^2=(x_1x_{i+1}x_ix_{i-1}\ldots x_1)^2=\left[x_i,x_j\right]=1, \\ где\,|j-i|>3,\ 1\le i,j\le n-2\end{array}\right\rangle.$$

Тогда $G\simeq A_n$.

Доказательство. Пусть b_i и d_i – подстановки из лемм 4 и 6. Если $d_1=(123)$, $d_i=(12)(\mathrm{i}+1,i+2)$, то несложно понять, что $d_1=b_1$, $d_i=b_{i+1}b_ib_{i-1}\ldots b_1b_{i+1}$ и $b_1=d_1$, $b_2=(d_1d_2)^2, b_i=d_1d_id_1d_{i-1}$. Выразим слова $v_1=d_1^3$, $v_2=d_i^2$, $v_3=(d_id_{i+1})^3$, $v_4=(d_id_j)^2$ через b_i:

1) $v_1=d_1^3=b_1^3=1$, так как $b_i^3=1$.

2) $v_2=d_i^2=(b_{i+1}b_ib_{i-1}\ldots b_1b_{i+1})^2=1$.

3) $v_3=(d_id_{i+1})^3=\left((b_{i+1}b_ib_{i-1}\ldots b_1b_{i+1})(b_{i+2}b_{i+1}b_i\ldots b_1b_{i+2})\right)^3=1$.

4) $v_4=(d_id_j)^2=\left(b_{i+1}b_ib_{i-1}\ldots b_1b_{i+1}\,b_{j+1}\ldots b_1b_{j+1}\right)^2=1$.

Теперь вычислим значение слов $u_1(w_1,\ldots,w_{n-1})b_1^{-1}$, $u_2(w_1,\ldots,w_{n-1})b_2^{-1}$, $u_i(w_1,\ldots,w_{n-1})b_i^{-1}$.

1) $u_1(w_1,\ldots,w_{n-1})b_1^{-1}=b_1b_1^{-1}=1$.

2) $u_2(w_1,\ldots,w_{n-1})b_2^{-1}=(d_1d_2)^2\,b_2^{-1}=(b_1b_3b_2b_1b_3)^2\,b_2^{-1}=b_1b_3b_2b_1b_3b_2^3b_1b_3b_2b_1b_3b_2^{-1}=$

$=(b_1b_3b_2)^2b_2(b_2b_1b_3)^2b_2^{-1}=\left[(b_2b_1b_3)^2,b_2^{-1}\right]=1$ с учетом соотношений $(b_{i-1}b_{i+1}b_i)^2=1$ и $(b_ib_{i-1}b_{i+1})^2=1$.

3) $u_i(w_1,\ldots,w_{n-1})b_i^{-1}=d_1d_id_1d_{i-1}b_i^{-1}=b_1b_{i+1}b_ib_{i-1}\ldots b_1b_{i+1}b_1b_ib_{i-1}\ldots b_1b_ib_i^{-1}=(b_1b_{i+1}b_ib_{i-1}\ldots b_1)^2=1$, учитывая, что $b_ib_j=b_jb_i$, $\left[b_i,b_j\right]=1$ при $|j-i|>3$.

Тогда по теореме 1 $A_n\simeq G$.

Предложение 3.

Пусть $$\mathrm{G}=\left\langle x_1,\ldots,x_{n-2}\;\middle|\;\begin{array}{c} x_i^3=(x_1x_2\ldots x_i^2)^2=(x_i^2x_{i+1}^2)^3=(x_i^2x_{i+1}\ldots x_j^2)^2=1, \\ где\,|j-i|>3,\ 1\le i,j\le n-2\end{array}\right\rangle.$$

Тогда $G\simeq A_n$.

Доказательство. Пусть c_i и d_i – подстановки из лемм 5 и 7. Если $d_1=(123)$, $d_i=(12)(\mathrm{i}+1,i+2)$, то несложно понять, что $d_1=c_1$, $d_i=c_1c_2...c_i^2$ и $c_1=d_1$, $c_i=(1,\mathrm{i}+1,\mathrm{i}+2)=d_id_1d_2d_1d_3d_1d_2d_1...d_{i-1}d_1=d_id_1c_2c_3...c_{i-1}$. Выразим слова $v_1=d_1^{\,3}$, $v_2=d_i^2$, $v_3=(d_id_{i+1})^3$, $v_4=\left(d_id_j\right)^2$ через c_i:

1) $v_1=d_1^{\,3}=c_1^{\,3}=1$, так как $c_i^{\,3}=1$.

2) $v_2=d_i^2=\left(c_1c_2...c_i^2\right)^2=1$.

3) $v_3=(d_id_{i+1})^3=\left((c_1c_2...c_i^2)(c_1c_2...c_ic_{i+1}^2)\right)^3=\left(c_1c_2...c_i^2c_1c_2...c_ic_i^{\,3}c_{i+1}^2\right)^3=\left(c_i^{\,2}c_{i+1}^2\right)^3=1$

с учетом соотношения $\left(c_1c_2...c_i^2\right)^2=1$.

4) $v_4=\left(d_id_j\right)^2=\left(\left(c_1c_2...c_i^2\right)\left(c_1c_2...c_ic_{i+1}...c_j^2\right)\right)^2=\left(\left(c_1c_2...c_i^2\right)\left(c_1c_2...c_ic_i^{\,3}c_{i+1}...c_j^2\right)\right)^2=\left(c_i^{\,2}c_{i+1}...c_j^2\right)^2=1$

с учетом соотношения $\left(c_1c_2...c_i^2\right)^2=1$.

Теперь вычислим значение слов $u_1\left(w_1,\ldots,w_{n-1}\right)c_1^{-1}$ и $u_i\left(w_1,\ldots,w_{n-1}\right)c_i^{-1}$.

1) $u_1\left(w_1,\ldots,w_{n-1}\right)c_1^{-1}=c_1c_1^{-1}=1$.

2) $u_i\left(w_1,\ldots,w_{n-1}\right)c_i^{-1}=d_id_1d_{i-1}d_1...d_2d_1c_i^{-1}=1$.

Тогда по теореме 1 $A_n\simeq G$.

Доказательство следующего предложения можно найти в [6].

Предложение 4.

$A_n=\left\langle x_1,\ldots,x_{n-2}\,\middle|\,x_i^{\,3}=(x_ix_j)^2=1, где\left|j-i\right|>3\right\rangle$.

Предложение 5.

Пусть $\mathrm{G}=\left\langle x_1,\ldots,x_{n-2}\,\middle|\,\begin{array}{c}x_i^{\,3}=\left(x_1x_2...x_i\right)^3=\left(\left(x_1x_2...x_i\right)^2\left(x_{i+1}...x_j\right)\right)^2=1,\\ где\left|j-i\right|>3,\ 1\le i,\,j\le n-2\end{array}\right\rangle$.

Тогда $G\simeq A_n$.

Доказательство. Будем использовать представления из предложения 4. Пусть c_i и a_i – подстановки из лемм 5 и 3. Если $a_i=(12i)$, то несложно понять, что $a_1=c_1$, $a_i=c_1c_2...c_i$ и $c_1=a_1$, $c_i=(1,i+1,i+2)=a_{i-1}^2a_i$. Выразим слова $v_1=a_i^{\,3}$, $v_2=\left(a_ia_j\right)^2$ через c_i:

1) $v_1=a_i^{\,3}=\left(c_1c_2...c_i\right)^3=1$.

2) $v_2=\left(a_ia_j\right)^2=\left(\left(c_1c_2...c_i\right)\left(c_1c_2...c_ic_{i+1}...c_j\right)\right)^2=\left(\left(c_1c_2...c_i\right)^2\left(c_{i+1}...c_j\right)\right)^2=1$.

Теперь вычислим значение слов $u_1\left(w_1,\ldots,w_{n-1}\right)c_1^{-1}$ и $u_i\left(w_1,\ldots,w_{n-1}\right)c_i^{-1}$.

1) $u_1\left(w_1,\ldots,w_{n-1}\right)c_1^{-1}=c_1c_1^{-1}=1$.

2) $u_i\left(w_1,\ldots,w_{n-1}\right)c_i^{-1}=a_{i-1}^2a_ic_i^{-1}=(c_1c_2...c_{i-1})(c_1c_2...c_{i-1})(c_1c_2...c_{i-1}c_i)c_i^{-1}=1$ с учетом соотношения $\left(c_1c_2...c_{i-1}\right)^3=1$.

Тогда по теореме 1 $A_n\simeq G$.

Предложение 6.

Пусть $\mathrm{G}=\left\langle x_1,\ldots,x_{n-2}\left|\begin{array}{l}x_i^3=\left(x_1x_2...x_i...x_2^{-1}x_1^{-1}\right)^3=(x_ix_{i+1}...x_j...x_{i+1}^{-1})^2=\\(x_{i-1}x_ix_{i+1}x_i^{-1})^2=\left[x_i,x_j\right]=1,\text{где}\left|j-i\right|>3,\ 1\le i,j\le n-2\end{array}\right.\right\rangle$.

Тогда $G\simeq A_n$.

Доказательство. Пусть b_i и a_i – подстановки из лемм 4 и 3. Если $a_i=\left(12i\right)$, то несложно понять, что $a_1=b_1$, $a_i=b_1b_2...b_i...b_2^{-1}b_1^{-1}$ и $b_1=a_1$, $b_2=a_1^2a_2a_1$, $b_i=\left(\mathrm{i},\mathrm{i}+1,\mathrm{i}+2\right)=a_{i-2}^2a_{i-1}^2a_ia_{i-1}a_{i-2}$. Выразим слова $v_1=a_i^3$, $v_2=\left(a_ia_j\right)^2$ через b_i:

1) $v_1=a_i^3=\left(b_1b_2...b_i...b_2^{-1}b_1^{-1}\right)^3=1$, учитывая соотношение $b_i^{-1}b_i=1$ и $b_i^3=1$.

2) $v_2=\left(a_ia_j\right)^2=\left(\left(b_1b_2...b_i...b_2^{-1}b_1^{-1}\right)\left(b_1b_2...b_ib_{i+1}...b_j...b_{i+1}^{-1}b_i^{-1}...b_2^{-1}b_1^{-1}\right)\right)^2=1$. После преобразования получаем определяющие соотношения $(b_ib_{i+1}...b_j...b_{i+1}^{-1})^2=1$, $(b_{i-1}b_ib_{i+1}b_i^{-1})^2=1$.

Теперь вычислим значение слов $u_1\left(w_1,\ldots,w_{n-1}\right)b_1^{-1}$, $u_2\left(w_1,\ldots,w_{n-1}\right)b_2^{-1}$, $u_{\mathrm{i}}\left(w_1,\ldots,w_{n-1}\right)b_i^{-1}$.

1) $u_1\left(w_1,\ldots,w_{n-1}\right)b_1^{-1}=b_1b_1^{-1}=1$.

2) $u_2\left(w_1,\ldots,w_{n-1}\right)b_2^{-1}=a_1^2a_2a_1b_2^{-1}=b_1^2b_1b_2b_1^{-1}b_1b_2^{-1}=1$, учитывая соотношения $b_i^3=1$, $b_i^{-1}b_i=1$.

3) $u_{\mathrm{i}}\left(w_1,\ldots,w_{n-1}\right)b_i^{-1}=a_{i-2}^2a_{i-1}^2a_ia_{i-1}a_{i-2}b_i^{-1}=b_1b_2...b_{i-4}b_{i-3}b_ib_{i-3}^{-1}b_{i-4}^{-1}...b_1^{-1}b_i^{-1}=1$, учитывая, что $b_ib_j=b_jb_i$, $\left[b_i,\mathrm{b}_j\right]=1$ при $\left|j-i\right|>3$.

Тогда по теореме 1 $A_n\simeq G$.

4. Пример графа Кэли на A_n при $n=4,5,6$

Графом Кэли $\Gamma=Cay\left(G,S\right)=\left(V,E\right)$ на группе G относительно порождающего множества S называется граф с множеством вершин $V=G$ и множеством ребер $E=\left\{\left\{g,h\right\}:g,h\in G,g^{-1},h\in S\right\}$. Иными словами, графом Кэли группы G по системе порождающих S является граф, вершинами которого являются элементы группы, и элемент g соединён ребром в точности с теми элементами, которые получаются домножением g на элемент из S.

Замечание. В случае если $S\ne S^{-1}$, вместо S берут объединение $S\bigcup S^{-1}$. Это позволяет считать граф Кэли неориентированным. Кроме того, он не содержит петель, так как единичный элемент не принадлежит S.

Понятно, что вид и свойства конкретного графа Кэли зависят от набора порождающих, на котором он построен.

Например, возьмем систему порождающих из леммы 3 разд. 2 для $n=4$: $A_n = \langle(123),(124)\rangle$ и построим для нее граф Кэли. Порождающее множество будет выглядеть следующим образом: $S=\{(123),(132),(124),(142)\}$, а соответствующий граф Кэли будет иметь такой вид:

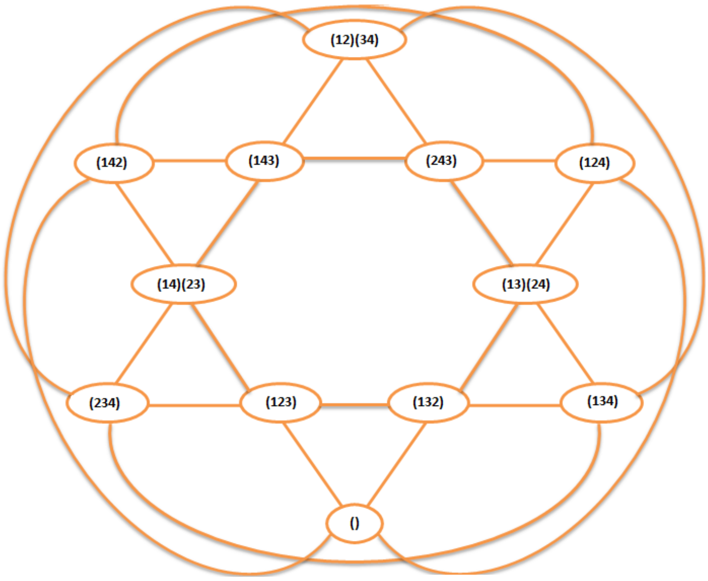

Рис. 1. Граф Кэли на $A_4 = \langle(123),(124)\rangle$

Спектр графа Γ определяется как множество вещественных собственных значений матрицы смежности [8]. Поскольку матрица смежности графа Кэли является симметричной (в силу неориентированности графа Кэли), то все собственные значения этой матрицы будут вещественными.

В силу определения, введенного Ф. Харари и А. Д. Швенком в 1974 г. в работе [7], граф G называется целочисленным, если его спектр состоит из целых чисел. В этой же работе они поставили задачу поиска целочисленных графов Кэли. Более точно, они сформировали следующий вопрос.

Вопрос [7]. Спектр каких графов состоит только из целых чисел?

Решение этого вопроса сводится к определению кратностей целочисленных собственных значений графа Кэли. Известно, что целое число может принадлежать спектру графа Кэли, только если его модуль не превосходит мощности порождающего множества S. Таким образом, для данного графа Кэли вопрос его целочисленности может быть решен за конечное число шагов.

К настоящему времени получено много результатов, касающихся графов Кэли на симметрических группах S_n. В частности, известен только один пример целочисленного графа Кэли для таких групп.

Предложение 7.

Пусть G_n – граф Кэли симметрической группы S_n по системе образующих $S=\{(1i)\mid 2\le i\le n\}$. Тогда G_n – целочисленный.

Нашей целью является изучение графов Кэли для знакопеременных групп. Мы работаем с системами порождающих из лемм 3–6 разд. 2. Полученные результаты приведены в следующей таблице. В графе «спектр» символ $(n)^k$ означает, что для графа Кэли на данном наборе порождающих число $n \in \mathbb{Z}$ является собственным значением кратности k.

Таблица 1. Спектры графов Кэли на A_n при $n = 4, 5, 6$

n	Наборы порождающих	Спектр	Целочисленный граф
$n=4$	$a_1=(123), a_2=(124)$	$(-2)^5, (0)^3, (2)^3, (4)^1$	да
	$b_1=(123), b_2=(234)$	$(-2)^5, (0)^3, (2)^3, (4)^1$	да
	$c_1=(123), c_2=(134)$	$(-2)^5, (0)^3, (2)^3, (4)^1$	да
	$d_1=(123), d_2=(12)(34)$	$(-2)^3, (-1)^3, (0)^2, (2)^3, (3)^1$	да
$n=5$	$a_1=(123), a_2=(124), a_3=(125)$	$(-3)^{14}, (-2)^5, (-1)^{12}$, $(1)^{14}, (2)^6, (4)^8, (6)^1$	да
	$b_1=(123), b_2=(234), b_3=(345)$	$(-3)^{10}, (-1)^{10}, (2)^5, (6)^1$	нет
	$c_1=(123), c_2=(134), c_3=(145)$	$(-3)^{10}, (-1)^{10}, (2)^5, (6)^1$	нет
	$d_1=(123), d_2=(12)(34), d_3=(12)(45)$	$(-3)^4, (-2)^5, (0)^5, (4)^1$	нет
$n=6$	$a_1=(123), a_2=(124), a_3=(125)$, $a_4=(126)$	$(-4)^{42}, (-3)^{48}, (-2)^{39}$, $(-1)^{32}, (0)^{45}, (1)^{48}$, $(2)^{42}, (4)^{48}, (6)^{15}, (8)^1$	да
	$b_1=(123), b_2=(234), b_3=(345)$, $b_4=(456)$	$(-4)^{19}, (-2)^5, (0)^{20}, (1)^5$, $(2)^{10}, (5)^5, (8)^1$	нет
	$c_1=(123), c_2=(134), c_3=(145)$, $c_3=(156)$	$(-4)^5, (-2)^{24}, (0)^{15}, (8)^1$	нет
	$d_1=(123), d_2=(12)(34), d_3=(12)(45)$, $d_4=(12)(56)$	$(-4)^5, (-2)^9, (-1)^{10}, (0)^9$, $(2)^5, (5)^1$	нет

Выражение благодарности

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Д. В. Лыткиной за помощь в подготовке работы.

Литература

1. *Овчаренко А. Ю.* Об одном способе поиска больших подгрупп в группах симметрий графов // Вестник СибГУТИ. 2017. № 1. С. 58–64.
2. *Brouwer A. E., Haemers W. H. Spectra of graphs*. Springer, 2011.
3. *Lovász L. Eigenvalues of graphs*, 2007.
4. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. *Huppert B. Endliche Gruppen*. I . Springer–Verlag, 1967.
6. *Мазуров В. Д.* Характеризация знакопеременных групп. II // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 2. С. 203–214.
7. *Wang L.* A survey of results on integral trees and integral graphs, Department of Applied Mathematics, Faculty of EEMCS, University of Twente The Netherlands, Memorandum № 1763 (2005), 1–22.
8. *Harary F. and Schwenk A. J.* Which graphs have integral spectra?, In Graphs and Combinatorics, Springer–Verlag, Berlin. 1974. P. 45–51.

Статья поступила в редакцию 16.03.2017

Овчаренко Алёна Юрьевна
аспирант СибГУТИ (630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86), e-mail: shmatova_aaa@mail.ru.

On integral Cayley graphs for the alternating group A_n

A. Ovcharenko

In this paper, we consider the problem of finding integral Cayley graphs for the alternating groups A_n for $n = 4, 5, 6$. For this purpose, we provide different representations for the alternating groups A_n of arbitrary degree in terms of generating and defining relations.

Keywords: alternating group, presentation, generator, relator, Cayley graph.