

УДК 681.324, 519.21

Стохастическая модель для оценки эффективности функционирования масштабируемых распределенных вычислительных систем при групповом восстановлении*

В. А. Павский, К. В. Павский

Рассматривается модель функционирования распределенных масштабируемых вычислительных систем (ВС) при групповом восстановлении отказавших машин. Формализация модели выполнена системой дифференциальных уравнений, в которой неизвестными являются распределения вероятностей. В качестве показателей эффективности функционирования ВС приняты математическое ожидание и дисперсия числа исправных машин вычислительной системы. Решения получены в аналитическом виде.

Ключевые слова: распределенные масштабируемые вычислительные системы, математическая модель, групповое обслуживание, число исправных машин, аналитические решения.

1. Введение

Современные распределенные вычислительные системы (ВС) относятся к высокопроизводительным вычислительным средствам [1]. Количество элементарных машин (ЭМ) [1] в таких системах варьируется от нескольких десятков до сотен тысяч [2, 3]. Увеличение числа ЭМ в системе провоцирует увеличение числа отказов [4]. Практика показывает, что в масштабируемых вычислительных системах время между различными видами отказов может измеряться часами [5]. Поэтому актуальными становятся как организация отказоустойчивого функционирования [6–8], так и анализ эффективности функционирования ВС [9, 10] с учетом ее живучести.

Для оценки эффективности функционирования ВС используют ряд показателей, среди которых присутствуют показатели потенциальной живучести [1], в основе которых лежат вероятности и числовые характеристики случайных величин. Показатели потенциальной живучести вычислительных систем (ВС) учитывают то обстоятельство, что при решении задач используются все исправные ЭМ, число которых, вообще говоря, случайно. Другими словами, при определении показателей живучести следует учесть, что параллельные программы сложных задач при их реализации на живучих ВС способны задействовать суммарную производительность всех исправных ЭМ системы. Допуская математическую идеализацию, ВС можно рассматривать как объект стохастический.

Описание модели. Предлагается стохастическая модель функционирования распределенной ВС, в которой ЭМ не абсолютно надежные [1]. Считаем, что в начальный момент времени в составе ВС было n исправных ЭМ. При этом количество машин в системе можно увеличивать. Допуская дальнейшую математическую идеализацию модели, считаем,

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №16-07-00172, 15-07-00653).

что такое увеличение ЭМ в ВС возможно до бесконечности. В случайные моменты времени с интенсивностью μ осуществляется восстановление группами по r ЭМ (рис.1). Под восстановлением понимаем включение в состав ВС некоторого числа исправных машин, равного размеру группы. Каждая из машин системы отказывает с интенсивностью λ . Попробуем оценить потенциальные возможности по наращиванию системы. В качестве показателей эффективности (оценки потенциальной живучести) используем числовые характеристики – математическое ожидание числа исправных ЭМ и его дисперсию [1]. При построении модели функционирования ВС воспользуемся методами теории массового обслуживания, в которой модели такого класса формулируются по отработанной методике: составляется система дифференциальных уравнений, и в качестве неизвестных функций рассматриваются распределения вероятностей. Аналитическое решение таких систем далеко не всегда доступно, даже стационарное [1]. Из формализованной системой дифференциальных уравнений модели найдем аналитическое решение непосредственно для моментов, минуя распределение вероятностей состояний.

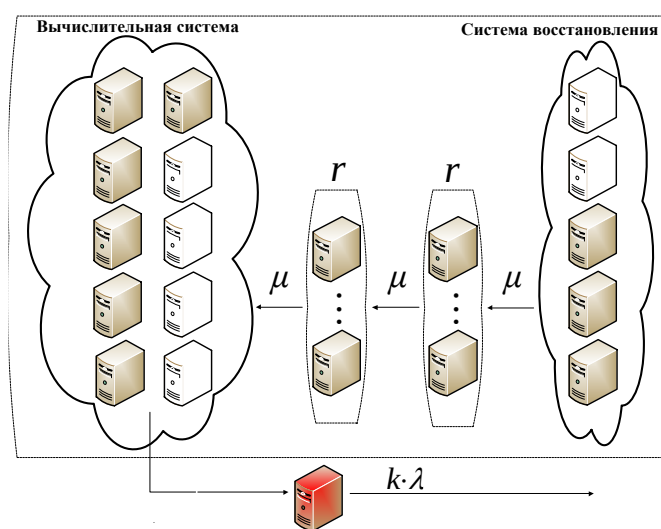


Рис. 1. Модель функционирования масштабируемой ВС при групповом восстановлении отказавших ЭМ

2. Математическая модель

На систему массового обслуживания (СМО) с бесконечным числом каналов поступает пуассоновский поток групп требований интенсивностью μ [11, 12]. Каждая группа состоит из r требований. В любой фиксированный момент времени $t \in [0, \infty)$ СМО находится в одном из множества несовместных состояний C_k , где k – число требований, находящихся в СМО, включая недообслуженные требования. Время обслуживания каждого требования подчинено экспоненциальному распределению с параметром λ . Если система находится в состоянии C_k , то одно из k требований покидает систему с интенсивностью $k\lambda$. Требуется найти математическое ожидание $M(t)$ номера состояния, в котором находится система при обслуживании требований и соответствующую дисперсию $D(t)$ при условии, что $M(0) = n$, $D(0) = 0$.

На рис. 2 представлена граф-схема состояний СМО, которая позволяет лучше понять связь между формулировкой модели и ее формализацией системой дифференциальных уравнений.

Пусть ξ – случайная величина, характеризующая число требований находящихся в СМО. Из (5) и свойств производящих функций [13, 14] следует, что

$$M\xi = \frac{\partial}{\partial z} F(1), \text{ а } D\xi = \frac{\partial^2}{\partial^2 z} F(1) + \frac{\partial}{\partial z} F(1) - \left(\frac{\partial}{\partial z} F(1) \right)^2.$$

После соответствующих преобразований над (7) получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} M(t) + \lambda M(t) = r\mu, \\ \frac{\partial}{\partial t} Q(t) + 2\lambda Q(t) = 2r\mu M(t) + r(r-1)\mu, \\ D(t) = Q(t) + M(t) - M^2(t), \end{cases} \quad (8)$$

где на основании (3) $M(0) = n$, $D(0) = 0$.

Решением для (8) с учетом (3) будет

$$\begin{cases} M(t) = \frac{r\mu}{\lambda} + \left(n - \frac{r\mu}{\lambda} \right) e^{-\lambda t}, \\ D(t) = \left(n^2 - n - \frac{r\mu}{\lambda} \left(2n - \frac{r\mu}{\lambda} + \frac{(r-1)}{2} \right) \right) e^{-2\lambda t} + \frac{r\mu}{\lambda} \left(\frac{r\mu}{\lambda} + 2 \left(n - \frac{r\mu}{\lambda} \right) e^{-\lambda t} \right) + \frac{r(r-1)\mu}{2\lambda} + M(t) - M^2(t) \end{cases}. \quad (9)$$

Для стационарного режима имеем

$$\begin{cases} M = \frac{r\mu}{\lambda}, \\ D = \frac{r^2\mu + r\mu}{2\lambda}, \\ \sigma = \sqrt{\frac{r^2\mu + r\mu}{2\lambda}}. \end{cases}$$

На рис. 3 представлен расчет математического ожидания с учетом дисперсии по формулам (9) при $\mu = 10^{-1}$ 1/ч, $\lambda = 10^{-3}$ 1/ч, $r = 20$, $n = 10^4$ ЭМ.

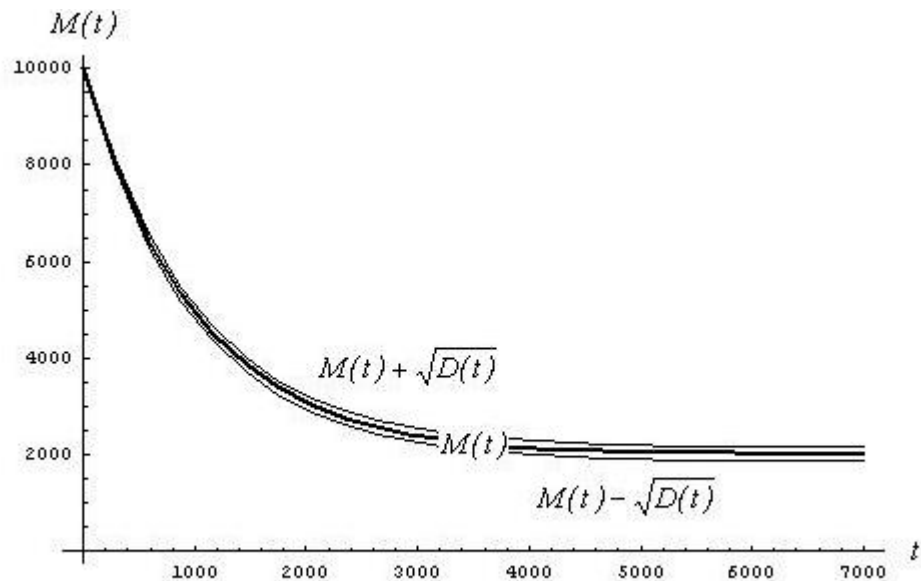


Рис. 3. Среднее число исправных машин с учетом дисперсии, время указано в часах

Из формул (9) и их графической реализации (рис. 3) также видно, что живучесть ВС и высокая производительность обеспечивается двумя тысячами ЭМ, в то время как надежность должна быть рассчитана исходя из десяти тысяч ЭМ. Следовательно, для достижения достаточной живучести при заданном объеме ВС необходимо повышение надежности элементной базы и других параметров, связанных с процессом выполнения параллельных программ.

4. Заключение

В работе получены аналитические решения для расчета математического ожидания и дисперсии числа исправных машин в распределенных масштабируемых вычислительных системах. Решение получено методом моментов, предложенным в работах [13, 14]. В теории массового обслуживания такого вида модели обычно формализуются системами дифференциальных уравнений от распределения вероятностей. Это считается достаточным, поскольку подразумевается, что другие вероятностные характеристики можно найти из полученного распределения. В нашем случае точное решение найти не получается, поскольку даже в стационарном режиме возникают сложности, что приводит к приближенному решению. Метод моментов дает возможность получить точное решение для моментов любых порядков. Кроме того, нахождение точного решения позволяет получить дополнительную информацию, недоступную для приближенного решения: например, число ЭМ n в ВС фигурирует условно в начальных условиях и в формулах для $M(t)$ и $D(t)$ переходного режима, но отсутствует в системах дифференциальных уравнений (1), (2) и в формулах стационарного режима – это свойство процессов Маркова. Помимо количественной оценки производительности ВС получена качественная оценка: простым наращиванием вычислительной системы элементарными машинами без улучшения их параметров достигнуть сколь угодно высокой наперед заданной производительности невозможно.

Литература

1. *Хорошевский В. Г.* Архитектура вычислительных систем. М.: МГТУ им. Баумана, 2008. 520 с.
2. *Dongarra J. J., A. J. van der Steen* High-performance computing systems: Status and outlook, *Acta Numerica*, 2012. P. 1–96.
3. TOP500 Supercomputers Official Site. TOP500 Lists [сайт] [Электронный ресурс]. URL: <http://www.top500.org> (дата обращения 16.02.2017).
4. *Nikolic S.* High Performance Computing Directions: The Drive to ExaScale Computing // Труды международной научной конференции «Параллельные вычислительные технологии» (ПаВТ'2012). Новосибирск, 2012. URL: <http://pavt.susu.ru/2012/talks/Nikolic.pdf> (дата обращения 16.02.2017).
5. *Schroeder B., Gibson Garth A.* A large-scale study of failures in high-performance computing systems // *Proceedings of the International Conference on Dependable Systems and Networks (DSN2006)*, Philadelphia, PA, USA, June 25–28, 2006, 10 p.
6. *Каляев И. А., Коробкин В. В., Мельник Э. В., Малахов И. В.* Отказоустойчивый управляющий вычислительный комплекс машины перегрузочной атомного реактора типа ВВЭР // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2003. № 3. С. 143–146.
7. *S. Di, M. S. Bouguerra, L. Bautista-Gomez, and F. Cappello.* Optimization of multilevel checkpoint model for large scale hpc applications. In *Parallel and Distributed Processing Symposium*, 2014 IEEE 28th International, P. 1181–1190, May 2014.

8. Корнеев В. В., Семенов Д. В., Телегин П. Н., Шабанов Б. М. Отказоустойчивое децентрализованное управление ресурсами грид // Известия вузов. Электроника. 2015. № 1. С. 83–89.
9. Вишневский В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003. 512 с.
10. Хорошевский В. Г. Модели анализа и организации функционирования большемасштабных распределенных вычислительных систем // Электронное моделирование. Киев, 2003. Т. 25, № 6.
11. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. Изд. 3-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 520 с.
12. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
13. Хорошевский В. Г., Павский В. А., Павский К. В. Расчет показателей живучести распределенных вычислительных систем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2011. № 2 (15). С. 81–88.
14. Павский В. А., Павский К. В., Хорошевский В. Г. Вычисление показателей живучести распределенных вычислительных систем и осуществимости решения задач // Искусственный интеллект. 2006. № 4. С. 28–34.

*Статья поступила в редакцию 21.02.2017;
переработанный вариант – 12.04.2017.*

Павский Валерий Алексеевич

д.т.н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики Кемеровского технологического института пищевой промышленности (650056, Кемерово, б-р Строителей, д. 47), тел. (3842) 73-42-00, e-mail: pavvm@kemtipp.ru.

Павский Кирилл Валерьевич

д.т.н., доцент, профессор кафедры вычислительных систем СибГУТИ, научный сотрудник лаборатории ВС института физики полупроводников им. А. В. Ржанова СО РАН (630090, Новосибирск, Лаврентьева, 13), тел. (383) 333-21-71, e-mail: pkv@isp.nsc.ru.

Stochastic model to estimate the efficiency of distributed scalable computer systems functioning with group restorations

Valery A. Pavsky, Kirill V. Pavsky

A model of distributed computer systems functioning with group restorations of failed machines is considered. The model is formalized in the form of differential equations systems, where unknown quantity is probability distribution. To assess the effectiveness of CS functioning, mathematic expectation and variance of the number of working machines in the model are accepted. Analytical solutions are obtained.

Keywords: distributed computer systems, mathematical model, group service, number of working machines, analytical solutions.