

Разработка математической модели сопровождения воздушных объектов

В. В. Глазков, И. В. Муратов

В статье поставлена задача сопровождения воздушного объекта стационарным наземным локатором. Приведена математическая модель системы сопровождения. Получена передаточная функция системы сопровождения. Численными методами определены ошибки сопровождения по азимуту и углу места. Качественно показана взаимосвязь формы функции ошибки со второй производной входного воздействия.

Ключевые слова: система сопровождения, ошибка сопровождения, передаточная функция, численные методы.

1. Введение

В настоящее время с появлением беспилотных летательных аппаратов, а также увеличением скоростей классических воздушных объектов на новый уровень выходит задача сопровождения этих объектов средствами радиолокации [1–5]. Проектирование таких систем следует начинать с разработки математической модели и анализа ее поведения при различных внешних условиях.

Часть задач анализа следящих систем требует решения дифференциальных уравнений и осуществления интегрирования различных функций. Если для функции $f(x)$ можно найти первообразную $F(x)$, то задача вычисления определенного интеграла может быть решена аналитически.

Однако нахождение первообразной возможно только для ограниченного класса функций. Весьма часто первообразную функцию $F(x)$ для заданной $f(x)$ найти не удастся. Примером может служить плотность распределения по нормальному закону (распределение Гаусса).

В таких случаях необходимо осуществлять численное интегрирование. Но если даже первообразную функцию можно найти, часто она оказывается настолько сложной, что гораздо выгоднее с точки зрения затраты труда воспользоваться численной процедурой и в этом случае [6, 7].

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу сопровождения объекта, летящего с постоянной скоростью V на высоте H по прямолинейной траектории $l-m$. Расстояние между проекцией траектории $l'-m'$ на плоскость местного горизонта и точкой O , из которой производится наблюдение за объектом, обозначим через p (рис. 1). В качестве сопровождающего устройства используется

следящая система с астатизмом второго порядка (рис. 2) [8], состоящая из сельсинной пары, управляющего серводвигателя, корректирующего элемента и гидропривода. Необходимо оценить величину ошибки сопровождения как в угловом, так и в линейном измерении.

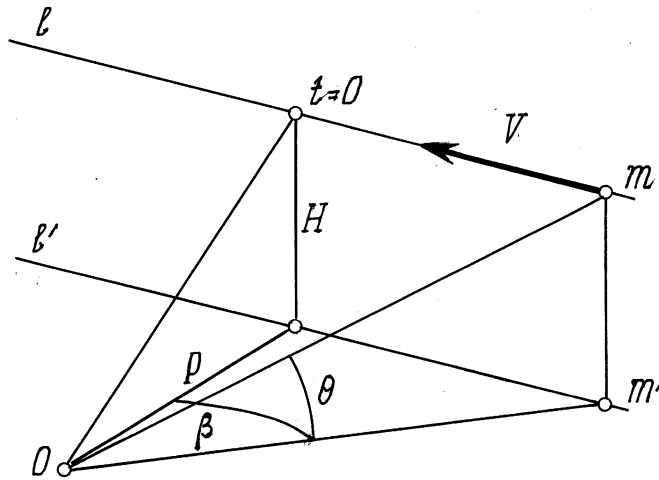


Рис. 1. Задача сопровождения движущегося объекта

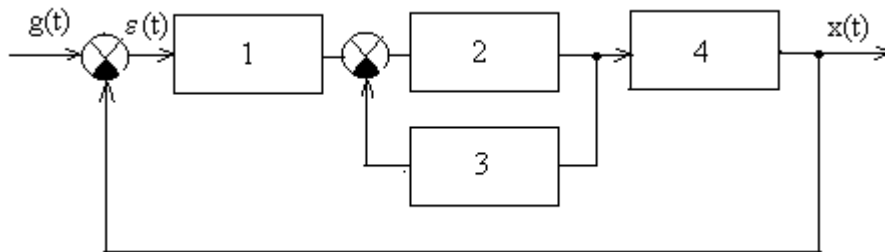


Рис. 2. Структурная схема следящей системы с астатизмом второго порядка:

1 – сельсинная пара, 2 – управляющий серводвигатель,
3 – корректирующий элемент, 4 – гидропривод

Обозначенные на рис. 2 элементы имеют следующие передаточные функции:

– сельсинная пара: $W_1(s) = k_s$,

– управляющий серводвигатель: $W_2(s) = \frac{k_d}{(1 + T_d s)s}$,

– корректирующий элемент: $W_3(s) = \frac{k_{cor}(1 + \tau s)s}{1 + \theta s}$,

– гидропривод: $W_4(s) = \frac{k_{hyd}}{(1 + T_{hyd} s)s}$,

где k_s , k_d , k_{cor} , k_{hyd} – коэффициент усиления соответствующего звена,

T_d , τ , θ , T_{hyd} – постоянная времени соответствующего звена.

3. Определение ошибки сопровождения следящей системы

Для получения передаточной функции всей следящей системы вначале найдем передаточную функцию $W_{in}(s)$ внутреннего контура следящей системы [9]:

$$W_{in}(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W_2(s)W_3(s)}$$

или согласно обозначениям для передаточных функций элементов 2 и 3:

$$W_{in}(s) = \frac{k_d(1 + \theta s)}{s[1 + k_d k_{cor} + s(T_d + \theta + k_d k_{cor} \tau) + s^2 T_d \theta]}.$$

Введем обозначения для преобразования передаточной функции к каноническому виду:

$$\mu = \frac{k_s k_{hyd} k_d}{1 + k_d k_{cor}},$$

$$T^2 = \frac{T_d \theta}{1 + k_d k_{cor}},$$

$$\zeta = \frac{T_d + \theta + k_d k_{cor} \tau}{2T(1 + k_d k_{cor})}.$$

В указанных обозначениях передаточная функция следящей системы с разомкнутой главной обратной связью имеет компактный вид, состоящий из комбинации передаточных функций элементарных звеньев:

$$W_{open}(s) = \frac{\mu(1 + \theta s)}{s^2(1 + T_{hyd} s)(1 + 2\zeta Ts + T^2 s^2)}. \quad (1)$$

Соответственно передаточная функция замкнутой системы приобретает вид:

$$W(s) = \frac{\mu(1 + \theta s)}{s^2(1 + T_{hyd} s)(1 + 2\zeta Ts + T^2 s^2) + \mu(1 + \theta s)}. \quad (2)$$

Для дальнейших вычислений необходимо сделать дополнительные предположения о параметрах передаточной функции (1), т.к. согласно теореме Абеля алгебраическое уравнение степени порядка $n \geq 5$ не имеет решения в общем виде в полных радикалах.

Положим:

$$T_{hyd} = 0.03 \text{ с},$$

$$T = 0.015 \text{ с},$$

$$\theta = 1.5 \text{ с},$$

$$\zeta = 0.2,$$

$$\mu = 22 \text{ с}^{-2}.$$

Анализ передаточной функции 2 проведем в пакете MatLab [10, 11].

Из решения видно, что длительность переходного процесса в следящей системе в основном определяется вещественным корнем -0.6766 . Сам процесс обладает колебательностью, судя по двум парам комплексно-сопряженных корней. Внешний вид импульсной характеристики представлен на рис. 3.

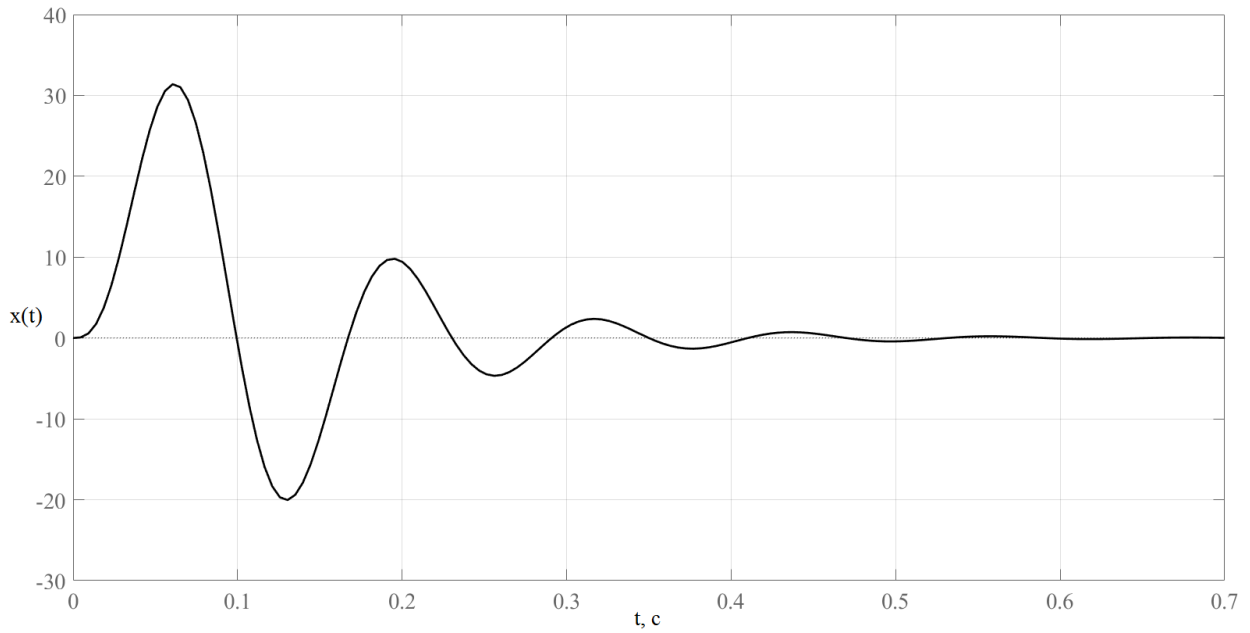


Рис. 3. Импульсная характеристика следящей системы

Для решения задачи о точности сопровождения необходима передаточная функция замкнутой системы по отношению к ошибке:

$$\Phi_{\varepsilon}(s) = \frac{E(s)}{G(s)} = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{s^2(1+T_{hyd}s)(1+2\zeta Ts+T^2s^2)}{s^2(1+T_{hyd}s)(1+2\zeta Ts+T^2s^2) + \mu(1+\theta s)}. \quad (3)$$

Обычно вычисление текущего значения ошибки сводится к определению оригинала для изображения $E(s)$. Но в данном случае препятствием для такого прямого решения оказывается сложный характер изображения входного воздействия, которое не принадлежит к классу целых полиномов. Как видно из рис. 1, входные воздействия по двум каналам равны:

$$\beta = \arctan\left(\frac{Vt}{p}\right), \quad \theta = \arctan\left(\frac{H \cos(\beta)}{p}\right).$$

Несмотря на то, что математические пакеты позволяют найти изображение функции $\arctan(t)$, дальнейшие операции становятся затруднительными, так как преобразование Лапласа этой функции имеет вид:

$$L\{\arctan(t)\} = \frac{Ci(s)\sin(s) - Ssi(s)}{s},$$

где $Ssi(s) = \int_0^s \frac{\sin(t)}{t} dt - \frac{\pi}{2}$ – сдвинутый интегральный синус,

$Ci(s) = c + \ln(s) + \int_0^s \frac{\cos(t)-1}{t} dt$ – интегральный косинус.

Кроме того, здесь присутствует постоянная Эйлера:

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln(n) \right).$$

Достичь аналитических результатов при дальнейших преобразованиях такого сочетания специальных функций практически невозможно. Поэтому весьма уместно использование численных методов интегрирования.

Для нахождения ошибки воспользуемся вместо аппарата передаточных функций (3) интегралом свертки:

$$\varepsilon_{\beta}(t) = \int_0^{\infty} k_{\varepsilon}(\tau) \beta(t-\tau) d\tau,$$

$$\varepsilon_{\theta}(t) = \int_0^{\infty} k_{\varepsilon}(\tau) \theta(t-\tau) d\tau,$$

где $k_{\varepsilon}(\tau)$ – импульсная функция по отношению к ошибке.

Импульсная функция по отношению к ошибке легко находится из передаточной функции (3), будучи оригиналом по отношению к ней. Однако этого нельзя сделать в общем виде, т.к. невозможно разложить (3) на элементарные дроби.

Во избежание появления δ -функции вместо передаточной функции по отношению к ошибке для последующих вычислений следует использовать выражение:

$$\varepsilon(t) = g(t) - \int_0^{\infty} k(\tau) g(t-\tau) d\tau,$$

где в качестве входного воздействия $g(t)$ выступает $\theta(t)$ или $\beta(t)$.

Проведем вначале расчет ошибки слежения по каналу азимута. Для определенности примем скорость перемещения объекта $V = 220$ м/с и параметр $p = 500$ м. Расчет ошибки слежения по азимуту проведем в пакете MatLab.

Характер изменения ошибки слежения почти в точности повторяет график второй производной входного воздействия (рис. 4). Это объясняется наличием астатизма второго порядка в следящей системе. Для построения графика дважды продифференцируем входное воздействие по каналу азимута:

$$\beta''(t) = \frac{-2V^3 pt}{(p^2 + V^2 t^2)^2}.$$

Для построения графиков на одном рисунке ввиду различия масштабов следует значения второй производной разделить на 30.

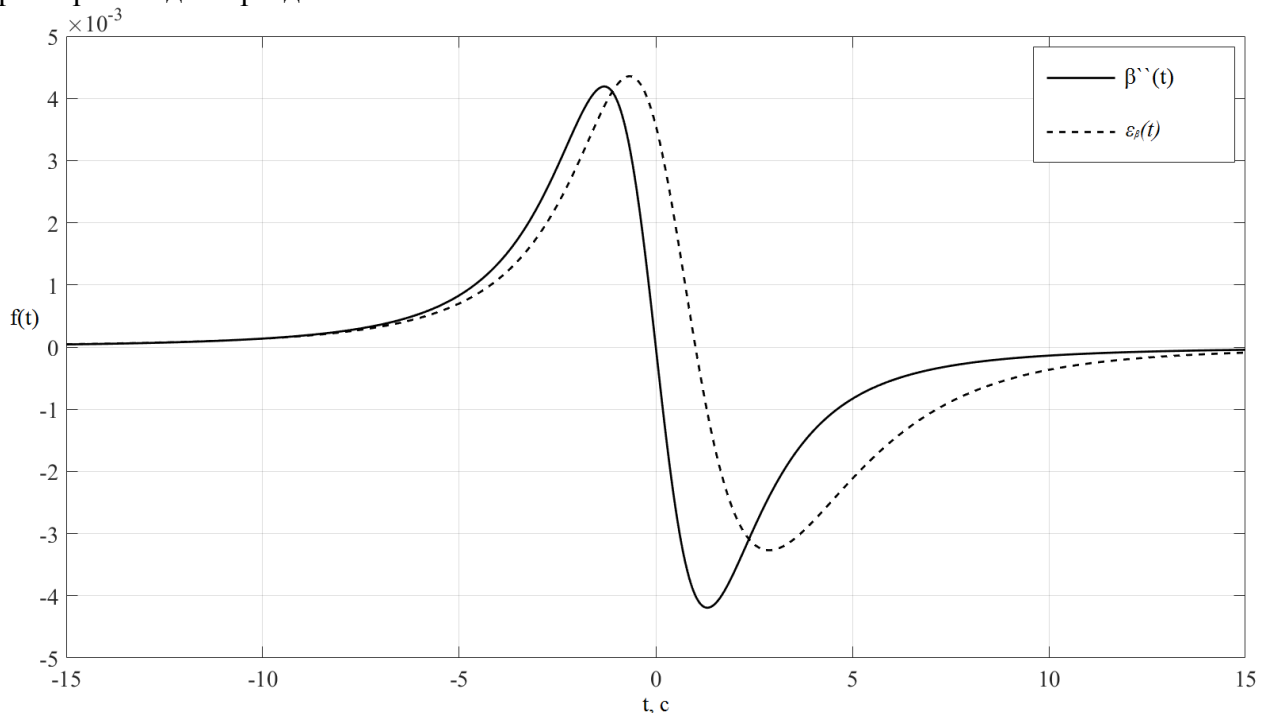


Рис. 4. Сравнение изменения ошибки слежения и второй производной входного воздействия по каналу азимута

Проведем аналогичный расчет для канала угла места. Вторая производная от угла места по времени имеет вид:

$$\theta''(t) = \frac{hV^2[(Vtp)^2 + 2(Vt)^4 - p^4 - (hp)^2]}{[p^2 + (Vt)^2]^{3/2}[p^2 + (Vt)^2 + h^2]^2}.$$

В остальном алгоритм вычисления интеграла не отличается от предыдущего, за исключением вида входного воздействия и дополнительного предположения о высоте полета $H = 1000$ м. Расчет ошибки слежения по углу места проведем в пакете MatLab.

Построение графиков (рис. 5) обнаруживает ту же закономерность – ошибка слежения с точностью до масштаба и некоторого сдвига по времени повторяет изменение второй производной.

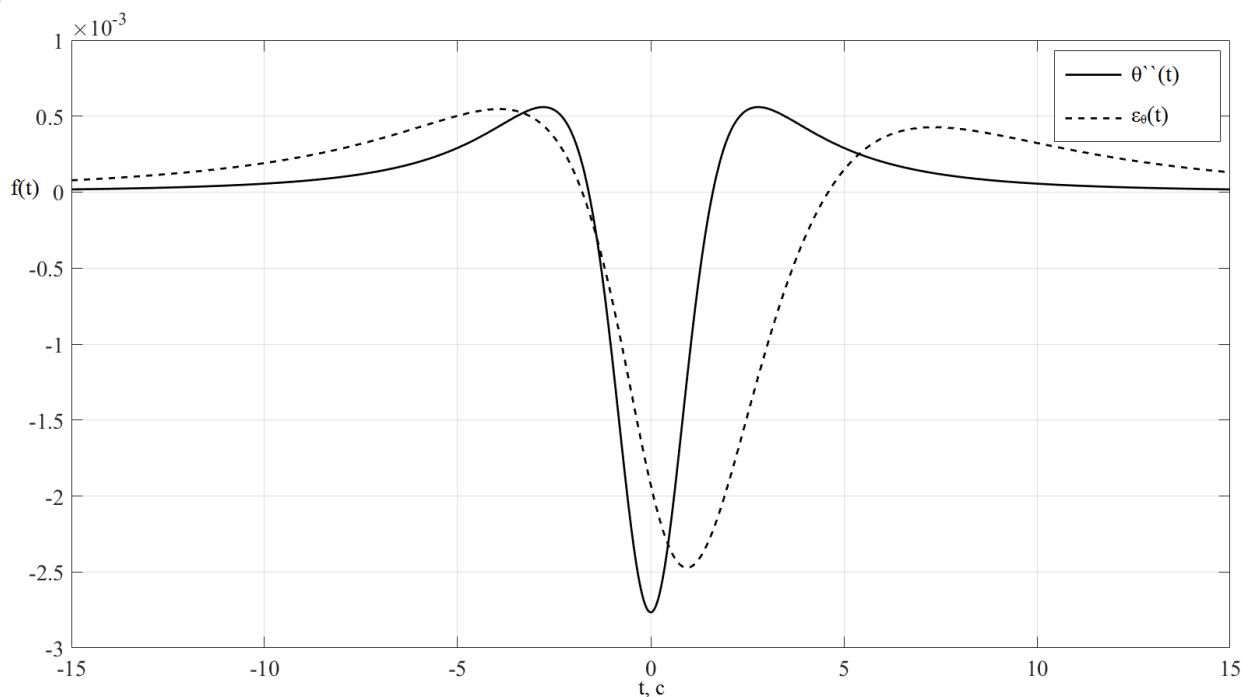


Рис. 5. Сравнение изменения ошибки слежения и второй производной входного воздействия по каналу угла места

4. Заключение

В данной работе была решена задача оценки величины ошибки сопровождения летящего объекта по азимуту и углу места. Так как аналитическое решение задачи затруднено, то на основе численных методов интегрирования была получена зависимость ошибки от времени. Из рис. 4 и 5 видно, что ошибки сопровождения не превышают 0.0028 рад по углу места и 0.0042 рад по азимуту. Т.к. дальность до объекта в этот момент составляет около 1120 м, то линейные ошибки равны соответственно 2.2 м и 4 м.

Кроме этого, форма ошибок по двум каналам близка к форме второй производной входного воздействия.

Литература

1. Муратов И. В., Лихоеденко К. П., Хохлов В. К. Моделирование бортового радиолокационного координатора цели миллиметрового диапазона радиоволн // *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2014. Т. 19. № 11. С. 18–22.
2. Муратов И. В. Математическая модель пеленгационной характеристики следящего координатора цели // *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2013. Т. 18. № 11. С. 34–38.
3. Журавлев Ю. В. Синтез адаптивного следящего идентификатора прямым методом Ляпунова // *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2010. № 2. С. 3–15.
4. Верба В. С., Меркулов В. И., Соколов Д. А. Сопровождение интенсивно маневрирующих целей инерционными следящими системами // *Радиотехника*. 2014. № 5. С. 101–106.
5. Баринов С. П., Карпухин В. И., Щербаков А. Н. Вероятностные характеристики следящего радиолокационного измерителя угловых координат при воздействии уводящей помехи // *Телекоммуникации*. 2005. № 12. С. 32–36.
6. Шахтарин Б. И., Асланов Т. Г. Анализ систем синхронизации численными методами // *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение*. 2011. № 4. С. 101–110.
7. Шахтарин Б. И., Иванов А. А. Сравнительный анализ цифровых систем синхронизации // *Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Приборостроение*. 2007. № 1. С. 24–38.
8. Астапов Ю. М. Теория управления летательными аппаратами: учеб. пособие. М.: МАТИ, 2006. 276 с.
9. Первачев С. В. Радиоавтоматика. М.: Радио и связь, 1982. 296 с.
10. Мэтьюз Джон Г., Финк Куртис Д. Численные методы. Использование MATLAB. Пер. с англ. М.: Вильямс, 2001. 713 с.
11. Андреев В. В., Семенов М. И. Создание и использование системы обработки и анализа данных с применением пакета MatLab // *Прикладная информатика*. 2008. № 2. С. 85–92.

Статья поступила в редакцию 17.05.2016

Глазков Виталий Владимирович

к.т.н., доцент кафедры автономных информационных и управляющих систем МГТУ им. Н. Э. Баумана (105005, Москва, ул. 2-ая Бауманская, д. 5, стр. 1), тел. (499) 263-67-38, e-mail: wave@sm.bmstu.ru.

Муратов Игорь Валентинович

к.т.н., доцент кафедры автономных информационных и управляющих систем МГТУ им. Н. Э. Баумана (105005, Москва, ул. 2-ая Бауманская, д. 5, стр. 1), тел. (499) 263-67-53, e-mail: muratow2007@yandex.ru.

The development of a mathematical model tracking aircraft objects

Vitaly V. Glazkov, Igor V. Muratov

In the article, the task of tracking a flying object with fixed ground-based radar is considered. The mathematical model of the tracking system is presented. The transfer function of the tracking system is obtained. The tracking errors in azimuth and elevation are defined. The relationship between the error function form and the second derivative of the input exposure is given.

Keywords: tracking system, tracking error, transfer function, numerical methods.