УДК 681.324

Оценки показателей осуществимости решения задач набора на распределённых вычислительных системах *

В.А. Павский, К.В. Павский

Предлагается подход к расчёту показателей осуществимости решения задач набора, характеризующих функционирование вычислительных систем (ВС) в среднем. Достоинством является то, что помимо расчёта математических ожиданий нерешённых задач, предлагается расчёт соответствующих дисперсий. Решения находятся в аналитическом виде методами теории массового обслуживания и теории функций комплексного переменного.

Ключевые слова: осуществимость решения задач набора, распределённые вычислительные системы, анализ.

1. Введение

В зависимости от сложности задач и характера их поступления выделяют следующие режимы работы распределённых вычислительных систем (ВС) [1]:

решение сложной задачи,

обработка набора задач,

обслуживание потока задач.

В работе предлагается подход для получения оценок, которые характеризуют возможность решения задач набора на распределённых вычислительных системах. Процесс решения задач на ВС рассматривается как стохастический.

2. Постановка задачи

Рассмотрим решение i сложных задач набора на ВС. Каждая сложная задача (представлена параллельной программой [1]) решается на всём выделенном ресурсе.

Пусть выделенный ресурс составляет n ЭМ, тогда интенсивность решения задачи будем считать равной $n \cdot \beta$, где β – интенсивность решения задачи на одной ЭМ (оцениваются потенциальные возможности ВС [1]). Так как задачи сложные, то решаются последовательно, поскольку каждая из них решается на всех ЭМ. Предполагается, что поток событий для параметра β пуассоновский. Требуется вычислить математическое ожидание $A_i(t)$ – числа задач, находящихся в системе, и соответствующую дисперсию $D_i(t)$ в момент времени $t \in [0, \infty)$ при начальных условиях:

$$A_i(0) = i, \; D_i(0) \equiv 0, \; i \in E_0^{\infty} = 0,1,2,\dots . \quad (1)$$

* Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант № НШ-2175.2012.9).

3. Расчёт показателей осуществимости решения задач набора на ВС

Обозначим через $P_k(t)$ вероятность того, что к моменту времени t в ВС находится k задач (включая обслуживаемую), $k \in E_0^i$.

В такой постановке имеем систему [2]

$$\begin{cases} P_i'(t) = -n \cdot \beta \cdot P_i(t), \\ P_k'(t) = -n \cdot \beta \cdot P_k(t) + n \cdot \beta \cdot P_{k+1}(t),\ k \in E_1^{i-1}, \\ P_0'(t) = n \cdot \beta \cdot P_1(t), \end{cases} \tag{2}$$

с начальными условиями

$$P_i(0) = 1, \quad P_k(0) = 0, \quad k \neq i., \ P_k(0) = 0,\ k \neq i.$$

Условие нормировки, являющееся следствием системы уравнений, имеет вид

$$\sum_{k=0}^{i} P_k(t) = 1,\ t \in [0, \infty).$$

Вводя производящую функцию

$$F(z,t) = \sum_{k=0}^{i} z^k \cdot P_k(t),$$

систему (2) приводим к уравнению

$$z \cdot \frac{\partial F(z,t)}{\partial t} = n \cdot \beta \cdot (1-z) \cdot (F(z,t) - P_0(t)), \quad F(z,0) = z^i, \tag{3}$$

из которого, после необходимых преобразований [3], получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} A_i(t) = -n \cdot \beta \cdot (1 - P_0(t)), \\ \dfrac{d}{dt}\left[D_i(t) + A_i^2(t) + A_i(t)\right] = -2n \cdot \beta \cdot A_i(t) \end{cases} \tag{4}$$

с начальными условиями (1).

Приведём решение системы (2). Применяя преобразование Лапласа ($\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-s \cdot t} \cdot f(t) dt$, где $f(t)$ – функция ограниченного роста [4]) к уравнению (3), получим

$$z \cdot s \cdot \tilde{F}(z,s) - z^i = n \cdot \beta \cdot (1-z) \cdot (\tilde{F}(z,s) - \tilde{P}_0(s)), \cdots \mathrm{Re}(s) > 0,\ \mathrm{Re}(s) > 0,$$

или

$$\tilde{F}(z,s) = \frac{z^{i+1} - n \cdot \beta \cdot (1-z) \cdot \tilde{P}_0(s)}{s \cdot z - n \cdot \beta \cdot (1-z)}. \tag{5}$$

Так как в знаменателе $|z| = |n \cdot \beta / (s + n \cdot \beta)| < 1$ и при $|z| < 1$ $\tilde{F}(z,s)$ – аналитическая, то применяя теорему Руше [5], находим

$$\tilde{P}_0(s) = s^{-1} \cdot [n \cdot \beta / (s + n \cdot \beta)]^i. \tag{6}$$

Подставляя правую часть формулы (6) в (5), разделив полученный числитель на знаменатель, будем иметь

$$\widetilde{F}(z,s) = s^{-1} \cdot [n \cdot \beta / (s + n \cdot \beta)]^{i} + \sum_{k=0}^{i-1} z^{i-k} \cdot [n \cdot \beta / (s + n \cdot \beta)]^{k}. \qquad (7)$$

Взяв обратное преобразование Лапласа, предварительно разложив правую часть (7) на простейшие множители, получим

$$F(z,t) = 1 - \exp(-n \cdot \beta \cdot t) \cdot \sum_{k=1}^{i} (n \cdot \beta \cdot t)^{i-k} / (i-k)! + \exp(-n \cdot \beta \cdot t) \cdot \sum_{k=0}^{i-1} z^{i-k} \cdot (n \cdot \beta \cdot t)^{k} / k!.$$

Учитывая, что

$$P_0(t) = F(0,t),\ P_k(t) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k}{\partial z^k} F(0,t),\ k = 1,2,...,i, \quad P_k(t) = \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k}{\partial z^k} F(0,t),\ k = 1,2,\ldots,i,$$

находим искомое решение

$$P_0(t) = 1 - \exp(-n \cdot \beta \cdot t) \cdot \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(n \cdot \beta \cdot t)^k}{k!}, \quad P_k(t) = \frac{(n \cdot \beta \cdot t)^{i-k}}{(i-k)!} \cdot \exp(-n \cdot \beta \cdot t),\ \ k \in E_1^i.,\ k \in E_1^i.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} A_i(t) = \exp(-n \cdot \beta \cdot t) \cdot \sum_{k=1}^{i} k \cdot \dfrac{(n \cdot \beta \cdot t)^{i-k}}{(i-k)!}, \\ D_i(t) = \exp(-n \cdot \beta \cdot t) \cdot \sum_{k=1}^{i} k^2 \cdot \dfrac{(n \cdot \beta \cdot t)^{i-k}}{(k-i)!} - (A_i(t))^2. \end{cases} \qquad (8)$$

П р и м е р. Для выделенного ресурса (рис. 1) $n = 50$ ЭМ, $\beta = 1/15\ ч^{-1}$ с учётом отклонения среднее время решения задач составит $t_{cp} \approx 30 \pm 2.7\,ч$.

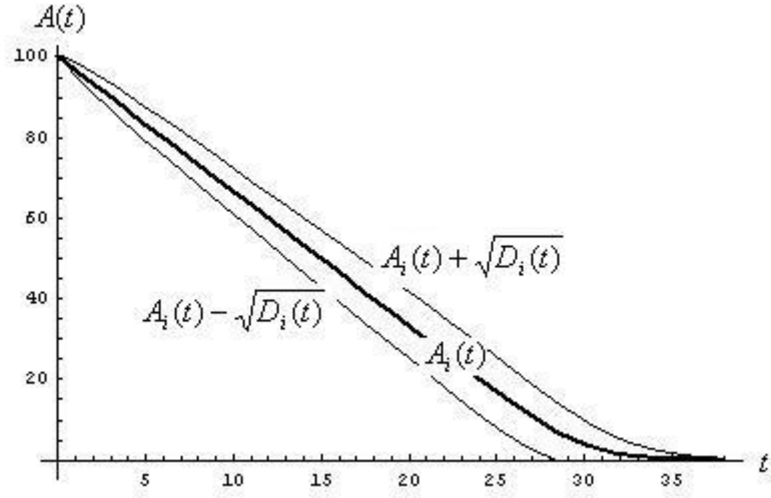

Рис.1. Среднее число $A_i(t)$ нерешённых задач в системе (расчёт по (8))

$\beta = 1/15\ ч^{-1}$, $n = 50$, $i = 1000$

Точное решение системы (8) для (4) слишком громоздко. Поэтому приведём приближенное решение. В (4) для $n \cdot \beta \cdot t << i$ положим $P_0(t) = 0$. Тогда система (4) имеет очевидное решение

$$\begin{cases} \tilde{A}_i(t) = i - n \cdot \beta \cdot t, \\ \tilde{D}_i(t) = n \cdot \beta \cdot t, \quad (t < i / n \cdot \beta), \end{cases} \tag{9}$$

где $\tilde{A}_i(t)$ – приближённое решение для среднего числа задач, оставшихся в системе к моменту времени t, а $\tilde{D}_i(t)$ – соответствующая дисперсия.

На рис. 2 приведены результаты расчёта среднего числа задач, находящихся в системе, по приближённому решению (9) при исходных данных приведенного примера (см. рис. 1).

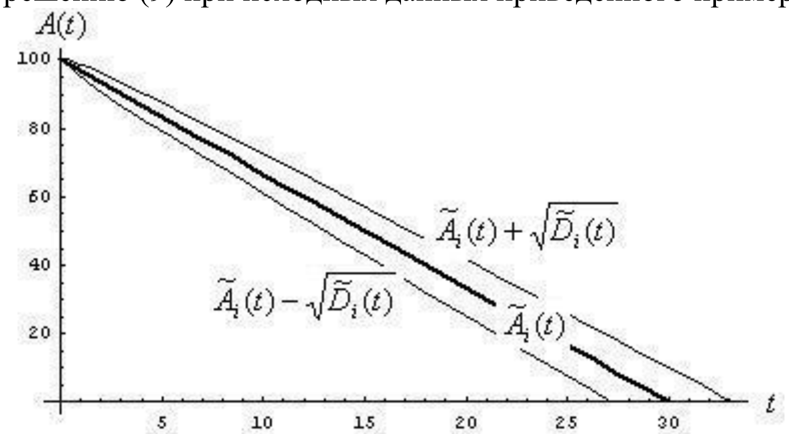

Рис.2. Приближённое решение (см.(9)) для среднего числа нерешённых задач в системе

$\beta = 1/15$ $ч^{-1}$, $n = 50$, $i = 1000$

Погрешность решения (9) в сравнении с (8) для $A_i(t)$

$$\Delta_i(t) = \exp(-n \cdot \beta \cdot t) \cdot \sum_{k=i+1}^{\infty} (k-i) \cdot \frac{(n \cdot \beta \cdot t)^k}{k!}.$$

Заметим, что $P_0(t)$ представлена распределением Эрланга порядка i, для которого

$$M\xi = i/(n \cdot \beta), \; D\xi = i/(n \cdot \beta)^2,$$

где ξ – полное время нахождения последней обслуженной задачи в наборе, что вполне согласуется с приближённым решением (9).

4. Заключение

Построена математическая модель и предложен подход к расчёту показателей осуществимости решения задач набора, характеризующих функционирование ВС в среднем. Подобные математические модели рассматриваются в классической теории массового обслуживания (например, [5]); другие источники, связанные с приложением данных моделей, авторам неизвестны. В работе получены аналитические формулы. Приведены точное и приближённое решения для среднего числа нерешённых задач в системе, и найдена соответствующая дисперсия. Оценена погрешность для приближённого решения.

Литература

1. Хорошевский В.Г. Архитектура вычислительных систем. М.: МГТУ им. Баумана, 2008, 520с.

2. Павский В.А., Павский К.В., Хорошевский В.Г. Вычисление показателей живучести распределённых вычислительных систем и осуществимости решения задач // Искусственный интеллект, «Наука і освіта» ДонДІШІ, 2006, №4, С. 28–34.
3. Хорошевский В.Г., Павский В.А., Павский К.В. Расчёт показателей живучести распределённых вычислительных систем. // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика, №2(15), 2011, С. 81-88.
4. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. М. Мир. 1979. 600 с.
5. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и её приложения. Изд. 3-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 520 с.

Статья поступила в редакцию19.03.2012

Павский Валерий Алексеевич

Профессор, д.т.н., завкафедрой высшей математики Кемеровского технологического института пищевой промышленности (650056, г. Кемерово, б-р Строителей, д.47), тел. (3842) 734200, e-mail: pavvm@kemtipp.ru.

Павский Кирилл Валерьевич

Кандидат технических наук, научный сотрудник Лаборатории ВС ИФП СО РАН (630090, Новосибирск, Лаврентьева, 13), тел. (383) 3332171, e-mail: pkv@isp.nsc.ru.

Indices Estimations of Set Task Solving Feasibility on Distributed Computer Systems

Valery A. Pavsky, Kirill V. Pavsky

In this paper, the approach for set task solving feasibility calculation characterizing the operation of distributed computer system is described. Calculation of corresponding dispersion is proposed in addition to calculation of mathematical expectation of unsolved tasks. Analytical formulas are derived by using queuing theory and complex variable theory.

Keywords: feasibility of set task solving, distributed computer systems, analysis.