

Оценки показателей функционирования вычислительных систем со структурной избыточностью *

В.А. Павский, К.В. Павский

В рамках теории массового обслуживания построена математическая модель функционирования вычислительных систем (ВС) со структурной избыточностью. Получены оценки показателей функционирования ВС (в частности, структурной избыточности). Предложена формула для оценки вероятности нахождения ВС в состоянии низкой производительности в течение времени. Решения найдены в аналитическом виде.

Ключевые слова: распределённые вычислительные системы, структурная избыточность, математическая модель, оценки показателей, анализ.

1. Введение

При анализе надёжности живучих вычислительных систем (ВС) возникают трудности, связанные и с практической невозможностью получать аналитические формулы для показателей эффективности и их разумных оценок, зависящих от времени, и отсутствием, для современных действующих и проектируемых ВС, достоверной статистики [1].

Поэтому при построении математических моделей желательно минимизировать число параметров, зависящих от проблемной статистики. Современные ВС требуют создания сложных многопараметрических моделей, а это приводит к тому, что оценка меры адекватности модели становится трудновыполнимой. Построение простых моделей приводит, скорее, к качественным оценкам функционирования систем, чем к количественным. Следовательно, создание простых и эффективных математических моделей с параметрами, имеющими качественную или достоверную, потенциально возможную статистику, является актуальным.

Предлагается расчёт и оценки некоторых показателей функционирования ВС со структурной избыточностью.

Большемасштабные вычислительные системы, состоящие из достаточно высоконадёжных элементарных машин (ЭМ) и имеющие структурную избыточность, при относительно быстрой замене отказавших ЭМ машинами из структурной избыточности, позволяют поддерживать необходимую производительность в течение длительного промежутка времени. Это означает, что до тех пор пока множество ЭМ, составляющих структурную избыточность, не пусто, считается, что ВС имеет высокую производительность, иначе она переходит в состояние низкой производительности. Это условие позволяет получить дополнительную ин-

* Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (грант № НШ-2175.2012.9), РФФИ (грант №10-07-00157, 12-07-00145), Министерства образования и науки РФ в рамках реализации федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы (грант №2012-1.1-12-000-1005-018)

формацию относительно времени нахождения ВС в состоянии высокой производительности и, не усложняя модели, дать рекомендации относительно её эффективной работы.

2. Постановка задачи

Имеется ВС, состоящая из N ЭМ, n из которых составляют структурную избыточность, а $N - n$ образуют основную подсистему. Время работы каждой ЭМ является случайной величиной, подчинённой экспоненциальному закону с параметром λ – интенсивностью выхода ЭМ из строя. Вышедшая из строя ЭМ основной подсистемы заменяется на ЭМ из структурной избыточности, а сама попадает в восстанавливающую систему (ВУ). Если для очередной отказавшей ЭМ основной подсистемы замены нет, то ВС переходит из высокопроизводительной в низкопроизводительную. Время восстановления является случайной величиной, подчинённой экспоненциальному закону с параметром μ – интенсивностью восстановления. Предполагается, что, независимо от числа ЭМ, находящихся в ВУ, среднее время восстановления, любого числа k , $k \leq n$, ЭМ, находящихся на восстановлении, $t_{cp} = 1/\mu$.

Требуется вычислить $P_k(t)$ – вероятность того, что в момент времени t структурная избыточность состоит из k ЭМ, $t \in [0, \infty)$, $k = 0, 1, \dots, n$ и провести анализ функционирования ВС.

3. Расчёт показателей функционирования

распределённых вычислительных систем со структурной избыточностью

Заметим, что в такой постановке поток отказов не является простейшим ввиду наличия последствия. Учитывая, что число ЭМ велико, ВС высоконадёжна, будем считать, что поток отказов ЭМ генерируется бесконечным источником, то есть является простейшим.

С учётом замечания, система дифференциальных уравнений для вероятностей имеет вид:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\mu \cdot P_0(t) + (N - n) \cdot \lambda \cdot P_1(t), \\ P_k'(t) = -((N - n) \cdot \lambda + \mu) \cdot P_k(t) + (N - n) \cdot \lambda \cdot P_{k+1}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n - 1, \\ P_n'(t) = -(N - n) \cdot \lambda \cdot P_n(t) + \mu \cdot \sum_{k=0}^{n-1} P_k(t), \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$P_n(0) = 1, \quad P_k(0) = 0 \quad (2)$$

и условием нормировки

$$\sum_{k=0}^n P_k(\tau) = 1, \quad \forall \tau \in [0, \infty). \quad (3)$$

Преобразуем последнее уравнение системы (1) с учётом условия (3):

$$\frac{d}{dt} P_n(t) = -((N - n)\lambda + \mu) \cdot P_n(t) + \mu.$$

Решение этого уравнения при начальных условиях (2) записывается в виде

$$P_n(t) = \frac{\mu}{N \cdot \lambda + \mu} + \frac{N \cdot \lambda}{N \cdot \lambda + \mu} \cdot e^{-(N \cdot \lambda + \mu)t}. \quad (4)$$

Далее, при $k = n - 1$ получаем

$$P_{n-1}(t) = \frac{(N - n)\lambda\mu}{((N - n)\lambda + \mu)^2} + \frac{((N - n)\lambda)^2 t}{((N - n)\lambda + \mu)} \cdot e^{-((N - n)\lambda + \mu)t} - \frac{(N - n)\lambda\mu}{((N - n)\lambda + \mu)^2} \cdot e^{-((N - n)\lambda + \mu)t}. \quad (5)$$

Аналогично вышеизложенному получаем, что

$$\begin{aligned}
P_0(t) = & \frac{((N-n)\lambda)^n}{((N-n)\lambda + \mu)^n} + \frac{\mu((N-n)\lambda)^{n-1}}{((N-n)\lambda + \mu)^n} \cdot e^{-((N-n)\lambda + \mu)t} - \frac{((N-n)\lambda)^n}{(n-1)!((N-n)\lambda + \mu)} \cdot e^{-((N-n)\lambda + \mu)t} \cdot \\
& \cdot \left(t^{n-1} + (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{n-k-1}}{((N-n)\lambda)^k \cdot (n-k-1)!} \right) + ((N-n)\lambda)^{n-1} \mu \cdot e^{-((N-n)\lambda + \mu)t} \cdot \sum_{r=1}^{n-2} \frac{t^r}{r!((N-n)\lambda + \mu)^{n-r}} + \\
& + ((N-n)\lambda)^{n-1} \cdot \mu \cdot e^{-((N-n)\lambda + \mu)t} \cdot \sum_{r=1}^{n-2} \sum_{k=1}^r \frac{t^{r-k}}{((N-n)\lambda)^k \cdot ((N-n)\lambda + \mu)^{n-r} \cdot (r-k)!}. \quad (6)
\end{aligned}$$

Решение (4) – (6) для уравнения (1) позволяет оценить скорость вхождения системы в стационарный режим.

Если ВС функционирует достаточно долго, то для вероятностей $P_k(t)$ достаточно иметь решение для стационарного режима

$$p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t),$$

тогда решение системы (1) имеет вид

$$p_n = \frac{\mu}{(N-n) \cdot \lambda + \mu}, p_k = \frac{\mu \cdot ((N-n) \cdot \lambda)^k}{((N-n) \cdot \lambda + \mu)^{k+1}}, p_0 = \left(\frac{(N-n) \cdot \lambda}{(N-n) \cdot \lambda + \mu} \right)^n.$$

Пусть функционирование ВС происходит достаточно длительное время и $n \ll N$, а $\mu > N\lambda$. Тогда

$$p_n = \frac{\mu}{N \cdot \lambda + \mu}, p_k = \frac{\mu \cdot (N \cdot \lambda)^k}{(N \cdot \lambda + \mu)^{k+1}}, p_0 = \left(\frac{N \cdot \lambda}{N \cdot \lambda + \mu} \right)^n.$$

Как было сказано в начале, отсутствие ЭМ в структурной избыточности равносильно нахождению ВС в состоянии низкой производительности.

Зададим доверительную вероятность γ того, что ВС находится в состоянии высокой производительности, тогда

$$1 - \gamma = p_0 = \left(\frac{N \cdot \lambda}{\mu + N \cdot \lambda} \right)^n. \quad (7)$$

Логарифмируя (7), находим

$$k_{cp} = \left\lceil \frac{\ln(1-\gamma)}{\ln N\lambda - \ln(N \cdot \lambda + \mu)} \right\rceil + 1,$$

где k_{cp} – среднее число ЭМ, составляющих структурную избыточность, $[x]$ – целая часть числа x .

В табл. 1 приведён пример зависимости среднего числа ЭМ структурной избыточности от числа ЭМ в ВС при заданной надёжности.

Таблица 1. Зависимость среднего числа ЭМ структурной избыточности от числа ЭМ в ВС

а) $1-\gamma = 0.01; \mu = 2$				б) $1-\gamma = 0.05; \mu = 2$			
$N \backslash \lambda$	10^3	10^4	10^5	$N \backslash \lambda$	10^3	10^4	10^5
10^{-3}	4	25	232	10^{-3}	2	16	151
10^{-4}	1	4	25	10^{-4}	0	2	16

Из таблиц следует, что при числе ЭМ в ВС $< 10^5$ структурная избыточность не превышает 0.15 % от общего числа ЭМ в ВС и указанной надёжности.

4. Оценка вероятности нахождения ВС в состоянии низкой производительности в течение времени

Как уже отмечалось, многомашинные ВС, в силу своего предназначения, не должны находиться в состоянии отказа. Именно поэтому при их функционировании в состоянии низкой производительности продолжает работу восстанавливающая система, на которую, очевидно, имеется очередь на восстановление отказавших ЭМ. Ясно, что как только очередь исчезает, так сразу ВС можно считать вошедшей в состояние высокой производительности.

Пусть ξ – случайная величина, описывающая время восстановления элементарных машин в восстанавливающей системе. Пусть $F(\tau) = P\{\xi \geq \tau\}$ – вероятность того, что ВС в состоянии низкой производительности останется в течение времени не менее чем τ , $\tau \in [0, \infty)$.

Так как в модели рассматривается стационарный режим функционирования ВС, то $P\{\xi = 0\} = p_0$ (в точке $\tau = 0$, $F(0)$ имеет разрыв). Учитывая, что все потоки простейшие, то вероятность того, что за время τ откажут k ЭМ

$$V_k(\tau) = \frac{(N\lambda\tau)^k}{k!} \cdot \exp(-N\lambda\tau).$$

Таким образом, имеем одноканальную систему массового обслуживания М/М/1, глубоко исследованную многими авторами [2, 5], из которой следует, что

$$F(\tau) = \left(\frac{N\lambda}{\mu + N\lambda} \right)^n \cdot e^{-(\mu - N\lambda)\tau}. \quad (8)$$

Рис. 1 иллюстрирует зависимость функции $F(\tau)$ от времени τ , при $N = 10^3$, $\lambda = 10^{-3}$ 1/ч, $\mu = 2; 3$ 1/ч, $n = 1, 2$. Из рисунка следует, что при $n \geq 2$ результаты хорошо согласуются с ранее полученными в табл. 1.

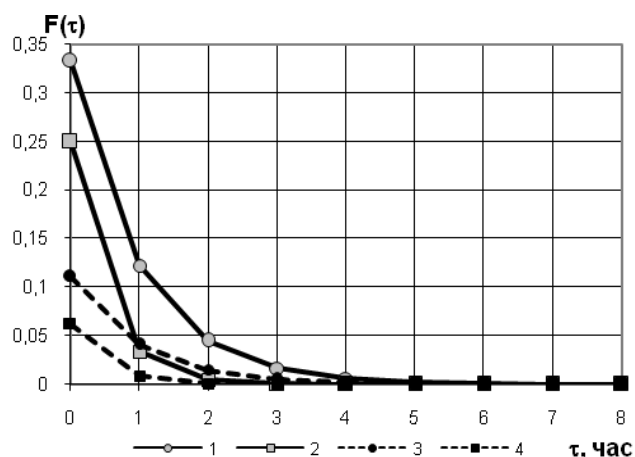


Рис. 1. Зависимость функции $F(\tau)$ от времени τ при $N=10^3$, $\lambda=10^{-3}$ 1/ч:
 1 – $\mu=2$ 1/ч, $n=1$; 2 – $\mu=3$ 1/ч, $n=1$; 3 – $\mu=2$ 1/ч, $n=2$; 4 – $\mu=2$ 1/ч, $n=2$

Эффективность функции $F(\tau)$ в рамках предложенной модели не только в простоте вычислений, но и в параметрах n и μ , позволяющих оценить не только качественную, но и дать количественную оценку функционирования ВС живучих и со структурной избыточностью, избегая при этом громоздких, хотя и может быть, более точных формул, значение которых, скорее всего, находится численными методами. Например, если задать $\mu = \mu(\lambda)$, то есть расширить возможности восстанавливающей системы, то можно показать, насколько существенно уменьшается время выхода ВС из состояния низкой производительности.

В самом деле, вернёмся к формуле (8). При увеличении n вероятность входа ВС в состояние низкой производительности уменьшается. С другой стороны, если она в него вошла, то время выхода ВС из этого состояния будет зависеть от величины $\mu - N\lambda$ и не зависеть от n , то есть в этом случае модель бессильна.

5. Заключение

Подобные математические модели обычно не рассматриваются в классической теории массового обслуживания, поскольку они не полны; однако, они не противоречивы и в состоянии описать, в некотором смысле, более широкий класс систем. Авторы работы постарались построить такую математическую модель, чтобы решения находились в аналитическом виде и соответствовали её формулировке. В работе получено решение системы дифференциальных уравнений для вероятностей состояний структурной избыточности. Найдена зависимость числа машин резерва от вероятности невыхода системы на максимальный уровень производительности. Предложена формула для оценки вероятности нахождения ВС в состоянии низкой производительности в течение времени. Решения найдены в аналитическом виде. Формулы могут быть использованы при экспресс-анализе функционирования распределенных вычислительных систем.

Литература

1. *Хорошевский В.Г.* Архитектура вычислительных систем. М.: МГТУ им. Баумана, 2008, 520 с.
2. *Кокс Д. Р., Смит В. Л.* Теория восстановления. Под ред. Ю.К. Беляева. – М.: Сов.радио, 1967. – 312 с.
3. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Эдиториал УРСС, 3-е изд. –, 2005. – 400 с.

4. *Клейнрок Л.* Вычислительные системы с очередями. М. Мир. 1979г. 600 с.
5. *Саати Т.Л.* Элементы теории массового обслуживания и её приложения. Изд. 3-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 520 с.

Статья поступила в редакцию 18.06. 2012 г.

Павский Валерий Алексеевич

Профессор, д.т.н., завкафедрой высшей математики Кемеровского технологического института пищевой промышленности (650056, г. Кемерово, б-р Строителей, д. 47), тел. (3842) 734200, e-mail: pavvm@kemtipp.ru.

Павский Кирилл Валерьевич

Кандидат технических наук, научный сотрудник Лаборатории ВС ИФП СО РАН (630090, Новосибирск, Лаврентьева, 13), тел. (383) 3332171, e-mail: pkv@isp.nsc.ru.

Indices Estimations of Computer Systems Functioning with Structural Redundancy

Valery A. Pavsky, Kirill V. Pavsky

The mathematical model of distributed computer systems (CS) functioning with structural redundancy is constructed within the bounds of the theory of waiting lines (queuing theory). The indices estimations of functioning CS (in particular structural redundancy) are received. The formula for probability estimation of CS in a state of low productivity during some time is offered. Decisions are found in an analytical form.

Keywords: distributed computer systems, structural redundancy, mathematical model, estimations of indices, analysis.