УДК 681.324

Стохастические модели для оценок размера структурной избыточности большемасштабных вычислительных систем*

К.В. Павский

В рамках теории массового обслуживания построена математическая модель функционирования вычислительных систем (ВС) со структурной избыточностью (конечное число состояний). Найдена вероятность нахождения ВС в состоянии низкой производительности в зависимости от размера структурной избыточности. Для этой вероятности приведена оценка и её погрешность. Предложен расчёт среднего числа отказавших машин в зависимости от времени. Приведены результаты аналитического и имитационного моделирования.

Ключевые слова: распределённые вычислительные системы, структурная избыточность, математические модели, оценки показателей, анализ.

1. Введение

Объектом исследования являются большемасштабные распределённые вычислительные системы (ВС) со структурной избыточностью [1]. Относительно быстрая замена отказавших ЭМ машинами структурной избыточности позволяет поддерживать необходимую производительность в течение длительного промежутка времени. В работе предлагается модель функционирования вычислительных систем со структурной избыточностью.

2. Модель

Имеется ВС, состоящая из N элементарных машин (ЭМ), n – структурная избыточность (резерв), $(N-n)$ – основная подсистема. Время работы каждой ЭМ является случайной величиной, подчинённой экспоненциальному закону с параметром λ – интенсивностью выхода ЭМ из строя. Вышедшая из строя ЭМ заменяется на ЭМ из структурной избыточности, а сама попадает в восстанавливающую систему (ВУ) и ждёт восстановления. Время восстановления является случайной величиной, подчинённой экспоненциальному закону с параметром μ – интенсивностью восстановления. Предполагается, что, независимо от числа ЭМ, находящихся в ВУ, среднее время восстановления любого числа $k \le n$ ЭМ, находящихся на восстановлении, $t_{cp} = 1/\mu$.

* Работа выполнена при поддержки Совета по грантам Президента РФ (грант № НШ-2175.2012.9) и РФФИ (грант №13-07-00160), Министерства образования и науки РФ в рамках реализации целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (грант № 8228).

3. Вероятности состояний восстанавливающей системы

Требуется вычислить $P_k(t)$ − вероятность того, что в момент времени t в системе массового обслуживания (СМО) находится k требований, $t \in [0,\infty)$, $k = 0,1,...,n$, и провести анализ функционирования ВС. Предполагая, что для состояния k СМО поток отказов имеет интенсивность $(N-k)\lambda$, получаем

$$\begin{cases} P_0'(t) = -N \cdot \lambda P_0(t) + \mu \sum\limits_{k=1}^{n} P_k(t), \\ P_k'(t) = -((N-k)\cdot\lambda + \mu)\cdot P_k(t) + (N-(k-1))\cdot\lambda\cdot P_{k-1}(t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k = 1,2,...,n-1, \\ P_n'(t) = -\mu \cdot P_n(t) + (N-(n-1))\cdot\lambda\cdot P_{n-1}(t), \end{cases} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$P_0(0) = 1, \quad P_k(0) = 0, \quad k \neq 0.$$

Условие нормировки,

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(t) = 1, \quad t \in [0,\infty).$$

Решение (1) для стационарного режима $p_k = \lim\limits_{t\to\infty} P_k(t)$, $k = 0,1,...,n$, равно

$$\begin{cases} p_0 = \dfrac{\mu}{N\cdot\lambda+\mu}, \\ p_k = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \dfrac{1}{(N-k)\cdot\lambda/\mu+1} \prod\limits_{i=0}^{k-1} \dfrac{(N-i)}{(N-i)\cdot\lambda/\mu+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k = 1,2,...,n-1, \\ p_n = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \prod\limits_{i=0}^{n-1} \dfrac{(N-i)}{(N-i)\cdot\lambda/\mu+1}. \end{cases} \tag{2}$$

Замечаем, что в (2) p_n – это вероятность пустоты резерва в стационарном режиме. Соответственно, на основе (2), считаем, что вероятность отказа ВС

$$p_{\text{отк}} = p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \frac{N-i}{(N-i)\cdot\lambda/\mu+1}. \tag{3}$$

Зависимость вероятности $p_{\text{отк}}$ от размера структурной избыточности (резерва) приведена на рис. 1.

Очевидно, что

$$\left(\frac{(N-n)\cdot\lambda}{(N-n)\cdot\lambda+\mu}\right)^n \; < \; p_{\text{отк}} \; < \; \left(\frac{N\cdot\lambda}{N\cdot\lambda+\mu}\right)^n.$$

Пусть $\Phi_n(N) = \left(\dfrac{N\cdot\lambda}{N\cdot\lambda+\mu}\right)^n$, тогда

$$\left(\left(1-\frac{n}{N}\right)\left(1+\frac{n\cdot\lambda}{(N-n)\cdot\lambda+\mu}\right)\right)^n \Phi_n(N) \; < \; p_{\text{î òê}} \; < \; \Phi_n(N). \tag{4}$$

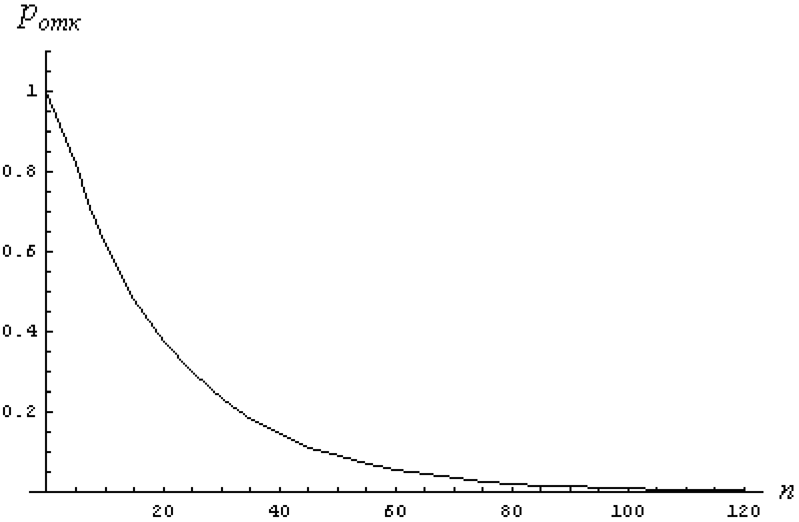


Рис. 1. Зависимость вероятности сохранения максимальной производительности от размера структурной избыточности: $\mu = 0.1ч^{-1}$; $\lambda = 10^{-4}\ ч^{-1}$, $N = 2 \cdot 10^4$ *ЭМ*

Из (4) видно, что $p_{\text{отк}} \approx \Phi(n)$ при $N >> n$, что удобнее использовать для анализа. Оценим погрешность такого приближения. Имеем

$$\Phi_n(N) - p_{\text{отк}} < \delta(n)\Phi_n(N), \tag{5}$$

где

$$\delta(n) = 1 - \left(\left(1 - \frac{n}{N}\right)\left(1 + \frac{n \cdot \lambda}{(N-n) \cdot \lambda + \mu}\right)\right)^n. \tag{6}$$

Из рис. 2 видно, что для $\mu = 0.1ч^{-1}$; $\lambda = 10^{-4}\ ч^{-1}$, $N = 2 \cdot 10^4$ *ЭМ* оценка погрешности (см. (5) и (6)) составляет примерно 1% от $\Phi_n(N)$ при $n = 60$ и примерно 10% при $n = 210$.

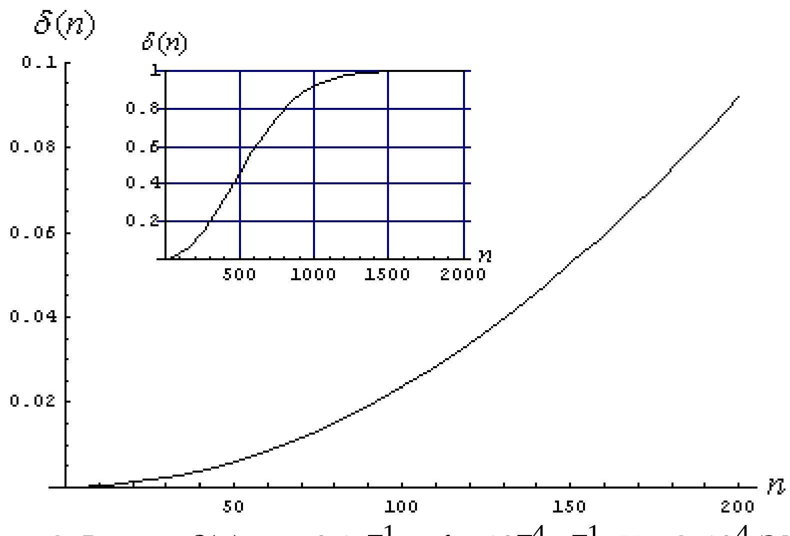
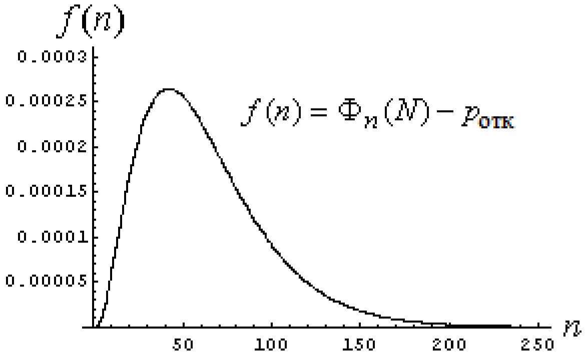
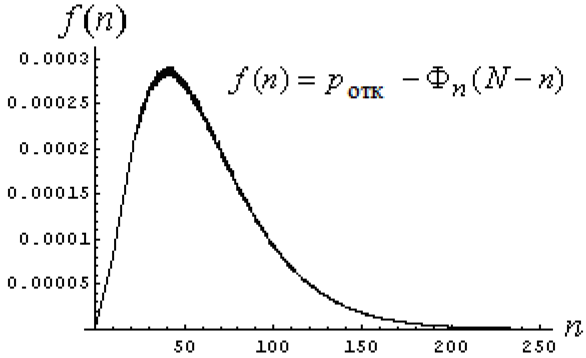


Рис. 2. Расчёт $\delta(n)$ $\mu = 0.1ч^{-1}$; $\lambda = 10^{-4}\ ч^{-1}$, $N = 2 \cdot 10^4$ *ЭМ*

На рис. 3 а) и б) представлен пример расчёта разницы $\Phi_n(N) - p_{\text{отк}}$ и $p_{\text{отк}} - \Phi_n(N-n)$, соответственно. Видно, что графики практически совпадают. Этот пример показывает, что оценка погрешности (5) несколько завышена (примерно, в два раза).



а)



б)

Рис. 3. Оценка погрешности

$\mu = 0.1 ч^{-1}$; $\lambda = 10^{-4}\ ч^{-1}$, $N = 2 \cdot 10^{4}$ *ЭМ*

4. Математическое ожидание числа отказавших машин и соответствующая дисперсия

Для нахождения среднего числа машин $M(t)$, ожидающих восстановления в ВУ, и дисперсии $D(t)$ воспользуемся аппаратом производящих функций [2], тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}F(z,t) = \mu(1-F(z,t)) - N\lambda(1-z)(F(z,t)-P_n(t)z^n) + \lambda z(1-z)\left(\frac{\partial}{\partial z}F(z,t) - nP_n(t)z^{n-1}\right),$$ где

$$F(z,t) = \sum_{k=0}^{n} z^k \cdot P_k(t),\ 0 < z \le 1.$$

Откуда, после некоторых преобразований [3], получаем

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}M(t) + (\mu+\lambda)M(t) = N\lambda - (N-n)\lambda P_n(t), \\ \frac{d}{dt}Q(t) + (\mu+2\lambda)Q(t) = 2\lambda(N-1)M(t) - 2\lambda n P_n(t))(N-n), \\ Q(t) = D(t) - M(t) + M^2(t). \end{cases} \qquad (7)$$

Приближённое значение для $P_n(t)$ предлагается взять из работы [4]. Решение по (7), например, можно найти численными методами.

В работах [5, 6] проводится исследование отказов в распределённых вычислительных системах. На основе статистики отказов в 20 кластерных ВС показано, что предпочтительнее считать, что время между отказами распределено по закону Вейбулла с параметром формы $\delta = 0.78$.

На основе описанного процесса отказов и восстановлений ЭМ в ВС (см.п.2) была разработана имитационная модель функционировании ВС со структурной избыточностью. На рис.4 – 7 приведены графики для математического ожидания отказавших машин, находящихся на восстановлении, с учётом дисперсии ($M(t)$ и $M_w(t)$ – математические ожидания среднего числа отказавших машин; время работы до отказа любой ЭМ, являясь случайной величиной, распределено по экспоненциальному закону и закону Вейбулла с параметром формы $\delta = 0.78$, соответственно; моделирование восстановлений выполнено согласно экспоненциальному закону). Графики построены на основе результатов, полученных при помощи имитационной модели (при 10000 экспериментах) и решением для (7).

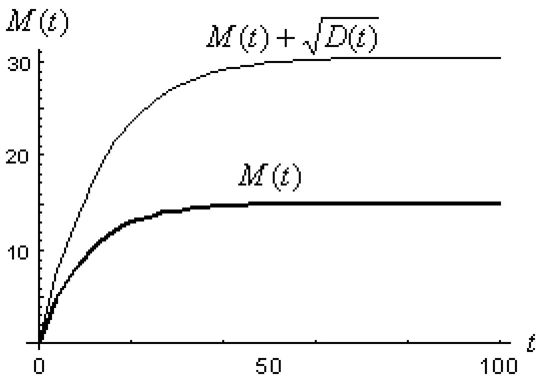


Рис. 4. Зависимость среднего числа отказавших ЭМ, находящихся в ВУ, от времени. Расчёт выполнен согласно формулам (7). Рассматриваются простейшие потоки

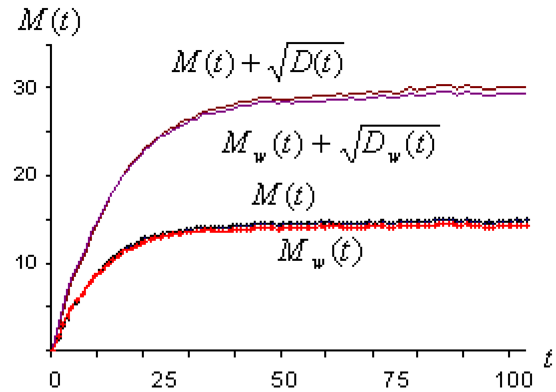


Рис. 5. Зависимость среднего числа отказавших ЭМ находящихся в ВУ от времени. Расчёт выполнен согласно имитационной модели

$N = 1.5 \cdot 10^4$, $\lambda = 10^{-4}$ 1/ч, μ=0.1 1/ч

Рис. 4, 5 показывают, что результаты при моделировании по формулам (7) практически совпадают с имитационным. Рис. 5 – 7 показывают, как влияет $N \cdot \lambda$ на значение разницы между $M(t)$ и $M_w(t)$. При $N \cdot \lambda \approx 1.5$ значения $M(t)$ и $M_w(t)$ практически совпадают (см. рис.5).

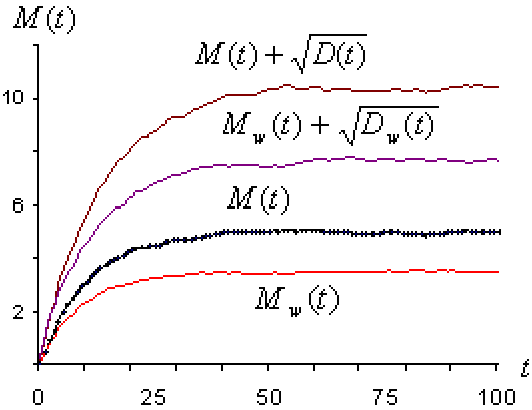


Рис. 6. Зависимость среднего числа отказавших ЭМ, находящихся в ВУ, от времени. Расчёт выполнен согласно имитационной модели. $N = 5 \cdot 10^3$, $\lambda = 10^{-4}$ 1/ч, μ=0.1 1/ч

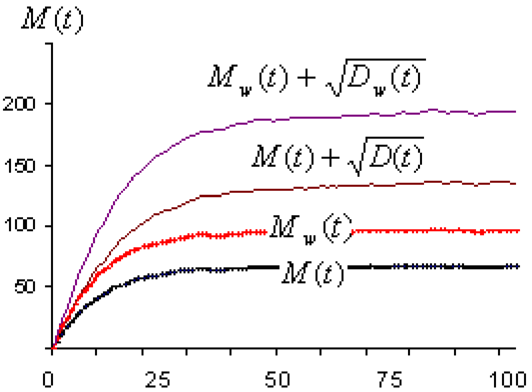


Рис. 7. Зависимость среднего числа отказавших ЭМ, находящихся в ВУ, от времени. Расчёт выполнен согласно имитационной модели. $N = 7.5 \cdot 10^4$, $\lambda = 10^{-4}$ 1/ч, μ=0.1 1/ч

5. Заключение

В работе предложена математическая модель функционирования большемасштабных вычислительных систем (ВС) со структурной избыточностью. Найдена вероятность нахождения ВС в состоянии низкой производительности в зависимости от размера структурной избыточности. Для этой вероятности предложена оценка и её погрешность, которые более удобны для анализа. Предложен расчёт среднего числа отказавших машин в зависимости от времени. Приведены результаты расчёта среднего числа отказавших ЭМ в восстанавливающей системе, построенной по формулам (7) и имитационным моделям (где время работы до отказа любой ЭМ является случайной величиной, распределённой по экспоненциальному закону и закону Вейбулла).

Литература

1. *Хорошевский В.Г.* Архитектура вычислительных систем. М.: МГТУ им. Баумана, 2008, 520 с.
2. *Саати Т.Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. Изд. 3-е. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 520 с.
3. *Хорошевский В.Г., Павский В.А., Павский К.В.* Расчёт показателей живучести распределённых вычислительных систем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. - №2(15). - С. 81-88.
4. *Хорошевский В.Г., Павский В.А., Павский К.В.* Математическая модель и расчёт показателей функционирования вычислительных систем со структурной избыточностью // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2012. - № 5 (130). - С. 37 - 41.
5. *Schroeder B., Gibson Garth A.* A large-scale study of failures in high-performance computing systems // Proceedings of the International Conference on Dependable Systems and Networks (DSN2006), Philadelphia, PA, USA, June 25-28, 2006, 10 p.
6. Analyzing failure data [Электронный ресурс] URL: `http://www.pdl.cmu.edu/FailureData/` (дата обращения 04.04.2013).

Статья поступила в редакцию 01.04.2013

Павский Кирилл Валерьевич

Кандидат технических наук, научный сотрудник лаборатории ВС ИФП СО РАН (630090, Новосибирск, Лаврентьева, 13), тел. (383) 3332171, e-mail: pkv@isp.nsc.ru.

Stochastic models for estimations of distributed computer systems structural redundancy

Kirill V. Pavsky

Within the bounds of queuing lines theory, the mathematical model of distributed computer systems (CS) functioning with reserve is constructed. The functional dependency of the probability of computer system’s low performance subject to the size of structural redundancy is obtained. The estimation for this probability is offered. The results of analytical and simulation modeling are presented.

Keywords: distributed computer systems, structural redundancy, mathematical model, estimations of indices, analysis, exponential and Weibull distributions.