УДК 519.245

Уменьшение дисперсии оценки структурной надёжности сети связи при статистическом моделировании

С. Н. Новиков

Предложен подход уменьшения дисперсии оценки структурной надёжности сети связи при статистическом моделировании. Данный подход состоит в том, что в каждом испытании выводится из строя случайным образом детерминированное число элементов сети. Тем самым уменьшается дисперсия вероятности наступления события «граф связен», что позволяет сократить количество испытаний с сохранением точности результатов вычислений.

Ключевые слова: структурная надёжность, статистическое моделирование.

1. Введение

Проектирование современных телекоммуникационных сетей включает (в качестве одного из обязательных этапов) анализ их структурной надёжности. Решению данной проблемы посвящено множество работ (из последних: монографии [1, 2], диссертации [3, 4], статьи [5, 6] и многие другие работы).

Как правило, анализируемая сеть представляется в виде стохастического графа $G[A, M, P(A), P(M)]$ с множеством:

- вершин $A = \{a_i\};\ i = \overline{1,S},$ соответствующих узлам коммутации (УК);
- рёбер $M = \{m_{ij}\};\ i, j = \overline{1,S};\ i \neq j,$ соответствующих линиям связи (ЛС);
- весовых коэффициентов, соответствующих надёжности УК $P(A) = \{p(a_i)\};\ i = \overline{1,S}$ и ЛС $P(M) = \{p(m_{ij})\};\ i, j = \overline{1,S};\ i \neq j$.

Оценка структурной надёжности анализируемой сети сводится к определению функции надёжности (связности):

- между произвольной парой вершин (дифференциальная оценка)

$$\tilde{P}_{ij} = f_{ij}\{G[A, M, P(A), P(M)]\};\ i, j = \overline{1,S};\ i \neq j; \tag{1}$$

- графа в целом (интегральная оценка)

$$P_o = f_o\{G[A, M, P(A), P(M)]\}. \tag{2}$$

Решение задач (1) и (2) методом полного перебора (с учётом некоторых ограничений) сводится к следующему [7].

Пусть:

– надёжность всех вершин анализируемого графа равна единице (граф с ненадёжными вершинами всегда можно свести к эквивалентному с ненадёжными элементами множества $M=\{m_{ij}\};\ i,j=\overline{1,S};\ i\neq j$);

– отказы элементов множества $M=\{m_{ij}\};\ i,j=\overline{1,S};\ i\neq j,$ являются независимыми событиями.

Пронумеруем элементы множества $M=\{m_{ij}\};\ i,j=\overline{1,S};\ i\neq j$ числами натурального ряда $M=\{m_{ij}\}=\{m_\nu\};\ i,j=\overline{1,S};\ i\neq j;\ \nu=\overline{1,n}.$ Каждое ребро анализируемого графа может находиться в двух состояниях:

$$\begin{cases}\sigma_\nu=1\ (m_{ij}\ \text{исправно) с вероятностью}\ p_\nu=p(m_{ij}); i,j=\overline{1,S}; i\neq j; \nu=\overline{1,n};\\ \sigma_\nu=0\ (m_{ij}\ \text{вышло из строя) с вероятностью}\ q_\nu=1-p_\nu.\end{cases}$$

В этом случае анализируемый граф может находиться в одном из $k=\overline{1,2^n}$ состояний. Вероятность каждого из возможных состояний графа определяется:

$$p_k=\prod_{\nu=1}^{n}p_\nu^{\sigma_\nu}\cdot q_\nu^{1-\sigma_\nu}; k=\overline{1,2^n}.$$

Введём переменные:

$$Q_o^{(k)}=\begin{cases}1,\ \text{если граф, находясь в}\ k\text{-м состоянии, связен;}\\ 0,\ \text{в противном случае;}\end{cases}$$

$$Q_{ij}^{(k)}=\begin{cases}1,\ \text{если граф, находясь в}\ k\text{-м состоянии,}\\ \quad\text{обеспечивает связность вершин}\ a_i\ \text{и}\ a_j;\\ 0,\ \text{в противном случае.}\end{cases}$$

В результате выражения (1) и (2) примут вид:

$$\tilde{P}_{ij}=\sum_{k=1}^{2^n}Q_{ij}^{(k)}p_k=\sum_{k=1}^{2^n}Q_{ij}^{(k)}\prod_{\nu=1}^{n}p_\nu^{\sigma_\nu}\cdot q_\nu^{1-\sigma_\nu}; i,j=\overline{1,S}; \tag{3}$$

$$\tilde{P}_o=\sum_{k=1}^{2^n}Q_o^{(k)}p_k=\sum_{k=1}^{2^n}Q_o^{(k)}\prod_{\nu=1}^{n}p_\nu^{\sigma_\nu}\cdot q_\nu^{1-\sigma_\nu}. \tag{4}$$

Составление формул (3), (4) и последующее их решение является (в общем случае) практически единственным точным численным методом оценки структурной надёжности конкретных сетей связи.

Однако составление аналитических выражений в первом случае и решение во втором – исключительно трудоёмкие процессы, так как в их основе лежит перебор всех состояний анализируемого графа.

В работах [3 – 5] приведён достаточно полный обзор аналитических методов оценки структурной надёжности сети связи. Каждый из них имеет свои преимущества и недостатки.

Возможность применения того или иного метода определяется типом и размерностью анализируемой системы, а также требуемой точностью анализа.

Для оценки структурной надёжности телекоммуникационной системы большой размерности наиболее приемлемым остаётся метод статистического моделирования [7, 8], основной проблемой которого является скорость сходимости.

2. Оценка структурной надёжности сети связи методом статистического моделирования

Осуществляют N_o независимых испытаний, каждое из которых состоит из двух этапов.

На первом этапе вырабатывают n независимых, случайных, равномерно распределённых в интервале (0,1) чисел X_ν. Затем значения X_ν последовательно сравнивают с величинами надёжностей p_ν каждого элемента графа, описывающего структуру анализируемой сети, по следующему алгоритму:

$$\begin{cases} \text{Если } X_\nu \geq p_\nu \Rightarrow \text{ элемент графа считается выведенным из строя;} \\ \text{Если } X_\nu < p_\nu \Rightarrow \text{ элемент графа находится в исправном состоянии.} \end{cases} \tag{5}$$

Второй этап – проверка графа, полученного в результате выхода его элементов из строя, на связность. Если граф связен, то исход испытания относится к числу благоприятных. Отношение числа благоприятных исходов к общему числу испытаний N_o и будет оценкой структурной надёжности графа.

Метод статистического моделирования является приближённым методом оценки структурной надёжности сети связи. Погрешность результата вычисления имеет статистическую природу. Количественная взаимосвязь между погрешностью и числом испытаний N_o определяется следующим формулой [8, стр. 95]:

$$\Delta_a = N_o^{-0.5} \cdot \sigma \cdot t_\beta, \tag{6}$$

где

Δ_a – абсолютное значение ошибки (половина доверительного интервала);

σ – среднеквадратичное отклонение от искомой величины $\tilde{P}_o$;

$\sigma^2 = \tilde{P}_o(1-\tilde{P}_o)$;

β – достоверность полученной оценки;

t_β – функция, обратная нормальной при аргументе $(1+\beta)^{-1}$, находится по таблице (например [8]).

В практике статистического моделирования задача формулируется иначе, а именно: сколько необходимо провести испытаний, чтобы обеспечить заданную абсолютную или относительную погрешность вычисления. Тогда из (6) легко получить искомую величину

$$N_o = t_\beta^2 \cdot \sigma^2 \cdot \Delta_a^{-2}. \tag{7}$$

В формулу входят значения $\tilde{P}_o$ и σ в качестве точных значений. Но поскольку само $\tilde{P}_o$ является предметом измерения и может быть получено лишь приближённо, то погрешность Δ_a по результатам опыта не может быть получена точно.

Оценку получают экспериментально путём проведения небольшого количества предварительных испытаний $\left(N_{o\,\text{предв.}} \approx 5 \div 20\right)$.

В качестве $\tilde{P}_o$ и σ берут величины [8]:

$$\hat{\tilde{P}}_o = N_{o\,\text{предв.}}^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{N_{o\,\text{предв.}}} X_i; \;\; \hat{\sigma}^2 = N_{o\,\text{предв.}}^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{N_{o\,\text{предв.}}} (X_i - \hat{\tilde{P}}_o)^2,$$

где X_i – значения, которые принимает измеряемая случайная величина. Затем эти оценки учитываются формуле (7) для расчёта требуемого количества испытаний N_o.

Из (6) и (7) можно сделать вывод о скорости сходимости метода статистического моделирования; для практических целей эта скорость совершенно неудовлетворительная. Действительно, уменьшение погрешности на порядок приводит к увеличению количества испытаний на два порядка. Одновременно с этим выделяется, во-первых, та область, где применение данного метода наиболее целесообразно – это область невысоких точностей решений, здесь метод статистического моделирования составляет несомненную конкуренцию классическим аналитическим методам. Во-вторых, просматриваются и пути повышения эффективности метода путём построения таких вероятностных моделей, которые характеризовались бы минимальной дисперсией оцениваемых функционалов.

Таким образом, сокращение времени, затрачиваемого ЭВМ на решение задачи, можно обеспечить двумя путями:

1) разработкой методов, позволяющих уменьшить количество испытаний с сохранением точности результатов моделирования;

2) разработкой алгоритмов меньшей сложности для оценки структурной ненадёжности сети связи.

Решение первой проблемы связано с уменьшением дисперсии оценок результатов моделирования. Во втором случае необходимо разработать алгоритмы для проверки графа на связность меньшей сложности [9].

3. Подход уменьшения дисперсии оценок результатов моделирования

Вероятность того, что граф окажется связен (в одном из испытаний статистического моделирования), существенным образом зависит от величины p_v. Если всем элементам графа дать одинаковые величины p_v, то при большом количестве N_o число элементов графа, которое будет выходить из строя, в среднем будет равно целому $q_v \cdot 100$ от общего числа элементов графа. Таким образом, можно утверждать, что если вместо операции (5) на первом этапе каждого испытания выводить из строя случайным образом ровно $q_v \cdot 100$ от общего количества элементов графа, то тем самым уменьшится дисперсия наступления события «граф связен».

Покажем это следующим образом. Пусть: $p = p_v;\; 0 \le p_v \le 1; v = \overline{1,n};\; q = 1 - p;\;\; I_q$ – есть целое от $q \cdot 100$; выходы элементов графа из строя являются независимыми событиями. Тогда вероятность наступления события, что при j-м испытании ($j = \overline{1, N_o}$) из строя будет выведено ровно I_q элементов графа, определяется частной теоремой о повторении опытов и равна:

$$P_{I_q}^{(j)} = C_n^{I_q} \cdot P^{I_q} \cdot q^{(S - I_q)}. \tag{8}$$

Дисперсия $P_{I_q}^{(j)}$ составит:

$$\sigma_{I_q}^{(j)^2} = P_{I_q}^{(j)} \cdot (1 - P_{I_q}^{(j)}). \tag{9}$$

Подставив (8) и (9) в (7), определим то количество испытаний, которое необходимо выполнить, чтобы с заданной погрешностью было выведено из строя ровно I_q элементов сети:

$$N_{oI_q}^{(j)} = \left\{ C_n^{I_q} \cdot P^{I_q} \cdot q^{(S-I_q)} \cdot \left[1 - C_n^{I_q} \cdot P^{I_q} \cdot q^{(S-I_q)} \right] \right\} \cdot t_\beta^2 \cdot \Delta_a^{-2}. \qquad (10)$$

Таким образом, применяя предложенный подход, достаточно выполнить

$$\Lambda = N_o - N_{oI_q}^{(j)} \qquad (11)$$

испытаний, чтобы получить результат оценки с сохранением абсолютной погрешности вычислений.

Данный подход имеет ограничение. Его применение возможно в сетях, элементы которого имеют одинаковые параметры надёжности.

Приведём пример. В работе [6] представлены результаты расчёта структурной надёжности транспортной сети для различных структур (радиально-узловая, кольцевая и т.д.). В каждом варианте структур коэффициенты готовности для всех ЛС выбирались одинаковыми и изменялись в некоторых пределах. Розыгрыш состояний элементов анализируемой сети осуществлялся по алгоритму (5). Количество испытаний рассчитывалось с достоверностью $\beta = 0.95$. Обратимся к рисунку 3 работы [8, стр. 58]. На графике варианта 2 (кольцевая структура) выберем точку, соответствующую параметрам: $K_{\Gamma\, ij} = 0.5$ (в наших обозначениях $p = p_\nu = 0.5;\ 0 \le p_\nu \le 1; \nu = \overline{1,n};\ n = 10$); $M_{\text{ОТН}}^*(X) = 60$ (в наших обозначениях $\tilde{P}_o = 0.6$). Допустим, что расчёты проводились с абсолютной погрешностью $\Delta_a = 0.01$.

Таким образом, подставляя в формулу (7) исходные данные $\tilde{P}_o = 0.6$; $\beta = 0.95$; $t_\beta = 1.96$; $\Delta_a = 0.01$ получим необходимое количество испытаний $N_o = 9220$ для одной точки кривой.

Теперь проведём расчёт необходимого количества испытаний с использованием предлагаемого подхода. Подставим в формулу (10) исходные данные: $I_q = 5$ ($p = p_\nu = 0.5$) ; $n = 10$; $t_\beta = 1.96$; $\Delta_a = 0.01$). Получим $N_{oI_q}^{(j)} = 7145$. В результате для обеспечения абсолютной погрешности $\Delta_a = 0.01$ результатов счёта достаточно выполнить всего $\Lambda = N_o - N_{oI_q}^{(j)} = 2075$ испытаний.

4. Вывод

Предложен подход, позволяющий уменьшить дисперсию оценки структурной надёжности сети связи методом статистического моделирования, при заданном количестве испытаний с сохранением точности результатов вычислений.

Литература

1. *Рябинин И. А.* Надёжность и безопасность структурно-сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. 276 с.
2. *Попков В. К.* Математические модели связности / Отв. ред. А. С. Алексеев. - Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2006 г. - 490 с.
3. *Фисенко В. Е.* Методология анализа и синтеза сложных информационных систем реального времени на основе встречно-соединённых дополнительных древовидных струк-

тур.//. Автореферат диссертации на соискание учёной степени д. т. н. ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», 2008 – 38 с.
4. *Селифанов В. А.* Методы оценки структурной надёжности мультисервисных систем при реализации инфокоммуникационных услуг на региональном уровне // Автореферат диссертации на соискание учёной степени к. т. н. Московский государственный институт электроники и математики (технический университет) – Москва: 2011. – 19 с.
5. *Тютин Н. Н., Успенский И. М., Чудинов С. М., Кривошеев О. Н.* Методы расчёта структурной надёжности многоцелевых территориальных мультисервисных систем связи // Научные ведомости БелГУ. Серия: История. Политология. Экономика. Информатика 2009 №9-1-1 .- С. 60 – 68.
6. *Егунов М. М., Шувалов В. П.* Анализ структурной надёжности транспортной сети/ М. М. Егунов, В. П. Шувалов // Вестник СибГУТИ. 2012. № 1 . – С. 54 – 60.
7. *Новиков С. Н.* Методы оценки структурной надёжности телекоммуникационных систем. Учебное пособие. Методический комплекс. / С. Н.Новиков, Е. В. Сафонов / ГОУ ВПО «СибГУТИ» - Новосибирск: 2004.- 44 с. (Рекомендовано УМО).
8. *Бусленко Н.П.* Моделирование сложных систем. – Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1968. – 356 с.
9. *Новиков С.Н., Жарикова В.О.* Способ проверки графа на связность. / С.Н.Новиков, В.О. Жарикова // Федеральная служба по интеллектуальной собственности ФГБУ ФИПС, Рег. № 2012101138 от 11.01.2012.

Статья поступила в редакцию 01.03.2013;
переработанный вариант — 30.04.2013

Новиков Сергей Николаевич
к.т.н., доцент, профессор кафедры безопасности и управления в телекоммуникациях СибГУТИ, ул. Кирова, 86) тел. (383) 2-698-245, e-mail: snovikov@mbit.ru

Dispersion reduction of network structural reliability evaluation on application of statistic simulation

S. Novikov

An approach to reduce dispersion of network structural reliability on application of statistic simulation is presented. This approach consists in the fact that in every trial deterministic number of network elements is put out of action in a random way. This reduces the variance of dispersion probability of the event «graph is connected», reducing the number of tests while maintaining the accuracy of the calculation results.

Keywords: structural reliability, statistic simulation.