

Анализ и синтез точности измерительного контроля

В.И. Серых, Л.В. Гребцова

В статье получены и исследованы аналитические выражения для расчёта вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода высокоточного измерительного контроля. Обсуждается задача синтеза высокоточного контроля.

Ключевые слова: высокоточный измерительный контроль, средние и условные вероятности ошибок.

1. Введение

Современное высоконадёжное производство продукции предполагает, что количество бракованных изделий на выходе не должно превышать $(1 - 10)$ штук на миллион $(1 - 10)$ ppm [1].

При отсутствии выходного контроля это соответствует риску потребителя с вероятностью $\beta \leq 10^{-5}$. Как показано в работе [2], уменьшения вероятности брака и, соответственно, риска потребителя продукции добиваются повышением качества производственных процессов и при необходимости введением высокоточного выходного контроля. При этом [2] имеются области минимума затрат в зависимости от точности технологического процесса.

Если же технологический процесс не в состоянии обеспечить требуемую точность, то возникает необходимость введения высокоточного выходного измерительного контроля, обеспечивающего допустимый риск потребителя, например, со средней вероятностью ошибки 2-го рода $\beta \leq 10^{-4}$. Измерительный контроль, обеспечивающий риск потребителя с вероятностью $\beta \leq 10^{-4}$, условно определим как высокоточный. Отсюда следует, что выбор необходимых средств измерительного контроля требует решения задачи выбора точности средств измерений (СИ) по заданному значению вероятности ошибок 2-го рода, т.е. решения задачи синтеза точности. В свою очередь, для решения задачи синтеза в аналитическом виде необходимо иметь достаточно простые, но математически точные методы расчёта достоверности измерительного контроля. Этим требованиям отвечает методика, разработанная в [3]. Настоящая статья посвящена применению данной методики при решении задачи анализа достоверности высокоточного измерительного контроля, включая многопараметрический контроль. Обсуждается задача синтеза точности измерений.

2. Достоверность высокоточного измерительного контроля

Для методик измерительного контроля, предусматривающих фиксацию результата измерений контролируемого параметра образца (изделия), в качестве показателя достоверности контроля в [4] рекомендуется средняя (по совокупности всех контролируемых образцов) вероятность ошибочного признания дефектными в действительности годных образцов (вероятность ошибки 1-го рода).

Аналогично определяется второй показатель – средняя по совокупности всех контролируемых образцов вероятность ошибочного признания годными в действительности дефектных образцов (вероятность ошибки 2-го рода).

Аналитические выражения для средних вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода при измерительном контроле при наличии аддитивных погрешностей измерения впервые получены Н.А. Бородачёвым с использованием метода «ненормированных распределений» [5]. Соответствующие выражения имеют вид:

$$\alpha_i(\sigma_{y_i}) = \int_{a_i}^{b_i} f(U_i) \left[\int_{-\infty}^{a_i} f(y|U_i) dy_i + \int_{b_i}^{\infty} f(y_i|U_i) dy_i \right] dU_i, \quad (1)$$

$$\beta_i(\sigma_{y_i}) = \int_{-\infty}^{a_i} f(U_i) \left[\int_{a_i}^{b_i} f(y_i|U_i) dy_i \right] dU_i + \int_{b_i}^{\infty} f(U_i) \left[\int_{a_i}^{b_i} f(y_i|U_i) dy_i \right] dU_i. \quad (2)$$

Здесь $[a_i, b_i]$ – допуск на i -тый измеряемый параметр U_i , $f(U_i)$ – функция плотности вероятности измеряемого параметра, $f(y_i|U_i)$ – условная плотность вероятности погрешности измерения.

Использование формул (1) и (2) для анализа достоверности контроля при различных законах распределения измеряемого параметра и погрешности с применением таких прикладных программ, как Mathcad, не представляет проблем [6]. Что касается задачи синтеза точности с использованием формул (1) и (2), то при этом требуется разработка соответствующих номограмм, связывающих точность измерений с достоверностью контроля для различных моделей распределений параметра и погрешностей, как это делается в работе [7]. Однако при решении оперативных задач метрологического обеспечения эта задача является сложной и трудоёмкой для практического применения.

Формулы, аналогичные (1) и (2), могут быть получены другим методом, в частности с использованием оперативных характеристик. При этом оперативная характеристика определяется в [4] как зависимость вероятности признания годности образца при его контроле от значения измеряемого параметра U_i . При известной интегральной функции распределения вероятностей $F(\psi_i)$ аддитивной погрешности измерения получим следующие функции:

$$L_{\alpha 1}(U_i) = 1 - F_{\psi_i}(U_i + a_i), \quad (3)$$

$$L_{\alpha 2}(U_i) = F_{\psi_i}(U_i - b_i) \quad (4)$$

– для вероятностей признания дефектным при попадании значения измеряемого параметра U_i в поле допуска $[a_i, b_i]$;

$$L_{\beta 1}(U_i) = F_{\psi_i}(U_i + a_i), \quad (5)$$

$$L_{\beta 2}(U_i) = 1 - F_{\psi_i}(U_i - b_i) \quad (6)$$

– для вероятностей ложного признания годным при попадании параметра в интервалы $[-\infty, a_i]$ или $[b_i, \infty]$.

Исходя из определений средних вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода, приведённых выше, с учётом (3 – 6) получим следующие выражения для их вычисления:

$$\alpha_i = \int_{a_i}^{b_i} f(U_i) \{ [1 - F_{\psi_i}(U_i + a_i)] + F_{\psi_i}(U_i - b_i) \} dU_i, \quad (7)$$

$$\beta_i = \int_{-\infty}^{a_i} f(U_i) F_{\psi_i}(U_i + a_i) dU_i + \int_{b_i}^{\infty} f(U_i) [1 - F_{\psi_i}(U_i - b_i)] dU_i. \quad (8)$$

Рассмотрим важный для практики случай усечённого распределения погрешности $\bar{F}(\psi_i)$ в интервале $[-\Delta_{i,m}, \Delta_{i,m}]$, рекомендованный МИ 1317-2004 [4]. При этом условии формулы (7), (8) приобретают вид:

$$\alpha_i = \int_{a_i}^{a_i+\Delta_{i,m}} f(U_i)[1-\bar{F}_{\psi_i}(U_i+a_i)]dU_i + \int_{b_i-\Delta_{i,m}}^{b_i} f(U_i)\bar{F}_{\psi_i}(U_i-b_i)dU_i, \quad (9)$$

$$\beta_i = \int_{a_i-\Delta_{i,m}}^{a_i} f(U_i)\bar{F}_{\psi_i}(U_i+a_i)dU_i + \int_{b_i}^{b_i+\Delta_{i,m}} f(U_i)[1-\bar{F}_{\psi_i}(U_i-b_i)]dU_i. \quad (10)$$

Учитывая ограниченность пределов интегрирования в (9) и (10), эти выражения можно представить в виде:

$$\alpha_i = f(h_{\alpha_i}^{(1)})[1-\bar{F}_{\psi_i}(h_{\alpha_i}^{(1)})]\Delta_{i,m} + f(h_{\alpha_i}^{(2)})\bar{F}_{\psi_i}(h_{\alpha_i}^{(2)})\Delta_{i,m}, \quad (11)$$

$$\beta_i = f(h_{\beta_i}^{(1)})\bar{F}_{\psi_i}(h_{\beta_i}^{(1)})\Delta_{i,m} + f(h_{\beta_i}^{(2)})[1-\bar{F}_{\psi_i}(h_{\beta_i}^{(2)})]\Delta_{i,m}. \quad (12)$$

Здесь:

$$h_{\alpha_i}^{(1)} = a_i + k_i\Delta_{i,m}, \quad h_{\alpha_i}^{(2)} = b_i - k_i\Delta_{i,m}, \quad h_{\beta_i}^{(1)} = a_i - k_i\Delta_{i,m}, \quad h_{\beta_i}^{(2)} = [b_i + k_i\Delta_{i,m}], \quad (13)$$

где коэффициент k_i определяет точку отсчёта в интервалах интегрирования в (9) и (10). В соответствии с теоремой о среднем всегда можно найти такие значения $k_i \in [0,1]$, при которых результаты расчёта по формулам (11) и (12) совпадут с результатами расчёта по (9) и (10).

Ниже даётся иллюстрация применения предлагаемой методики расчёта средних ошибок 1-го и 2-го рода *при высокоточном контроле*. Дано решение для двух важнейших моделей распределения аддитивных погрешностей измерения, а именно, для равномерного и гауссового законов при нормальном распределении измеряемого параметра [9 – 12].

2.1. Равномерное распределение аддитивной погрешности

В соответствии с выражениями (9) и (10), вероятности ошибок 1-го и 2-го рода равны

$$\alpha_i = \int_{a_i}^{a_i+\Delta_{i,m}} dnorm(U_i, \mu_i, \sigma_i)[1 - punif(U_i, a_i - \Delta_i, a_i + \Delta_i)]dU_i + \int_{b_i-\Delta_{i,m}}^{b_i} dnorm(U_i, \mu_i, \sigma_i) punif(U_i, b_i - \Delta_i, b_i + \Delta_i)dU_i, \quad (14)$$

$$\beta_i = \int_{a_i-\Delta_{i,m}}^{a_i} dnorm(U_i, \mu_i, \sigma_i) punif(U_i, a_i - \Delta_i, a_i + \Delta_i)dU_i + \int_{b_i}^{b_i+\Delta_{i,m}} dnorm(U_i, \mu_i, \sigma_i)[1 - punif(U_i, b - \Delta_i, b + \Delta_i)]dU_i. \quad (15)$$

Здесь и далее применяем следующие функции в обозначениях программы Mathcad:

– $dnorm(U_i, \mu_i, \sigma_i)$ соответствует гауссовой плотности вероятности

$f(U_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp[-\frac{(U_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}]$ с математическим ожиданием μ_i и дисперсией σ_i^2 ;

– $pnorm(U_i, \mu_i, \sigma_i)$ – интегральная функция распределения вероятностей для представленной выше гауссовой плотности вероятности $f(U_i)$.

– $unif(U_i, U_1, U_2)$ – равномерная в интервале $[U_1, U_2]$ плотность вероятности случайной величины $f(U_i)$ и $punif(U_i, U_1, U_2)$ – соответствующая данной плотности интегральная функция распределения.

Для выражений (11) и (12) вероятности ошибок равны:

$$\begin{aligned} \alpha_i = & dnorm(a_i + \frac{\Delta_i}{2}, \mu_{1i}, \sigma_{1i}) [1 - punif(a_i + \frac{\Delta_{i,m}}{2}, a_i - \Delta_{i,m}, a_i + \Delta_{i,m})] \Delta_{i,m} + \\ & + dnorm(b_i - \frac{\Delta_{i,m}}{2}, \mu_{1i}, \sigma_{1i}) punif(b_i - \frac{\Delta_{i,m}}{2}, b_i - \Delta_{i,m}, b_{i,m} + \Delta_{i,m}) \Delta_{i,m} \quad , \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \beta_i = & norm(a_i - \frac{\Delta_{i,m}}{2}, \mu_{1i}, \sigma_{1i}) punif(a_i - \frac{\Delta_{i,m}}{2}, a_i - \Delta_{i,m}, a + \Delta_{i,m}) \Delta_{i,m} + \\ & + dnorm(b_i + \frac{\Delta_{i,m}}{2}, \mu_{1i}, \sigma_{1i}) [1 - punif(b_i + \frac{\Delta_{i,m}}{2}, b_i - \Delta_{i,m}, b_i + \Delta_{i,m})] \Delta_{i,m} . \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая, что равномерные распределения (вторые множители в (16) и (17)) при $k_i = \frac{1}{2}$ принимают значения, равные $\frac{1}{4}$, то эти выражения:

$$\alpha_i = \frac{1}{4} [dnorm(a_i + \frac{\Delta_i}{2}, \mu_{1i}, \sigma_{1i}) \Delta_{i,m} + dnorm(b_i - \frac{\Delta_{i,m}}{2}, \mu_{1i}, \sigma_{1i}) \Delta_{i,m}] , \quad (18)$$

$$\beta_i = \frac{1}{4} [dnorm(a_i - \frac{\Delta_{i,m}}{2}, \mu_{1i}, \sigma_{1i}) \Delta_{i,m} + dnorm(b_i + \frac{\Delta_{i,m}}{2}, \mu_{1i}, \sigma_{1i}) \Delta_{i,m}] . \quad (19)$$

Следует отметить, что слагаемые в квадратных скобках являются приближённо вероятностями попадания значений измеряемого параметра в интервалы $[a_i, a_i + \frac{\Delta_{i,m}}{2}]$, $[b_i - \frac{\Delta_{i,m}}{2}, b_i]$ и $[a_i, a_i - \frac{\Delta_{i,m}}{2}]$, $[b_i, b_i + \frac{\Delta_{i,m}}{2}]$.

Для симметричного распределения измеряемого параметра при $\mu_{1i} = 0$ выражения (16) и (17) приобретают исключительно простой вид:

$$\alpha_i = \frac{1}{2} dnorm(a_i + \frac{\Delta_{i,m}}{2}, 0, \sigma_{1i}) \Delta_{i,m} , \quad (20)$$

$$\beta_i = \frac{1}{2} dnorm(a_i - \frac{\Delta_{i,m}}{2}, 0, \sigma_{1i}) \Delta_{i,m} . \quad (21)$$

2.2. Нормальное распределение аддитивной погрешности измерения

В соответствии с выражениями (9) и (10) вероятности ошибок 1-го и 2-го рода равны:

$$\begin{aligned} \alpha_i = & \int_{a_i}^{a_i + \Delta_{i,m}} dnorm(U_i, \mu_{1i}, \sigma_{1i}) [1 - pnorm(U_i, 0, \sigma_{2i})] dU_i + \\ & + \int_{b_i - \Delta_{i,m}}^{b_i} dnorm(U_i, \mu_{1i}, \sigma_{1i}) pnorm(U_i, 0, \sigma_{2i}) dU_i \quad , \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \beta_i = & \int_{a_i - \Delta_{i,m}}^{a_i} dnorm(U_i, \mu_{1i}, \sigma_{1i}) pnorm(U_i, 0, \sigma_{2i}) dU_i + \\ & + \int_{b_i}^{b_i + \Delta_{i,m}} dnorm(U_i, \mu_{1i}, \sigma_{1i}) [1 - pnorm(U_i, 0, \sigma_{2i})] dU_i \quad . \end{aligned} \quad (23)$$

Из выражений (22) и (23) в соответствии с (11) и (12) те же вероятности равны:

$$\begin{aligned} \alpha_i = & dnorm(a_i + \frac{\Delta_i}{2}, \mu_i, \sigma_{1i}) [1 - pnorm(a_i + k_{\alpha i} \Delta_{i,m}, 0, \sigma_{2i})] \Delta_{i,m} + \\ & + dnorm(b_i - \frac{\Delta_{i,m}}{2}, \mu_i, \sigma_{1i}) pnorm(b_i - k_{\alpha i} \Delta_{i,m}, 0, \sigma_{2i}) \Delta_{i,m} \quad , \end{aligned} \quad (24)$$

$$\beta_i = dnorm(a_i - \frac{\Delta_{i,m}}{2}, \mu_{1i}, \sigma_{1i})pnorm(a_i - k_{\beta i}\Delta_{i,m}, 0, \sigma_{2i})\Delta_{i,m} + dnorm(b_i + \frac{\Delta_{i,m}}{2}, \mu_{1i}, \sigma_{1i})[1 - pnorm(b_i + k_{\beta i}\Delta_{i,m}, 0, \sigma_{2i})]\Delta_{i,m} . \quad (25)$$

Здесь $k_{\alpha i}, k_{\beta i}$ подбираются из условия равенства результатов вычислений по формулам (24), (25) и (22), (23) соответственно. Как показывают эти вычисления, результаты которых приведены ниже (см. рис.1), $k_{\alpha i} = 0.25$, $k_{\beta i} = 0.25$.

На рис. 1 представлены зависимости вероятностей ошибок 1-го (а) и 2-го рода (б), вычисленные по формулам (14), (15), (16), (17) для равномерного распределения погрешности (кривые $\alpha(\Delta)$, $\alpha1(\Delta)$, $\beta(\Delta)$, $\beta1(\Delta)$). Здесь так же представлены вероятности, рассчитанные по формулам (22), (23), (24) и (25), для нормального распределения погрешности (кривые $\alpha0(\Delta)$, $\alpha01(\Delta)$, $\beta0(\Delta)$, $\beta01(\Delta)$). СКО нормального и равномерного распределений погрешности равны $\sigma_{2i} = \frac{\Delta_{i,m}}{\sqrt{3}}$. Тогда интервал распределения нормальной погрешности равен $[-\sqrt{3}\Delta_{i,m}, \sqrt{3}\Delta_{i,m}]$. Распределение значений измеряемого параметра принято симметричным, т.е., $\mu_{1i} = 0$.

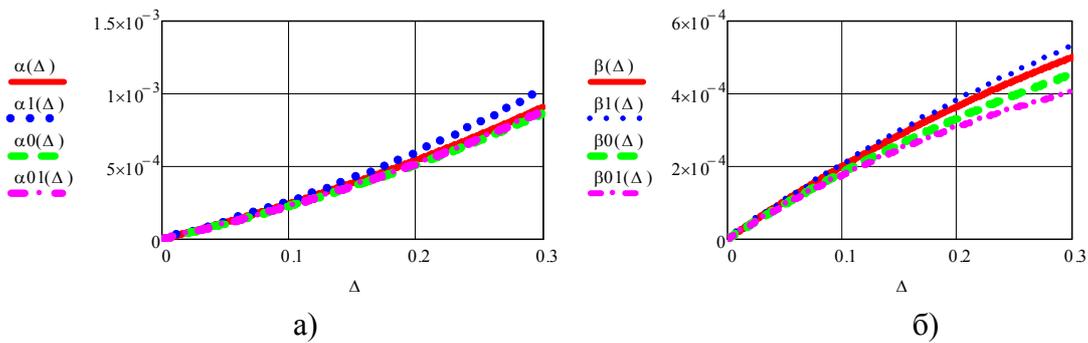


Рис. 1. Зависимости вероятностей ошибок 1-го (а) и 2-го рода (б)

На рис. 2 представлены зависимости вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода, построенные для усечённого нормального распределения погрешности по формулам (22), (23), (24) и (25) – кривые $\alpha_i0(\Delta_{i,m}), \alpha_i01(\Delta_{i,m}), \beta_i0(\Delta_{i,m}), \beta_i01(\Delta_{i,m})$, а также кривые $\alpha_i02(\Delta_{i,m}), \beta_i02(\Delta_{i,m})$ для неусечённого нормального распределения погрешности в соответствии формулами (7) и (8).

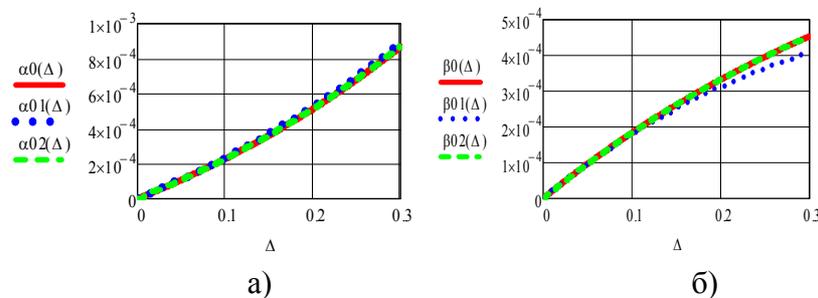


Рис. 2. Сравнение вероятностей ошибок при усечённом и неусечённом распределениях погрешности

Из графиков, представленных на рис. 1 и 2, следует:

– расчёты по формулам (18), (19) и (24), (25) дают практически точное совпадение с зависимостями вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода, рассчитанных по точным формулам (14) и (15), (22) и (23), включая начало диапазона грубых измерений. Этот диапазон *условно* определим, как диапазон значений половины интервала $\Delta_{i,m}$ распределения погрешности, при которых вероятности ошибок 2-го рода $\beta_i > 10^{-4}$;

– подтверждается свойство, отмеченное в [3], заключающееся в том, что вероятности ошибок, вычисленные для равномерного распределения погрешностей, являются верхними оценками.

– вероятности ошибок, вычисленные для усечённого в интервале $[-3\sigma_{1i}, 3\sigma_{1i}]$ нормального распределения погрешности, совпадают с вероятностями, вычисленными при неусечённом распределении погрешности измерения

(рис. 2, кривые $\alpha 0(\Delta), \beta 0(\Delta)$ и $\alpha 02(\Delta), \beta 02(\Delta)$).

Поскольку здесь интерес представляют высокоточные измерения, на рис. 3 продублированы графики рис. 2 для меньших максимальных погрешностей измерения.

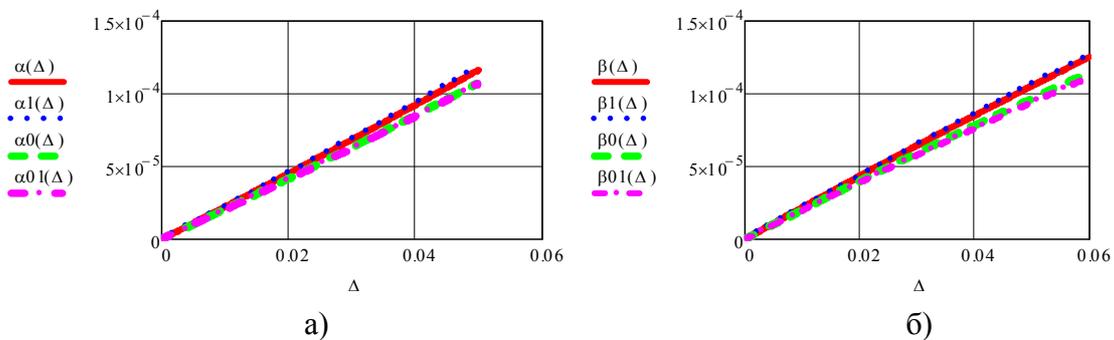


Рис. 3. Продублированные графики рис. 2 для меньших максимальных погрешностей измерения

Из графиков, представленных на рис. 3, следует, что отличия кривых для равномерно и нормально распределённых погрешностях при высокоточных измерениях практически отсутствуют.

На рис. 4 представлены графики для вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода в зависимости от СКО $\sigma_{i,1}$ значений измеряемого параметра при равномерном и нормальном распределении погрешности измерений при $\Delta_{i,m} = 0,06$. Это кривые $\alpha(\sigma_{i,1}), \alpha 1(\sigma_{i,1}), \beta(\sigma_{i,1}), \beta 1(\sigma_{i,1})$ и $\alpha 0(\sigma_{i,1}), \alpha 01(\sigma_{i,1}), \beta 0(\sigma_{i,1}), \beta 01(\sigma_{i,1})$ соответственно. Из графиков следует, что полученные выше формулы для вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода сохраняются при изменении СКО измеряемого параметра в важном для практики диапазоне $[0.5, 1]$. Нижнее значение $\sigma_{i,1} = 0.5$ предполагает «метод 6 сигм» [1], когда в допуск $[a_i, b_i]$ входит $[-6\sigma_{i,1}, 6\sigma_{i,1}]$ и соответствующая вероятность брака $P_{\sigma_i} = 2 \cdot 10^{-7}$ или 0.2 ppm (см. таблицу). Верхнее значение $\sigma_{i,1} = 1$ соответствует вероятности брака $P_{b,i} = 2.7 \cdot 10^{-3}$ или 2700 ppm .

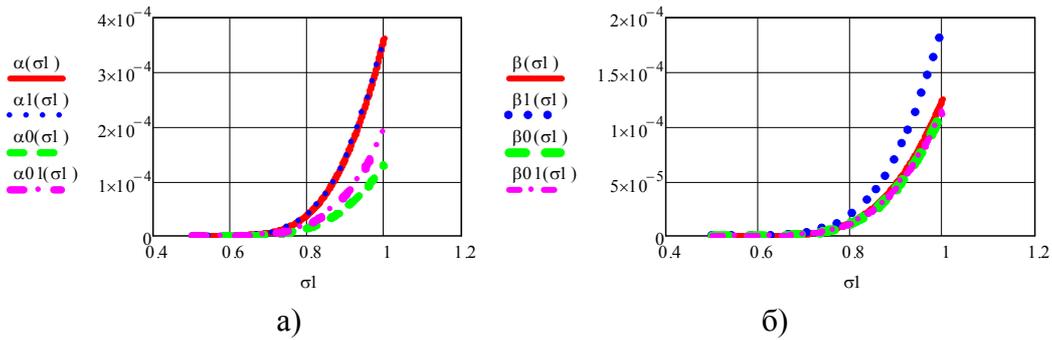


Рис. 4. Зависимости вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода от СКО значений измеряемого параметра σ_{li}

Таблица 1. Зависимость погрешности измерения от СКО измеряемого параметра при заданной вероятности ошибки 2-го рода

СКО параметра $\sigma_{1,i}$	$\frac{b_i - a_i}{\sigma_{1,i}}$	Вероятность брака $P_{b,i}$	$P_{b,i}, ppm$	Вероятность ошибки 2-го рода, β_i	СКО погрешности измерения, $\sigma_{2,i} = \frac{\Delta_{2,i}}{\sqrt{3}}$	$\gamma_i = \frac{3\sigma_{2,i}}{b_i} \cdot 100$, % – приведённая погрешность
0.5	12	$2 \cdot 10^{-7}$	0.2	Нет измерений	-	-
0.62	9.7	$1 \cdot 10^{-6}$	1.0	Нет измерений	-	-
0.65	9.2	$4 \cdot 10^{-6}$	4.0	$\leq 8 \cdot 10^{-7}$	$\leq 0,173$	17.3
0.7	8.6	$1.7 \cdot 10^{-5}$	17	$1 \cdot 10^{-6}$	$\leq 0,023$	2.3
0.75	8.0	$6 \cdot 10^{-5}$	60	$1 \cdot 10^{-6}$	$\leq 7.22 \cdot 10^{-3}$	0.722
0.8	7.5	$1.7 \cdot 10^{-4}$	170	$1 \cdot 10^{-6}$	$\leq 2.9 \cdot 10^{-3}$	0.29
0.9	6.7	$8 \cdot 10^{-4}$	800	$1 \cdot 10^{-6}$	$7.5 \cdot 10^{-4}$	0.075
0.95	6.3	$1.5 \cdot 10^{-3}$	1500	$1 \cdot 10^{-6}$	$\leq 4.6 \cdot 10^{-4}$	0.046
1.0	6	$2.7 \cdot 10^{-3}$	2700	$1 \cdot 10^{-6}$	$\leq 2.9 \cdot 10^{-4}$	0.029

3. Показатели достоверности контроля многопараметрических объектов

Пусть состояние контролируемого объекта (процесса, изделия) описывается вектором $\vec{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_N\}$, где N – количество измеряемых статистически независимых параметров. Здесь

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{– если годен } i\text{-й параметр;} \\ 0 & \text{– если брак.} \end{cases}$$

В процессе контроля принимается решение об истинном состоянии объекта путём измерения значения величины i -того параметра на предмет принадлежности (годности) или непринадлежности (брака) этой величины заданным пределам (полю допуска).

В результате измерения i -того параметра принимается решение о годности параметра ($s_i = 1$) или брака ($s_i = 0$). При этом в реальных измерениях вследствие влияния погрешностей возникает одна из четырёх совокупностей совместимых и взаимно независимых случайных событий:

– A_1, A_2, \dots, A_N – совокупность событий ложного забракования годного параметра (ошибка 1-го рода с вероятностью $P(A_i) = \alpha_i$);

- B_1, B_2, \dots, B_N – совокупность событий ложного признания годным бракованного параметра (ошибка 2-го рода с вероятностью $P(B_i) = \beta_i$;
- C_1, C_2, \dots, C_N – совокупность событий правильного признания годного параметра годным с вероятностью $P(C_i)$;
- D_1, D_2, \dots, D_N – совокупность событий правильного признания бракованного параметра браком с вероятностью $P(D_i)$.

Перечисленные события для каждого параметра составляют полную группу, для которой выполняется условие:

$$P(A_i, \text{или} B_i, \text{или} C_i, \text{или} D_i) = P(A_i) + P(B_i) + P(C_i) + P(D_i) = 1. \quad (26)$$

Введём событие «не A_i » и обозначим его как \bar{A}_i . Вероятность этого события с учётом (26) равна:

$$P(\bar{A}_i) = P(B_i, \text{или} C_i, \text{или} D_i) = P(B_i) + P(C_i) + P(D_i) = 1 - P(A_i). \quad (27)$$

Появление хотя бы одного (безразлично какого) события A_i исключает возможность совместного наступления всех независимых событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_N$. Поэтому вероятность появления хотя бы одного события A_i с учётом (27) равна:

$$P(A_1, \text{или} A_2, \text{или} \dots, \text{или} A_N) = 1 - P(\bar{A}_1, \text{и} \bar{A}_2, \text{и} \dots, \text{и} \bar{A}_N) = 1 - \prod_{i=1}^N P(\bar{A}_i). \quad (28)$$

Учитывая правую часть (27) и подставляя её в (28), получим выражение для вероятности ошибки 1-го рода при контроле N -параметрического объекта:

$$P(A_1, \text{или} A_2, \text{или} \dots, \text{или} A_N) = 1 - \prod_{i=1}^N [1 - P(A_i)]. \quad (29)$$

Для совокупности событий B_1, B_2, \dots, B_N , каждое из которых означает появление ошибок 2-го рода, получим выражение для вероятности ошибки 2-го рода, аналогичное (29):

$$P(B_1, \text{или} B_2, \text{или} \dots, \text{или} B_N) = 1 - \prod_{i=1}^N [1 - P(B_i)]. \quad (30)$$

Заметим, что формулы (29) и (30) аналогичны формуле (1.15) в [8]. Формулы (29) и (30) позволяют вычислить вероятность наступления по крайней мере одного из совместимых, взаимно независимых событий A_1, A_2, \dots, A_N и событий B_1, B_2, \dots, B_N , которые определены выше, соответственно, как ошибки 1-го и 2-го рода при измерении i -того параметра, по заданным вероятностям этих событий $P(A_i)$ и $P(B_i)$, являющимися вероятностями ошибки 1-го и 2-го рода α_i и β_i .

С учётом ранее принятых обозначений перепишем формулы (29) и (30) в виде:

$$\alpha(N) = P(A_1, \text{или} A_2, \text{или} \dots, \text{или} A_N) = 1 - \prod_{i=1}^N [1 - \alpha_i], \quad (31)$$

$$\beta(N) = P(B_1, \text{или} B_2, \text{или} \dots, \text{или} B_N) = 1 - \prod_{i=1}^N [1 - \beta_i]. \quad (32)$$

4. Некоторые замечания по синтезу точности

Определение точности измерительного контроля по заданной вероятности ошибок 2-го рода (синтез точности) аналитическим методом при нормальном распределении параметра с использованием нелинейных уравнений (19) и (25) не представляется возможным. В этом случае можно использовать графические методы, тем более, что получение графиков, анало-

гичных представленным на рисунках 1 б) и 3б), не представляет трудностей. Пример использования графического метода приведён в работе авторов [3].

Результаты другого примера использования графического метода даны в таблице, в которой представлены значения погрешности измерения от СКО разброса измеряемого параметра $\sigma_{1,i}$ при заданной вероятности ошибки 2-го рода $\beta_i \leq 10^{-6}$. При расчётах использовалась формула (25) для вероятности ошибки 2-го рода при нормальных распределениях измеряемого параметра и погрешности. Данные, представленные в таблице, подтверждают на численном примере общие рассуждения, приведённые в [1], о необходимости высокоточных измерений при несовершенных технологических процессах (при больших вероятностях брака).

Примечание. Полученные по заданной вероятности ошибок 2-го рода погрешности измерений используют при расчёте ошибок 1-го рода. При этом следует заметить, что при высокоточных измерениях ошибки 1-го и 2-го рода практически совпадают (см. рис. 3 и 5).

Кроме графических методов, для некоторых простейших законов распределения значений измеряемых параметров, таких, как, например, равномерный, треугольный и Симпсона, можно получить аналитические зависимости погрешности измерения от вероятности ошибки 2-го рода.

В качестве примера возьмём наиболее важный для практики равномерный закон с распределением параметра в интервале $[-\Delta_{i,1}, \Delta_{i,1}]$, и с равномерным распределением погрешности в интервале $[-\Delta_{i,2}, \Delta_{i,2}]$. Заменяя в формуле (21) нормальное распределение измеряемого параметра на равномерный, получим максимальное значение вероятности ошибки 2-го рода равным:

$$\beta_{i,\max}(\Delta_{i,1}) = 0.5 \frac{\Delta_{i,2}}{2\Delta_{i,1}} \text{ при } \Delta_{i,1} \geq b_i + \Delta_{i,2,\max} . \quad (33)$$

Здесь $\Delta_{i,2,\max}$ – максимальное значение половины интервала погрешности, заданное или полученное экспериментально.

Для вероятности ошибки 1-го рода получаем аналогичное выражение:

$$\alpha_{i,\max}(\Delta_{i,1}) = 0.5 \frac{\Delta_{i,2}}{2\Delta_{i,1}} \text{ при } \Delta_{i,1} \geq b_i . \quad (34)$$

Из формулы (33) искомая половина интервала погрешности измерения определяется простой формулой:

$$\Delta_{i,2} = 4\beta_i \Delta_{i,1} . \quad (35)$$

Для иллюстрации на рис. 5 представлены зависимости (33) и (34), из которых следует их полное совпадение при высокоточных измерениях.

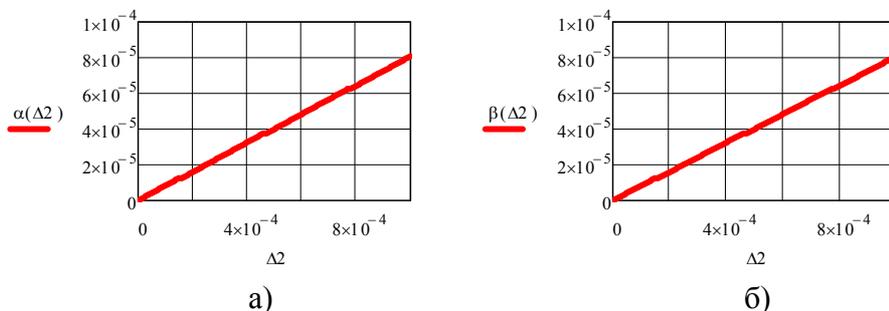


Рис.5. Вероятности ошибок 1-го и 2-го рода при равномерных распределениях измеряемого параметра и погрешности

Задача синтеза высокоточного контроля многомерного объекта решается следующим образом.

При высокоточном контроле, когда совместными вероятностями ошибок в формулах (31) и (32) можно пренебречь, вероятности ошибок 1-го и 2-го рода для N -параметрического объекта контроля определяется обычным суммированием [8]:

$$\alpha(N) = \sum_{i=1}^N \alpha_i, \quad (36)$$

$$\beta(N) = \sum_{i=1}^N \beta_i. \quad (37)$$

Например, если необходимая достоверность всех параметров одинакова и при этом вероятность ошибки 2-го рода контроля многомерного объекта задана и равна $\beta(N)_{\max}$, то необходимая вероятность ошибки при контроле одиночного параметра должна удовлетворять условию:

$$\beta_i \leq \frac{\beta(N)_{\max}}{N}. \quad (38)$$

В других случаях, когда, например, вероятности ошибок при контроле одиночных параметров не равны, всегда должно выполняться условие:

$$\sum_{i=1}^N \beta_i \leq \beta(N)_{\max}. \quad (39)$$

5. Выводы

1. Уточнены и исследованы полученные авторами в [3] средние вероятности ошибок 1-го и 2-го рода применительно к высокоточному измерительному контролю. Следует обратить внимание, что рабочие формулы перекрывают высокоточный диапазон и с достаточной точностью работают при более грубых измерениях.
2. Обосновано применение формул (29) и (30), (31) и (32) для вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода при измерительном контроле многопараметрического объекта.
3. Рассмотрены возможности синтеза точности измерительного контроля с применением графического и аналитического методов.

Литература

1. *Розно М.И.* Откуда берутся неприятности? // Стандарты и качество. 2002. №11. – С. 14 - 20.
2. *Серых В.И., Чернышевская Е.И., Гребцова Л.В.* Метод оценки затрат на повышение точности процесса производства и выходной контроль продукции // Вестник СибГУТИ. 2013. №1. – С. 30-40.
3. *Серых В.И., Гребцова Л.В.* Метод обоснования требований к точности средств измерительного контроля // Вестник СибГУТИ. 2012. №1. – С. 30 -40.
4. МИ 1317-2004. Рекомендация. ГСИ. Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления. Способы использования при испытаниях образцов продукции и контроле их параметров.
5. *Кудрицкий В.Д., Синица М.А., Чинаев В.И.* Автоматизация контроля РЭА. М.: Сов. радио, 1977. -270 с.
6. *Серых В.И., Пальчун Ю.А., Квиткова И.Г.* Достоверность измерительного контроля с учётом требований к показателям точности измерений. // Измерительная техника. – 2011. - № 6. – С. 12 – 15
7. *Сергеев А.Г., Латышев М.В., Терегеря В.В.* Метрология, стандартизация и сертификация: Учеб. пособие.- М.; Логос, 2004.- 560 с.

8. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. - М.: Сов. Радио. 1965. Книга 1. 752 с.
9. Синельников А.В. Определение статистических параметров технологических процессов изготовления радиоэлектронных средств. // Актуальные проблемы электронного приборостроения: Тр. Международной науч.- техн. Конф. – Новосибирск, 2010. – Т. 4. – С. 207 – 210.
10. ГОСТ Р 50779.0-95 Статистические методы. Основные положения.
11. ГОСТ Р 50779.30-95 Статистические методы. Приёмочный контроль качества.
12. ГОСТ Р 50779.50-95 Статистические методы. Приёмочный контроль качества по количественному признаку.

*Статья поступила в редакцию 14.10.2013;
переработанный вариант — 05.11.2013*

Серых Владимир Ильич

к.т.н, доцент НГТУ, тел. 226-77-25, e-mail: serikh65@mail.ru

Гребцова Лариса Васильевна

начальник ОМК СибГУТИ, доцент каф. ПДСиМ тел. 269-82-12,
e-mail: smk@sibsutis.ru.

Analysis and synthesis of measuring control accuracy

V.I. Serykh, L.V. Grebtsova

In this article, the analytic formula for the calculation of the average and conditional error probabilities of the first and the second kind of a high accurate measurement control are obtained and researched. The problem of measurement accuracy synthesis is discussed.

Keywords: measurement control accuracy, secondary and conditional probabilities of errors.