УДК 519.8

Оценка реалистичности и *p*-квантильные характеристики решений в условиях частичной неопределённости и риска

А.С. Кузнецов

Даётся расширенное понятие *p*-квантильной оценки, охватывающее дискретные случайные и нечёткие величины. На его основе выполнено обобщение известных критериев выбора в условиях неопределённости и риска, позволяющее учитывать вероятности состояний природы и оценки реалистичности показателей, связанных с рассматриваемыми решениями. Приводятся математические модели, алгоритмы и информационные технологии, основанные на предложенных критериях.

Ключевые слова: частичная неопределённость, риск, решение, оценка реалистичности, квантиль, критерий, задача динамического программирования, алгоритм выбора.

1. Введение

Неотъемлемый элемент процесса планирования – оценка реалистичности (выполнимости) рассматриваемых планов как вариантов организации намечаемого действия. Обычно для этого используются субъективные или средневзвешенные экспертные оценки или метод статистических испытаний, заключающийся в многократной машинной реализации исследуемого процесса (решения) с учетом случайных факторов, поведение которых генерируется с помощью датчиков псевдослучайных чисел. Получаемый ряд значений зависимого показателя, характеризующего решение, обрабатывается с помощью методов математической статистики. В каких-то ситуациях оценку реалистичности решений удаётся установить аналитически. В любом случае необходимы формулы, отражающие принципы, отдельные этапы и операции исследования.

В данной работе приводятся некоторые обобщения известных критериев оценки и выбора решений в условиях неопределённости и риска. В качестве базовых используются критерии Вальда и Сэвиджа [1 – 5], дающие так называемые гарантированные нижнюю и верхнюю оценки показателей эффективности решений. Обобщением этих критериев являются *p*-квантильные оценки, где *p* – заданный (требуемый) уровень надёжности или реалистичности показателей, по которым оцениваются решения. Ниже приводятся необходимые определения.

2. Необходимые понятия

Ситуация – отражение действительности, возможности, необходимости – адекватное представление о динамике, состоянии объекта и факторах, определяющих его развитие, т.е. актуальные знания о процессе и решениях, допустимых в данных условиях. Обычно, это условия, в которых принимается решение, или постановка задачи. В любой реальной ситуации присутствуют природные (случайные, неопределённые или частично неопределённые) факторы, влияющие на исследуемый процесс. Решение можно считать эффективным, если с оценкой вероятности, близкой к единице, оно обеспечивает нормальное функционирование или развитие объекта, соответствующее намеченному уровню эффективности. Понятно, что говорить об эффективности объекта в будущем можно лишь с учётом оценки устойчивости решений или оценки реалистичности ожидаемых показателей функционирования объекта при том или ином решении или наборе решений (также используется понятие надёжности в смысле оценки реалистичности отображения, способности).

Любое обычное множество A является подмножеством некоторого базового множества X, т.е. $A \subseteq X$ (X – множество элементов, объединённых каким-то общим базовым свойством или понятием). Введём характеристическую функцию $w_A(x), x \in X$, принимающую значения: 1, если $x \in A$, и 0 – в противном случае. Тогда A можно определить следующим образом $A = \{x \in X \mid w_A(x) = 1\}$. Но не всегда достоверно или с уверенностью можно утверждать, что $x \in A$. В этом случае полагают $w_A(x) = \alpha$, где $\alpha \in (0,1)$. Если среди элементов A имеется хотя бы один элемент x, такой, что $0 < w_A(x) < 1$, то множество A называется нечётким или размытым. Функция $w_A(x)$ может означать степень проявления необходимого свойства у элемента $x \in A$, степень соответствия понятию, критерию, требованию или степень достоверности, уверенности и т.п. [6]. Переменная (величина) считается нечёткой, если её область значений представляется в виде нечёткого множества.

Для размытых данных существует своя нечёткая математика (нечёткая логика). В то же время, нечёткий параметр можно представить в виде случайной величины, если от характеристической функции $w_A(x)$ перейти к плотности распределения $f(x) = w_A(x) / \int\limits_{y \in A} w_A(y)dy$ или к вероятностям $p_i = w_A(x_i) / \sum\limits_{y \in A} w_A(y)$ дискретных значений $x_i \in A$. Учитывая эту связь между нечёткими и случайными величинами, ситуацию называют частично неопределённой, если все случайные факторы (данные) с достаточной точностью представлены как нечёткие или вероятностно определённые с установленным законом распределения. Отмеченная связь между различными по типу величинами позволяет использовать вероятностную терминологию и в случае размытых данных (при условии, что $\int\limits_{x \in A} w_A(x)dx = 1$ или $\sum\limits_{x \in A} w_A(x) = 1$).

Пусть y – непрерывная случайная величина. Квантиль уровня p – это такое значение b случайной величины y, при котором $P(y \le b) = F(b) = p$, где $F(y)$ – функция распределения y [7]. Часто бывает важна нижняя вероятностная оценка какого-то параметра или показателя, например, нижняя граница будущей прибыли, оценка реалистичности которой равна p. Поэтому далее, в зависимости от содержательного наполнения исследуемой величины, квантиль уровня p – это либо значение a, такое, что $P(y \ge a) = p$, либо b, при котором $P(y \le b) = p$.

Пусть y – дискретная случайная величина, принимающая значения из множества $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$, $y_1 < y_2 < ... < y_n$, $p_j = P(y_j)$, $j \in J = \{1, ..., n\}$. Квантиль уровня p дискретной случайной величины y – такое значение $y = y_k$ из Y, что

$$\sum_{j=1}^{k} p_j \ge p \text{ и } F(y_{k-1}) < p, \tag{1}$$

если важна верхняя оценка (например, затрат или риска), или значение $y = y_l$, такое, что

$$\sum_{j=l}^{n} p_j \ge p \quad \text{и} \quad \sum_{j=l+1}^{n} p_j < p, \tag{2}$$

если существенны сведения о нижней границе (например, дохода). Таким образом, p-квантильная оценка случайной величины – это точная нижняя или верхняя граница её подобласти значений, вероятность попадания в которую не меньше p. Отметим, что условия (1) эквивалентны $\sum_{j=k+1}^{n} p_j \le q = 1 - p$ и $\sum_{j=k}^{n} p_j > q$. Аналогичное преобразование может быть выполнено и для (2).

Среда (природа) – совокупность случайных факторов, влияющих на реализацию решения. Состояние природы (Ω) – реализация (отображение) этих факторов – точка или траектория в пространстве параметров природы. Далее – это прогнозные оценки или характеристики среды, соответствующие определённому уровню реалистичности. Полное множество состояний природы – ряд состояний Ω_j, $j \in J$, каждое из которых характеризуется реалистичностью (вероятностью) p_j, при этом $\sum_{j \in J} p_j = 1$.

Риск – опасность, связанная со случайными факторами, т.е. с некоторой неопределённостью ситуации. В нашем случае это оценка опасности или возможности и стоимости ошибки при выборе и реализации решения в условиях частичной неопределённости. Это комплексная характеристика, включающая в себя, по крайней мере, две компоненты: вероятность неблагоприятного развития ситуации (исхода операции) и оценку связанных с этим событием потерь или дополнительных расходов. Здесь операция – специальное действие или решение, его реализация (отображение, осуществление).

Обозначим буквой d разность между валовым доходом (выручкой) и затратами, связанными с реализацией решения (денежный поток или сальдо за рассматриваемый период времени). Пусть $d_1, d_2, ..., d_n$ – множество возможных исходов операции, p_j – вероятность (оценка вероятности) получения значения d_j, $j \in J$, $p = \sum_{j / d_j \ge 0} p_j$, $q = 1 - p$. Если в качестве меры риска используется средневзвешенная величина возможного ущерба $\overline{R}$, то формула, определяющая эту меру, легко получается из следующего выражения $\overline{d} = \sum_{j \in J} d_j p_j = p \sum_{j / d_j > 0} d_j \frac{p_j}{p} + q \sum_{j / d_j < 0} d_j \frac{q_j}{q} = p\overline{D} + q\overline{R}$, где $\overline{D}$ – ожидаемая прибыль (условное матожидание, в предположении, что исход операции будет положительным).

3. Традиционные критерии оценки и выбора

Для оценки и выбора решений в условиях неопределённости и риска используются различные показатели [1 – 9], включая критерии Лапласа (среднее арифметическое), Вальда, Сэвиджа, Гурвица и ожидаемого значения (матожидание). Рассмотрим некоторые из этих критериев. Предположим, что планируется работа объекта, эффективность которой зависит от принимаемого решения (способа организации работы) и совокупности природных факторов. Пусть имеется m альтернативных решений (альтернатив) $x_1, x_2, ..., x_m$ $(X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}, I = \{1, 2, ..., m\})$ и определено полное множество возможных состояний природы $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$ $(J = \{1, 2, ..., n\})$, которые сначала будем считать равновероятными, так что $p_j = 1/n$, $j \in J$. Для каждого решения $x_i, i \in I$, определён ожидаемый результат его реализации в зависимости от состояния природы, например, доход a_{ij} (вообще, любой максимизируемый показатель – выручка, сальдо, доходность, рентабельность и т.д.) или риск (затраты, упущенная выгода и т.п.) r_{ij}, $i \in I$, $j \in J$.

Критерий Вальда:

$$\max_{i \in I} \min_{j \in J} a_{ij} = \underline{a}. \tag{3}$$

$\underline{a}$ – гарантированная нижняя оценка a. Если выбирается решение i^*, соответствующее данному критерию, то в худшем случае доход будет равен $\underline{a}$, при любом ином состоянии природы доход будет не ниже данной величины. Для любого другого решения $i \in I$, не эквивалентного i^*, данный показатель хуже.

Критерий Сэвиджа:

$$\min_{i \in I} \max_{j \in J} r_{ij}, \tag{4}$$

где

$$r_{ij} = \begin{cases} \max\limits_{k \in I} a_{kj} - a_{ij}, & \text{или} \\ c_{ij} - \min\limits_{k \in I} c_{kj}, & \end{cases}$$

a – показатель, который максимизируется, а c – минимизируется; r_{ij} – упущенная выгода в случае выбора и реализации i-го решения при j-м состоянии природы (независимо от того, по какой из двух представленных формул рассчитывается эта характеристика). По данному критерию выбирается решение i^*, для которого упущенная выгода, соответствующая худшему случаю, минимальна.

Возможно, критерий (4) станет более понятным, если идти к нему по следующему пути. Пусть d – показатель, который стремятся максимизировать или минимизировать (например, доход или расходы), d_{ij} – характеристика i-го решения при j-м состоянии природы. Введём фиктивное идеальное решение x_{m+1} с показателями

$$d_{m+1,j} = \begin{cases} \max\limits_{i \in I} d_{ij}, & \text{если } d \text{ максимизируется,} \\ \min\limits_{i \in I} d_{ij}, & \text{если } d \text{ минимизируется.} \end{cases}$$

Расстояние по d между решениями $x_i, x_k, i \neq k$ (меру качественного различия решений) определим следующим образом $\rho_d(x_i, x_k) = \max\limits_{j \in J} | d_{ij} - d_{kj} |$. Обозначим $r_i = \rho_d(x_i, x_{m+1})$. Для выбора наиболее эффективного по d решения естественно использовать выражение $\min\limits_{i \in I} r_i$. Представив r_i в развёрнутом виде, получим рассматриваемый критерий.

Если r – величина риска, то $r_{ij} = (c_{ij} - b_{ij})_+$, где b_{ij}, c_{ij} – соответственно выручка и расходы, связанные с i-м решением при j-м состоянии природы, $(d)_+ = \max(0, d)$. Заметим, что $\max\limits_{i \in I} \min\limits_{j \in J} a_{ij} = \max\limits_{i \in I}(-\max\limits_{j \in J}(-a_{ij})) = -\min\limits_{i \in I} \max\limits_{j \in J}(-a_{ij})$, поэтому если показатель a – сальдо за рассматриваемый период времени ($a_{ij} = b_{ij} - c_{ij}$) и некоторые a_{ij} имеют отрицательные значения, то критерий (3) «работает» так же, как (4). В этом смысле выражения (3) и (4) эквивалентны.

Критерий Гурвица:

$$\alpha \overline{a}_i + (1 - \alpha) \underline{a}_i \to \max_{i \in I},$$

где $\overline{a}_i$ – верхняя (оптимистическая), а $\underline{a}_i$ – нижняя (пессимистическая) оценка a_i на множестве состояний природы J, $\alpha \in [0, 1]$ – величина, определяющая значимость оценок.

Если вместо $\overline{a}_i$ и $\underline{a}_i$ используется ожидаемая прибыль $\overline{D}_i$ и средневзвешенная величина риска $\overline{R}_i$, то с учётом различной достоверности оценок последний критерий преобразуется к виду

$$\alpha p_i \overline{D}_i + (1-\alpha) q_i \overline{R}_i \to \max_{i \in I} .$$

4. Обобщённые критерии

Упорядочим элементы каждой строки матрицы (a_{ij}) по невозрастанию, а элементы строк матрицы (r_{ij}) по неубыванию. Пусть $\sigma_i^a = (j_{i1}^a, j_{i2}^a, ..., j_{in}^a)$, $\sigma_i^r = (j_{i1}^r, j_{i2}^r, ..., j_{in}^r)$ – соответствующие перестановки, так что $a_{ij_{ik}^a} \geq a_{ij_{ik+1}^a}$ и $r_{ij_{ik}^r} \leq r_{ij_{ik+1}^r}$, $i \in I, k = 1,...,n-1$. Критерии Вальда и Сэвиджа перепишем следующим образом: $\max\limits_{i \in I} a_{ij_{in}^a}$ и $\min\limits_{i \in I} r_{ij_{in}^r}$. В обоих случаях оптимальное решение определяется на основе элементов последнего столбца упорядоченной матрицы. Предположим, что фактические значения $a_{ij}^{fact} \geq a_{ij}$, а $r_{ij}^{fact} \leq r_{ij}$, $i \in I$, $j \in J$. Тогда реалистичность оценок, получаемых с помощью этих критериев, равна 1, т.к. учитываются все возможные состояния природы. Это так называемые гарантированные оценки. Если выбор альтернативы осуществляется не по последнему, а по предпоследнему столбцу упорядоченной матрицы, то достоверность оценки равна $(n-1)/n$ (т.к. не учитывается одно, наихудшее для рассматриваемого решения состояние природы). Вообще, *k*-й столбец указанной матрицы составляют оценки, надёжность которых равна k/n. Поэтому, если p – требуемый уровень реалистичности решения, то номер столбца k, по которому осуществляется выбор, определяется из условия $k/n \geq p$, соответственно k – ближайшее целое, не меньшее *np*. Рассматриваемые критерии приобретают вид [10]

$$\max_{i \in I} a_{ij_{ik}^a} \quad \text{и} \quad \min_{i \in I} r_{ij_{ik}^r} .$$

В качестве показателей эффективности альтернатив можно также использовать усреднённые характеристики

$$\frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k} a_{ij_{is}^a} \quad \text{и} \quad \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k} r_{ij_{is}^r} , \tag{6), (7}$$

достоверность которых оценивается величиной k/n.

Предположим теперь, что состояния природы не равновероятны, p_j – вероятность состояния Ω_j и p – требуемый уровень реалистичности показателя эффективности решения $x \in X$. Пусть $\widetilde{J}$ – некоторое подмножество множества состояний природы J, такое, что

$$\sum_{j \in \widetilde{J}} p_j \geq p .$$

Введем булевы переменные y_j, принимающие значения $y_j = 1$, если $j \in \widetilde{J}$, и $y_j = 0$ – в противном случае. Тогда последнее неравенство можно представить в эквивалентном виде

$$\sum_{j \in J} p_j y_j \geq p . \tag{8}$$

Обозначим буквой D множество *n*-мерных булевых векторов $y = (y_j)$, $j \in J$, для которых выполняется условие (8). Подобное соотношение должно выполняться для каждого $i \in I$, поэтому необходимо перейти от $\widetilde{J}$ к подмножествам $\widetilde{J}_i$, $i \in I$, и от вектора y к векторам $y^{(i)} = (y_{ij})$, $i \in I$, удовлетворяющим ограничениям $\sum_{j \in J} p_j y_{ij} \ge p$. Тогда критерии (3), (4) преобразуются к виду

$$\max_{i \in I} \max_{y^{(i)} \in D} \min_{j / y_{ij} = 1} a_{ij}, \tag{9}$$

$$\min_{i \in I} \min_{y^{(i)} \in D} \max_{j / y_{ij} = 1} r_{ij}, \tag{10}$$

Принцип реализации этих двух критериев единый, рассмотрим его на примере выражения (9). Для каждого $i \in I$ имеем задачу (номер альтернативы опускаем)

$$f(y) = \min_{j / y_j = 1} a_j \to \max_{y \in D}. \tag{11}$$

Пусть $(j_1, j_2, ..., j_n)$ – перестановка, упорядочивающая a_j, $j \in J$, по невозрастанию, номер k такой, что $\sum_{s=1}^{k} p_{j_s} \ge p$, а $\sum_{s=1}^{k-1} p_{j_s} < p$. Тогда $f^* = f(y^*) = a_{j_k}$ – оптимальное значение целевой функции, $y_j^* = 1$, если $j \in \{j_1, j_2, ..., j_k\}$, и $y_j^* = 0$ – в противном случае (звёздочкой помечаем оптимальные значения). Для доказательства данного утверждения представим процедуру вычисления оптимума в виде алгоритма, основанного на идее покоординатного спуска. В качестве начального приближения возьмём вектор $y = (1, 1, ..., 1)$ (учитываются все возможные состояния природы, при этом ограничение (8) очевидно выполняется). Изменение значения некоторой переменной $y_j = 1$ означает исключение из рассмотрения состояния Ω_j. Последовательно исключаем наихудшие для данной альтернативы состояния природы до тех пор, пока сумма их вероятностей не больше $1 - p$. Следующее замечание обосновывает оптимальность полученного решения y. Нет смысла исключать нехудшее состояние, т.к. это не меняет значения целевой функции.

Приведём пример, иллюстрирующий применение изложенного алгоритма и критерия (9). Пусть a – ожидаемый результат операции в денежном выражении (сальдо в конце периода планирования, как функция от x и состояния природы). Исходные данные представим в виде матрицы

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 & 0 & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 7 & -2 & -1 & 8 & 5 \\ -3 & -2 & 4 & 6 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 3 & 3 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

и вектора $$(p_j) = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.15 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.15 \end{pmatrix}.$$

Пусть $p = 0.8$. Для каждой альтернативы (строки i) решаем задачу (8). В результате получаем матрицу $\widetilde{A}$, в которой отдельные элементы помечены символами $\times$ и $*$.

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2^* & -1^\times & 3 & 5 & 0^\times & 6 & 9 \\ 4 & 3 & 7 & -2^\times & -1^* & 8 & 5 \\ -3^\times & -2^\times & 4 & 6 & 3 & 1^* & 7 \\ 0^* & 5 & 3 & 3 & 2 & -1^\times & 6 \end{pmatrix}$$

Символом $\times$ указаны значения, соответствующие исключаемым состояниям, звёздочкой в i-й строке помечена p-квантильная оценка $\underline{a}_i$ показателя эффективности i-го решения (легко проверить, что для каждого i сумма вероятностей исключенных состояний не больше

$1-p=0.2$). На основе этих оценок определяется оптимальное решение x_{i^*}, где $i^* = \arg\max_{i \in I} \underline{a}_i = \arg\max\{2, -1, 1, 0\} = 1$.

Перейдём к критерию (7). Его обобщением для случая неравновероятных состояний природы является выражение

$$\min_{i \in I} \min_{y^{(i)} \in D} \sum_{j \in J} r_{ij} p_j y_{ij} .$$

Для каждого $i \in I$ получаем задачу следующего вида

$$\sum_{j=1}^{n} c_j y_j \to \min_y \tag{12}$$

при ограничении
$$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j \geq P,\ y_j \in \{0,1\},\ j = 1,\dots,n. \tag{13}$$

Это обратная задача о ранце с булевыми переменными [11, 12], которая может быть решена методом динамического программирования [13]. Приведём необходимые для этого рекуррентные соотношения.

Пусть $S_k(p)$ – оптимальное значение целевой функции задачи, отличающейся от (12) – (13) тем, что *n* заменено величиной *k* ($k = 1,\dots,n$), а *P* – параметром *p*, принимающим значения из интервала [0, *P*], тогда

$$S_1(p) = \begin{cases} 0,\ p = 0, \\ c_1,\ 0 < p \leq p_1, \\ \infty,\ p > p_1, \end{cases} \quad S_k(p) = \begin{cases} 0,\ p \leq 0, \\ \min\{S_{k-1}(p), S_{k-1}(p - p_k) + c_k\},\ p \leq \sum_{j=1}^{k} p_j, \\ \infty,\ p > \sum_{j=1}^{k} p_j, \end{cases}$$

где $S_{k-1}(p - p_k) = 0$ при $p \leq p_k$.

Приведём пример, иллюстрирующий применение этих рекуррентных соотношений. Входные данные: $c = (0 \quad 1.5 \quad 5 \quad 6 \quad 7.5 \quad 12 \quad 13)$,

$$(p_j) = (0.1 \quad 0.05 \quad 0.1 \quad 0.2 \quad 0.15 \quad 0.3 \quad 0.1),\ P = 0.8.$$

Вычислительный процесс отобразим с помощью таблицы (в ячейках за значением функции $S_k(p)$ через черту указано оптимальное значение переменной $y_k(p)$).

p	$S_1(p)/y_1^*(p)$	$S_2(p)/y_2^*(p)$	$S_3(p)/y_3^*(p)$	$S_4(p)/y_4^*(p)$	$S_5(p)/y_5^*(p)$	$S_6(p)/y_6^*(p)$	S_7^*/y_7^*
0 … 0.1	0/1 … $0^*/1$	0/0 … 0/0	0/0 … 0/0	0/0 … 0/0	0/0 … 0/0	0/0 … 0/0	
0.11 … 0.15	∞ …	1.5/1 … $1.5^*/1$	1.5/0 … $1.5^*/0$	1.5/0 … 1.5/0	1.5/0 … 1.5/0	1.5/0 … 1.5/0	
0.16 … 0.2		∞ …	5/1 … 5/1	5/0 … 5/0	5/0 … 5/0	5/0 … 5/0	
0.21 … 0.25			6.5/1 … 6.5/1	6/1 … 6/1	6/0 … 6/0	6/0 … 6/0	
0.26 … 0.3			∞ …	6/1 … 6/1	6/0 … 6/0	6/0 … 6/0	
0.31 … 0.35				7.5/1 … $7.5^*/1$	7.5/0 … 7.5/0	7.5/0 … 7.5/0	
0.36 … 0.4				11/1 … 11/1	11/0 … 11/0	11/0 … 11/0	
0.41 … 0.45				12.5/1 … 12.5/1	12.5/0 … 12.5/0	12.5/0 … 12.5/0	
0.46 … 0.5				∞ …	15/1 … $15^*/1$	15/0 … 15/0	
0.51 … 0.55					18.5/1 … 18.5/1	18/1 … 18/1	
0.56 … 0.6					20/1 … 20/1	18/1 … 18/1	
0.61 … 0.65					∞ …	19.5/1 … 19.5/1	
0.66 … 0.7						23/1 … 23/1	
0.71 … 0.75						24.5/1 … 24.5/1	
0.76 … 0.8						27/1 … $27^*/1$	$27^*/0$

Элементы таблицы (значения), помеченные звездочкой, отображают обратный ход метода динамического программирования и решение задачи $y^* = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0)$.

Займёмся средневзвешенной оценкой дохода $\overline{a}(p)$ на подмножестве неравновероятных состояний природы, удовлетворяющих условию (13). Указанное условие ограничивает переменные y_j снизу, поэтому максимизация $\sum_{j\in J} p_j a_j y_j$ при $y \in D$ и любых неотрицательных значениях $a_j,\ j \in J$, даёт решение $y = (1, 1, \ldots, 1)$. Чтобы исправить это положение, воспользуемся вспомогательным критерием $\Phi(y) = \sum_{j\in J}(A - a_j)p_j y_j \to \min_{y\in D}$, где $A = \max_{j\in J} a_j$. Это уже знакомая задача динамического программирования, которая решается с помощью приведённых рекуррентных соотношений. Пусть y^* – оптимальное решение, тогда $\overline{a}(p) = A\sum_{j\in J} p_j y_j^* - \Phi(y^*)$.

На практике любое серьёзное решение оценивается по множеству показателей. Мы рассмотрели критерии, позволяющие получать оценки с требуемым уровнем надёжности (реалистичности). В каких-то случаях реалистичность плана может быть отдельным показателем, который включается в множество критериев оценки альтернатив. Но если установлены различные оценки достоверности характеристик решения по разным показателям, то эти оценки можно использовать при исчислении обобщающих критериев качества решений.

Предположим, что обобщающий показатель – линейная свёртка $\sum_{j=1}^{n} w_j \tilde{f}_j(x) \to \max_{x\in X}$, где w_j – вес j-го критерия, $\tilde{f}_j(x)$ – значимость x по f_j, причём $\sum_x \tilde{f}_j(x) = 1$, $j = 1,\ldots,n$, т.е. $\tilde{f}_j = (\tilde{f}_j(x)), x \in X,$ – нормированные векторы [14]. Пусть f – один из показателей $f_1,\ldots,f_n$, по которым оцениваются альтернативы, $f(x)$ – установленная количественная характеристика или оценка значимости x по данному показателю, $p(f(x))$ – оценка реалистичности $f(x)$ (значимость $f(x)$ в смысле достоверности), тогда нормированию подлежат величины $f(x)p(f(x)), x \in X$.

5. Заключение

Сочетание идей из различных областей знаний оказывается весьма полезным. Обобщение классических критериев оценки решений для условий частичной неопределённости и риска расширяет возможности и области применения вероятностных и оптимизационных моделей и методов. Предложенные информационные технологии представляют собой инструментарий, способствующий принятию эффективных решений.

Литература

1. *Savage L.J.* The theory of statistical decision // J. Amer. Statist. Assoc., 1951, vol. 46, № 1, pp. 55-67.
2. *Hurwicz L.* Optimality Criteria for Decision Making under Ignorance // Colwes commission papers, 1951, № 370.
3. *Лабскер Л.Г.* Теория критериев оптимальности и экономические решения. – М.: КноРус, 2008. – 742 с.

4. *Вентцель Е.С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология / 4-е издание. – М.: Дрофа, 2006. – 206 с.
5. *Таха Х.А.* Введение в исследование операций. – М.: Вильямс, 2007 . – 912 с.
6. *Зак Ю.А.* Принятие решений в условиях нечётких и размытых данных. Fuzzy-технологии. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. – 352 с.
7. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. – М.: Наука, 1985. – 640 с.
8. *Юдин Д.Б.* Задачи и методы стохастического программирования. – М.: Сов. радио, 1979. – 392 с.
9. *Абчук В.А.* Математика для менеджеров и экономистов. – СПб.: Изд-во Михайлова В.А., 2002. – 525 с.
10. *Кузнецов А.С.* Моделирование и анализ производственных ситуаций. – Новосибирск: Наука, 1996. – 132 с.
11. *Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т.* Экстремальные задачи стандартизации. – Новосибирск: Наука, 1978. – 335 с.
12. *Сигал И.Х., Иванова А.П.* Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 304 с.
13. *Беллман Р., Дрейфус С.* Прикладные задачи динамического программирования. – М.: Наука, 1965. – 458 с.
14. *Кузнецов А.С.* Гибкая технология оценки альтернатив в случае сложных критериев // Вестник СибГУТИ, 2012, № 1. – С. 15-24.

Статья поступила в редакцию 30.10.2013

Кузнецов Александр Сергеевич

д.т.н., профессор кафедры ТСиВС СибГУТИ, тел.: (383) 272-26-20,
e-mail: AS_Kuznetsov@ngs.ru

Realistic estimation and p-quantile characteristics of decisions under partial uncertainty and risk circumstances

A. Kuznetsov

In this article, an extended notion of p-quantile estimation covering discrete random and fuzzy quantities is presented. On its basis, generalization of known criteria of choice under uncertainty and risk, taking into account probabilities of environment and realistic estimation indicators, is made. Mathematical models, algorithms and information technologies based on the proposed criteria are presented.

Keywords: partial uncertainty, risk, solution, realistic estimation, quantile, criterion, dynamic programming problem, selecting algorithm.