

Методы повышения точности восстановления неравномерно дискретизированных сигналов при неизвестных значениях координат узлов временной сетки

С. В. Поршнева, Д. В. Кусайкин

В статье представлены результаты исследования методов восстановления дискретного сигнала, заданного на неравномерной временной сетке $t_i = iT + \tau_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$, где T – период дискретизации; τ_i – случайное число (джиттер), $\tau_i \in (-T/2, T/2)$, точные значения которого неизвестны. Получены оценки точности методов восстановления различных типов дискретных сигналов, в том числе линейного тренда, полиномиального тренда и периодического сигнала, для равномерного и нормального закона распределения джиттера.

Ключевые слова: неравномерная дискретизация, восстановление, интерполяция.

1. Введение

Разработка методов восстановления дискретного сигнала, значения которого заданы в узлах неравномерной временной сетки (uniform sampling, irregular sampling), была начата в середине прошлого века [1, 2]. Рассматриваемая задача оказывается актуальной в многоканальных системах передачи вследствие неточности датирования передаваемых дискретных сигналов; в АЦП и ЦАП – вследствие вариаций длительности синхронизирующих или тактовых импульсов; в биомедицине, например, – при анализе данных variability сердечного ритма [3]. Описание некоторых методов восстановления ограниченных по спектру дискретных сигналов с неравномерной частотой дискретизации можно найти, например, в [4 – 8]. Здесь уместно отметить, что в большинстве работ, посвящённых методам решения рассматриваемой задачи, неявно предполагается, что координаты узлов неравномерной временной сетки известны точно. В данном предположении задача по своей постановке, вообще говоря, оказывается аналогичной классической задаче интерполяции, методы решения которой известны [9].

Значительно более сложной задачей оказывается задача восстановления дискретного сигнала в случае, когда местоположения неравномерных дискретных отсчётов на временной оси точно неизвестны. Здесь априори можно ожидать, что ранее разработанные методы восстановления сигналов, дискретизированных на неравномерной временной сетке, окажутся неработоспособными. Отметим, что решение рассматриваемой задачи в данной постановке началось относительно недавно и количество соответствующих публикаций относительно невелико [10–11].

В статье обсуждаются результаты сравнительного анализа методов восстановления ограниченного по спектру дискретного сигнала, заданного на неравномерной сетке с джиттером

$$t_i = iT + \tau_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

где T – период дискретизации; τ_i – случайная величина, $\tau_i \in (-T/2, T/2)$, точные значения которой неизвестны.

1.2. Постановка задачи

Имеется последовательность значений сигнала $x(t_i) = x_i$ заданного в узлах неравномерной сетки (1). Требуется восстановить сигнал $x(t)$ в узлах равномерной временной сетки

$$\eta_m = mT_1, \quad m = 1, 2, 3, \dots, M, \quad (2)$$

где $t_1 \leq \eta_1$.

Отметим, что в данной постановке задача восстановления значений сигнала оказывается принципиально отличной от задачи восстановления сигнала в промежуточных точках по заданной таблице значений $t_i, x(t_i), i = \overline{1, r}$, которая вне зависимости от равномерности или неравномерности временной сетки, как очевидно, относится к задаче интерполяции.

Подходы к решению данной задачи определяются, как очевидно, тем, какая информация о параметрах джиттера известна. Здесь возможны следующие варианты:

1. известен закон распределения случайной величины (ЗРСВ) τ_i , т.е. имеется априорная информация о ЗРСВ τ_i и границах её области рассеяния $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$;

2. неизвестен ЗРСВ τ_i , но известны границы её области рассеяния.

Второй случай является наиболее сложным с математической точки зрения. Здесь, с нашей точки зрения, представляется перспективным использовать для восстановления дискретного сигнала методы интервального анализа [12]. Однако их обсуждение является предметом последующих публикаций, но не данной статьи.

В случае, когда известен закон распределения случайных чисел τ_i , один из возможных подходов к решению задачи восстановления сигнала по его дискретным значениям, заданным в узлах временной сетки (1), достаточно очевиден: использовать вместо временной сетки (1) временную сетку

$$\xi_i = iT + \delta_i, \quad (3)$$

где δ_i – случайные числа, значения которых выбираются из тех или иных соображений, и далее использовать известные методы решения задачи аппроксимации [13].

Продемонстрируем проблемы восстановления выбранного типа сигнала, например линейного тренда, описываемого функцией

$$x(t) = 0.1t, \quad (4)$$

значения которого были вычислены в узлах дискретной временной сетки $t_i = i + \tau_i, i = \overline{1, 10}$. Джиттер τ_i моделировался выборкой случайных чисел, принадлежащих интервалу $[-0.5, 0.5]$, сгенерированных сначала в соответствии с равномерным, а затем с нормальным законом распределения, объём выборки – 10. Значения дискретного сигнала $x(t_i)$ вычислялись в узлах временной сетки $t_i = i + \tau_i$. Далее по таблицам значений (i, x_i) выполнялась линейная интерполяция сигнала, результаты которой представлены на рис. 1.

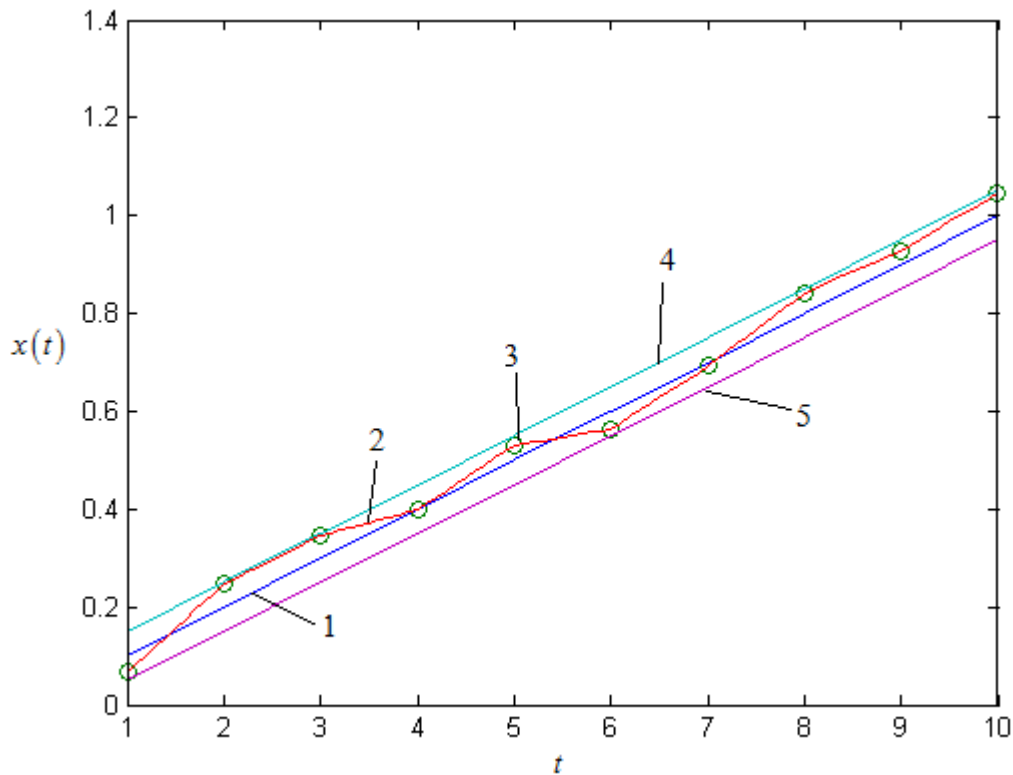


Рис. 1. Результаты восстановления линейного тренда: 1 – исходный сигнал; 2 – сигнал, восстановленный линейной интерполяцией по таблице (i, x_i) ; 3 – узлы интерполяции; 4 – верхняя граница функции $x_+ = x([t_i + 0.5])$; 5 – нижняя граница функции $x_- = x([t_i - 0.5])$

Из рис. 1 видно, что следствием незнания точных значений координат узлов временной сетки и отнесения значения дискретного сигнала к середине соответствующего временного интервала является отличие формы восстановленного сигнала от исходного сигнала.

2. Алгоритмы восстановления дискретного сигнала, значения которого заданы в узлах неравномерной временной сетки

В настоящем исследовании мы использовали следующие алгоритмы восстановления дискретных сигналов, значения которых известны в узлах неравномерной временной сетки.

Алгоритм восстановления № 1

1. Задание числа испытаний N_{Trial} (числа шагов метода Монте-Карло).
2. Инициализация счётчик числа шагов метода Монте-Карло: $j = 1$.
3. Задание числа узлов неравномерной временной сетки r .
4. Задание равномерной временной сетки (2).
5. Генерация в соответствии с заданным законом распределения случайной величины $\delta_i, i = \overline{1, r}$.
6. Восстановление на основе табличных значений $[iT, x(\xi_i)]$ с помощью линейной интерполяции значений дискретного сигнала $u_{j,m}$ в узлах временной сетки (2).
7. Увеличение значения счётчика цикла: $j = j + 1$.
8. Если $j \leq N_{Trial}$, повторение пп. 5–7.
9. Усреднение восстановленных значений сигнала по ансамблю реализаций:

$$\tilde{u}_m = \frac{1}{N_{Trial}} \sum_{j=1}^{N_{Trial}} u_{j,m}.$$

Алгоритм восстановления № 2

1. Восстановление на основе табличных значений сигнала $\left[\left(i - \frac{1}{2} \right) T, x_i \right]$ с помощью линейной интерполяции значений дискретного сигнала $u_m^{(1)}$ в узлах временной сетки (2).
2. Восстановление значений дискретного сигнала $u_m^{(2)}$ в узлах временной сетки (2) на основе табличных значений $\left[\left(i + \frac{1}{2} \right) T, x_i \right]$.
3. Вычисление восстановленного значения сигнала в узлах временной сетки (2):

$$u_m = 0.5 \left(u_m^{(1)} + u_m^{(2)} \right).$$

Алгоритм восстановления № 3

1. Задание числа узлов r неравномерной временной сетки, равного количеству узлов восстанавливаемого сигнала x_i .
2. Задание равномерной временной сетки (2).
3. Восстановление с помощью линейной интерполяции значений дискретного сигнала в узлах временных сеток $\left(i - \frac{1}{2} \right) T$ и $\left(i + \frac{1}{2} \right) T$ на основе табличных значений сигнала $[iT, x_i]$, соответственно, $u_i^{(1)}$ и $u_i^{(2)}$, $i = \overline{1, r}$.
4. Вычисление разностей $\left| u_i^{(1)} - x_i \right|$, $\left| u_i^{(2)} - x_i \right|$.
5. Сравнение друг с другом значений $\left| u_i^{(1)} - x_i \right|$, $\left| u_i^{(2)} - x_i \right|$: при выполнении условия $\left| u_i^{(1)} - x_i \right| \leq \left| u_i^{(2)} - x_i \right|$ принимаем, что τ_i в (1) имеет отрицательный знак, в противном случае τ_i в (1) имеет положительный знак.
6. Инициализация счётчика случайной последовательности: $j = 1$.
7. Генерация в соответствии с заданным законом распределения случайного числа ζ .
8. Сравнение знаков ζ, τ_j . Если знаки $\text{sign}(\zeta) = \text{sign}(\tau_j)$, то $\delta_j = \zeta, j = j + 1$, иначе повторить п. 7.
9. Если $j < r$, повторить пп. 7, 8.
10. Восстановление дискретного сигнала u_m в узлах временной сетки (2) на основе табличных значений $[iT + \delta_i, x_i]$.

3. Алгоритмы оценки точности восстановления дискретного сигнала

В связи с тем, что величина τ_i является случайной величиной, для повышения достоверности оценок точности восстановления сигналов в соответствии с описанными выше алгоритмами был применён метод Монте-Карло [14]. При этом для реализации метода Монте-Карло были использованы следующие алгоритмы.

Алгоритм оценки точности восстановления дискретного сигнала № 1

1. Задание числа испытаний N_{Trial_1} (числа шагов метода Монте-Карло).
2. Инициализация счётчика числа шагов метода Монте-Карло: $j_1 = 1$.
3. Задание числа узлов неравномерной временной сетки r .

4. Задание равномерной временной сетки (2).
5. Генерация в соответствии с заданным законом распределения случайной величины $\delta_i, i = \overline{1, r}$.
6. Вычисление значений дискретного сигнала в узлах временной сетки (3): $x_i = f(\xi_i)$, $f(t)$ – функция, описывающая восстанавливаемый сигнал.
7. Восстановление в соответствии с алгоритмом восстановления № 1 значений дискретного сигнала $u_{j_1, m}$ в узлах временной сетки (2).
8. Увеличение значения счётчика цикла: $j_1 = j_1 + 1$.
9. Если $j_1 \leq N_{Trial_1}$, повторение пп. 5–7.
10. Усреднение восстановленных значений сигнала по ансамблю реализаций:

$$\tilde{u}_m = \frac{1}{N_{Trial_1}} \sum_{j_1=1}^{N_{Trial_1}} u_{j_1, m}.$$

В качестве восстановленных значений сигнала принимаются средние по ансамблю реализации значения сигнала.

Алгоритм оценки восстановления дискретного сигнала № 2

1. Задание числа испытаний N_{Trial} (числа шагов метода Монте-Карло).
2. Инициализация счётчика числа шагов метода Монте-Карло: $j = 1$.
3. Задание числа узлов неравномерной временной сетки r .
4. Задание равномерной временной сетки (2).
5. Генерация в соответствии с заданным законом распределения случайной величины $\delta_i, i = \overline{1, r}$.
6. Вычисление значений дискретного сигнала в узлах временной сетки (3): $x_i = f(\xi_i)$, $f(t)$ – функция, описывающая восстанавливаемый сигнал.
7. Вычисление в соответствии с алгоритмом восстановления № 2 значений восстановленного сигнала

$$u_{j, m} = 0.5 \left(u_{j, m}^{(1)} + u_{j, m}^{(2)} \right).$$

8. Увеличение значения счётчика цикла: $j = j + 1$.
9. Если $j \leq N_{Trial}$, повторение пп. 5–7.
10. Усреднение восстановленных значений сигнала по ансамблю реализаций:

$$\tilde{u}_m = \frac{1}{N_{Trial}} \sum_{j=1}^{N_{Trial}} u_{j, m}.$$

В качестве восстановленных значений сигнала принимаются средние по ансамблю реализации значения сигнала.

Алгоритм оценки восстановления дискретного сигнала № 3

1. Задание числа испытаний N_{Trial_1} (числа шагов метода Монте-Карло).
2. Инициализация счётчика числа шагов метода Монте-Карло: $j = 1$.
3. Задание числа узлов r неравномерной временной сетки, равного количеству узлов восстанавливаемого сигнала x_i .
4. Задание равномерной временной сетки (2).
5. Генерация в соответствии с заданным законом распределения случайной величины $\delta_i, i = \overline{1, r}$.

6. Вычисление значений дискретного сигнала в узлах временной сетки (3): $x_i = f(\xi_i)$, $f(t)$ – функция, описывающая восстанавливаемый сигнал.
7. Вычисление в соответствии с алгоритмом восстановления № 3 значений восстановленного сигнала $u_{j,m}$.
8. Увеличение значения счётчика цикла: $j = j + 1$.
9. Если $j \leq N_{Trial}$, повторение пп. 7–8.
10. Усреднение восстановленных значений сигнала по ансамблю реализаций:

$$\tilde{u}_m = \frac{1}{N_{Trial}} \sum_{j=1}^{N_{Trial}} u_{j,m}.$$

4. Анализ точности восстановления сигналов, дискретизированных в узлах неравномерной временной сетки

Для оценки точности восстановления исходного сигнала использовалось отношение мощности сигнала к мощности ошибки восстановления (Signal-to-Error Ratio – SER):

$$SER = 10 \times \log \frac{\sum_{i=1}^M x_i^2}{\sum_{i=1}^M (x_i - \hat{x}_i)^2}, \quad (5)$$

где x_i – значения исходного сигнала, вычисленные в узлах равномерной сетки (2); \hat{x}_i – восстановленный сигнал в узлах равномерной сетки (2).

Для линейного и полиномиальных трендов в проведённых вычислительных экспериментах в качестве τ_i использовались случайные числа, генерируемые в соответствии с равномерным законом распределения и областью рассеяния случайной величины $[-0.5, 0.5]$, а также случайные числа, генерируемые в соответствии с нормальным законом распределения с $N\left(0, \frac{1}{3\sqrt{12}}\right)$, число шагов метода Монте-Карло равнялось 1000, $M = 100$.

Для гармонического сигнала в качестве τ_i использовались случайные числа, генерируемые в соответствии с равномерным законом распределения и областью рассеяния случайной величины $[-0.1, 0.1]$, а также случайные числа, генерируемые в соответствии с нормальным законом распределения с $N\left(0, \frac{0.2}{3\sqrt{12}}\right)$, число шагов метода Монте-Карло равнялось 1000, $M = 100$. Число отсчётов исходного сигнала – 50, безразмерная частота сигнала $\hat{f} = 0.1$, число шагов метода Монте-Карло равнялось 1000, $M = 981$.

4.1. Анализ точности восстановления линейного тренда

Рассмотрим результаты исследований, проведённых в соответствии с описанными выше алгоритмами анализа точности восстановления дискретного сигнала, точности восстановления линейного тренда (4), значения которого были заданы в узлах неравномерной временной сетки (табл. 1).

Таблица 1. Среднее значение и дисперсия параметра SER при восстановлении линейного тренда в соответствии с алгоритмами № 1–3

Номер алгоритма восстановления	Среднее значение SER, дБ, равномерный ЗПСВ δ_i .	Дисперсия SER, равномерный ЗПСВ δ_i .	Среднее значение SER, дБ, нормальный ЗПСВ δ_i .	Дисперсия SER, нормальный ЗПСВ δ_i .
№ 1	29.0	1.8	38.3	2.3
№ 2	30.6	2.5	38.6	2.3
№ 3	29.3	2.3	37.8	2.5

Из табл. 1 видно, что вне зависимости от ЗПСВ δ_i средние значения и дисперсии параметра SER для изученных алгоритмов оказываются близкими друг к другу. Так, средние значения SER при равномерном ЗПСВ δ_i отличаются друг от друга не более чем на 1.6 дБ и не более чем на 0.8 дБ при нормальном ЗПСВ δ_i . Точность восстановления линейного тренда в рассматриваемом случае (среднее значение SER) при нормальном ЗПСВ δ_i , оказывается выше аналогичной величины при равномерном ЗПСВ δ_i . Данный результат объясняется тем, что в рассмотренных случаях дисперсия нормального закона распределения σ случайной величины δ_i выбиралась из условия $3\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{12}}$, где Δ – размер области рассеяния случайной величины δ_i с равномерным законом распределения. При этом значение области рассеяния случайной величины δ_i , в котором укладывается 97,4% всех случайных чисел («эффективный» размер джиттера), как известно, равно $2\sigma = \frac{\Delta}{3\sqrt{3}}$. При равномерном законе распределения случайной величины δ_i «эффективный» размер джиттера равен Δ , т.е. в $3\sqrt{3}$ раза больше аналогичной величины при нормальном законе распределения. (Объяснение этих и далее описанных результатов с теоретической точки зрения представлено в Разделе 5.)

4.2. Анализ точности восстановления полиномиального тренда

Рассмотрим результаты восстановления полиномиального тренда

$$x(t) = 3 \cdot t^3 + 2 \cdot t^2 + t + 0.5, \quad (6)$$

значения которого были вычислены в узлах дискретной временной сетки $t_i = i + \tau_i$, $i = \overline{1, 10}$, представленные в табл. 2.

Таблица 2. Среднее значение и дисперсия SER при восстановлении полиномиального тренда в соответствии с алгоритмами № 1–3

Номер алгоритма восстановления	Среднее значение SER, дБ, равномерный ЗПСВ δ_i .	Дисперсия SER, равномерный ЗПСВ δ_i .	Среднее значение SER, дБ, нормальный ЗПСВ δ_i .	Дисперсия SER, нормальный ЗПСВ δ_i .
№ 1	22.6	2.5	31.7	3.0
№ 2	23.9	3.4	32.0	3.0
№ 3	21.9	3.5	29.3	3.0

Из табл. 2 видно, что вне зависимости от ЗПСВ δ_i средние значения и дисперсии параметра SER для изученных алгоритмов оказываются близкими друг к другу. Так, средние значения SER при равномерном ЗПСВ δ_i отличаются друг от друга не более чем на 2 дБ и не более чем на 1.7 дБ при нормальном ЗПСВ δ_i . Точность восстановления полиномиального тренда в рассматриваемом случае (среднее значение SER) при нормальном ЗПСВ δ_i оказывается выше аналогичной величины при равномерном ЗПСВ δ_i . (Объяснение причин, обусловивших данный результат, приведено в разделе 4.2.)

4.3. Восстановление периодического сигнала

Рассмотрим результаты исследования точности восстановления периодического сигнала вида:

$$x(t) = 2 \sin(2\pi 0.5 f_c t) + 1.2 \cos(2\pi f_c t). \quad (7)$$

В проведённых вычислительных экспериментах были использованы значения дискретного сигнала, вычисленные в узлах временной сетки

$$t_i = iT + \tau_i, \quad i = \overline{1, 50}, \quad (8)$$

где T – период дискретизации; τ_i – случайная величина, с $\tau_i \in [-\Delta/2, \Delta/2]$, где $\Delta < T$ – размах джиттера, по формуле, следующей из (7):

$$x(t_i) = 2 \sin\left(\pi \hat{f} \left(i + \frac{\tau_i}{T}\right)\right) + 1.2 \cos\left(2\pi \hat{f} \left(i + \frac{\tau_i}{T}\right)\right), \quad (9)$$

где $\hat{f} = f_c \cdot T$ – безразмерная частота дискретизации; поскольку $\tau_i \in (-\Delta/2, \Delta/2)$, соответственно, вариация безразмерной частоты дискретизации $\Delta f_i \in [-0.5\hat{f}; 0.5\hat{f}]$.

Результаты моделирования приведены в табл. 3.

Таблица 3. Среднее значение и дисперсия SER при восстановлении периодического сигнала в соответствии с алгоритмами № 1–3

Номер алгоритма восстановления	Среднее значение SER, дБ, равномерный ЗПСВ δ_i .	Дисперсия SER, равномерный ЗПСВ δ_i .	Среднее значение SER, дБ, нормальный ЗПСВ δ_i .	Дисперсия SER, нормальный ЗПСВ δ_i .
№ 1	31.2	0.7	31.2	0.9
№ 2	31.2	0.8	33.6	0.4
№ 3	28.6	0.9	32.4	0.4

Из табл. 3 видно, что, как и при восстановлении полиномиального тренда, средние значения и дисперсии параметра SER для изученных алгоритмов оказываются близкими друг к другу вне зависимости от ЗПСВ δ_i . Аналогично средние значения параметра SER при нормальном ЗПСВ δ_i выше, чем при равномерном ЗПСВ δ_i . (Объяснение причин, обусловивших данный результат, приведено в разделе 4.2.)

5. Теоретический анализ результатов вычислительных экспериментов

Рассмотрим алгоритмы восстановления дискретного сигнала, описанные в Разделе 2, и алгоритмы оценки точности восстановления изучаемых дискретных сигналов, описанные в Разделе 3, с теоретической точки зрения.

Алгоритм восстановления сигнала № 1, как очевидно из его описания, основан на вычислении коэффициентов прямой на каждом из отрезков интерполяции сигнала $[iT + \delta_i; (i+1)T + \delta_{i+1}]$, проходящей через точки $(iT + \delta_i, \tilde{x}_i)$, $((i+1)T + \delta_{i+1}, \tilde{x}_{i+1})$, где $\tilde{x}_i = iT + \tau_i$, $\tilde{x}_{i+1} = (i+1)T + \tau_{i+1}$, по следующим формулам:

$$\tilde{a}_i = \frac{\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i}{T + \delta_{i+1} - \delta_i}, \quad (10)$$

$$\tilde{b}_i = \tilde{x}_i - \tilde{a}_i(iT + \delta_i), \quad (11)$$

и, далее, восстановлению значений сигнала в заданных точках на каждом из отрезков $[iT + \delta_i; (i+1)T + \delta_{i+1}]$ по уравнению прямой с коэффициентами, вычисляемыми в соответствии с (10), (11).

Алгоритм оценки погрешности восстановления сигнала № 1, как очевидно из его описания, предполагает использование на каждом из отрезков $[iT + \delta_i; (i+1)T + \delta_{i+1}]$ значений коэффициентов прямой, усреднённых по ансамблю реализаций:

$$\langle \tilde{a}_i \rangle = E \left[\frac{\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i}{T + \delta_{i+1} - \delta_i} \right] = a_i T E \left[\frac{1}{T + \delta_{i+1} - \delta_i} \right] + a_i \frac{E[\tau_{i+1} - \tau_i]}{E[T + \delta_{i+1} - \delta_i]} = a_i, \quad (12)$$

$$\langle \tilde{b}_i \rangle = E \langle \tilde{x}_i \rangle - E \langle \tilde{a}_i(iT + \delta_i) \rangle = x_i - a_i iT - E \langle \tilde{a}_i \delta_i \rangle = x_i - a_i iT, \quad (13)$$

E – оператор математического ожидания.

При выводе (12), (13) мы учли, что τ_i , δ_i являются независимыми случайными величинами.

Алгоритм восстановления сигнала № 2, как очевидно из его описания, основан на вычислении коэффициентов прямой на каждом из отрезков интерполяции сигнала $[iT; (i+1)T]$, проходящей через точки (iT, \tilde{x}_i) , $((i+1)T, \tilde{x}_{i+1})$, где $\tilde{x}_i = iT + \tau_i$, $\tilde{x}_{i+1} = (i+1)T + \tau_{i+1}$, по следующим формулам:

$$\tilde{a}_i = \frac{\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i}{T_i}, \quad (14)$$

$$\tilde{b}_i = \tilde{x}_i - \tilde{a}_i iT, \quad (15)$$

и, далее, восстановлению значений сигнала в заданных точках на каждом из отрезков $[iT; (i+1)T]$ по уравнению прямой с коэффициентами, вычисляемыми в соответствии с (14), (15).

Алгоритм оценки погрешности восстановления сигнала № 2, как очевидно из его описания, предполагает использование на каждом из отрезков $[iT; (i+1)T]$ значений коэффициентов прямой, усреднённых по ансамблю реализаций:

$$\langle \tilde{a}_i \rangle = E \left[\frac{\tilde{x}_{i+1} - \tilde{x}_i}{T} \right] = a_i + a_i \frac{E[\tau_{i+1} - \tau_i]}{T} = a_i, \quad (12)$$

$$\langle \tilde{b}_i \rangle = E \langle \tilde{x}_i \rangle - E \langle \tilde{a}_i iT \rangle = x_i - iT E \langle \tilde{a}_i \rangle = x_i - a_i iT. \quad (13)$$

Из (10), (11) и (12), (13) видно, что усреднённые по ансамблю реализаций значения коэффициентов прямой алгоритмов № 1, 2 оказываются одинаковыми. Это объясняет близость оценок точности восстановления изученных сигналов.

Алгоритм восстановления сигнала № 3, как очевидно из его описания, является модификацией алгоритма № 1. Данная модификация состоит в оценке знака случайной величины τ_i (см. пп. 4, 5 алгоритма № 3) и его учёте при генерации случайных чисел δ_i (см. п. 7,8 алгоритма № 3), чем и объясняется близость оценок восстановления линейного и полиномиального трендов данным алгоритмом, аналогичным характеристикам алгоритмов № 1, 2.

Отметим, что для каждого из рассмотренных в работе сигналов точность восстановления дискретного сигнала при использовании алгоритма № 3 в случае равномерного закона распределения джиттера оказывается ниже аналогичной величины у алгоритмов № 1, 2. С нашей точки зрения, данный результат объясняется тем, что для нелинейного тренда выполнение условия $\left| u^{(1)}_i - x_i \right| \leq \left| u^{(2)}_i - x_i \right|$ оказывается недостаточным для того, чтобы τ_i в (1) имело отрицательный знак.

6. Заключение

Анализ результатов исследования на основе статистического моделирования алгоритмов восстановления дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке, точные значения узлов которой неизвестны, показывает, что точность восстановления линейного тренда, полиномиального тренда и периодического сигнала каждым из изученных алгоритмов оказываются достаточно близкими друг другу.

В то же время при выборе алгоритма восстановления дискретных сигналов на практике следует принимать во внимание принципиальное отличие в её постановке от рассмотренной в статье задачи оценки точности восстановления сигналов на основе статистического моделирования. Действительно, на практике решается задача восстановления дискретного сигнала по его единственной реализации; как следствие, провести усреднение по ансамблю реализаций в соответствии с (12), (13) не представляется возможным. Таким образом, для восстановления дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке, точные значения узлов которой неизвестны, целесообразно использовать алгоритм № 1.

Литература

1. Unser M. Sampling – 50 years after Shannon // Proceedings of the IEEE. 2000. V. 88, № 4. P. 569–587.
2. Unser M. Sampling: 60 Years After Shannon // Sixteenth International Conference on Digital Signal Processing, Santorini, Greece. 2009. P. 42.
3. Баевский Р.М., Иванов Г.Г., Чирейкин Л.В. и др. Анализ variability сердечного ритма при использовании различных электрокардиографических систем // Вестник аритмологии. 2001. № 24. С. 67–95.
4. Feichtinger H.G., Grochenig K., Strohmer T. Efficient numerical methods in non-uniform sampling theory // Numerische Mathematik, 1995. № 69. P. 423–440.
5. Marvasti F. Recovery of signals from nonuniform samples using iterative methods // IEEE Transactions on signal processing. 1991. V. 39, № 4. P. 872–878.
6. Senay S. Signal reconstruction from nonuniform samples using prolate spheroidal wave functions: theory and application. Doctoral Dissertation, Pittsburgh. 2011. P. 117.
7. Selva J. Functionally weighted Lagrange interpolation of band-limited signals from nonuniform samples // IEEE Transactions on Signal Processing. 2009. V. 57, № 1. P.168-181.

8. *Tuncer T. E., Serdaroglu B.* Block-based methods for the reconstruction of finite-length signals from nonuniform samples // *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2007. V. 55, № 2. P. 530–541.
9. *Прохоров С. А.* Прикладной анализ неэквиdистантных временных рядов / Самар. гос. аэрокосм. ун-т. 2001. 375 с.
10. *Browning J.* A method of finding unknown continuous-time nonuniform sample locations of band-limited functions // *Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures, and Implementations XIV*. 2004. V. 5559. P. 289–296.
11. *Marziliano, P.* Reconstruction of irregularly sampled discrete-time bandlimited signals with unknown sampling locations // *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1999. V. 48, № 12. P. 3462–3471.
12. *Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.* Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1981. 281 с.
13. *Поршнеv С.В., Кусайкин Д.В.* Исследование точности методов восстановления дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке // *В мире научных открытий*. 2013. Т. 46, № 10, С. 261–279.
14. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы: учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1987. 598 с.

Статья поступила в редакцию 07.11.2013

Поршнеv Сергей Владимирович

д.т.н., профессор, заведующий кафедрой радиоэлектроники информационных систем ИРИТ-РТФ УрФУ (620002, Екатеринбург, ул. Мира, 32) тел. (343) 375-95-57, профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин технических специальностей УрТИСИ ФГОБУ ВПО «СибГУТИ» (620109, Екатеринбург, ул. Репина, 15),
e-mail: sergey_porshnev@mail.ru

Кусайкин Дмитрий Вячеславович

аспирант кафедры общепрофессиональных дисциплин технических специальностей УрТИСИ ФГОБУ ВПО «СибГУТИ» (620109, Екатеринбург, ул. Репина, 15)
тел. (343) 359-91-08, e-mail: kusaykin@mail.ru

Signal reconstruction from non-uniform discrete-time signals with unknown locations

S. Porshnev, D. Kusaykin

This paper presents reconstruction algorithms for non-uniform discrete-time signals with unknown locations. Reconstruction errors of each method for various types of signals are given. Numerical modeling was made for linear trend, polynomial trend and periodic signal with uniform and normal distribution of time jitter.

Keywords: non-uniform discrete-time signal; reconstruction; interpolation.