УДК 519.17+519.24

Методы ускорения расчёта надёжности сетей с ограничением на диаметр

Д. А. Мигов, С. Н. Нестеров, А. С. Родионов *

Расчёт надёжности сети с ограничением на диаметр является NP-трудной задачей. Предлагается использовать редукцию рёбер и упорядочивать рёбра при расчёте надёжности известным методом ветвления. Данные приёмы существенно сокращают время расчёта надёжности сети с ограничением на диаметр, что подтверждается приведёнными результатами численных экспериментов.

Ключевые слова: надёжность сети, случайный граф, диаметр сети.

1. Введение

Предмет исследования данной статьи – сети, элементы которых подвержены случайным отказам. В таких случаях сеть моделируется случайным графом, для каждого элемента которого задана вероятность его присутствия [1]. Одним из основных показателей надёжности такой сети является вероятность связности заданного подмножества узлов (полюсов). Данный показатель достаточно хорошо изучен, существует много различных точных и приближённых методов его расчёта [1–6]. Необходимость в расчёте и оценке показателей надёжности возникает, прежде всего, при структурной оптимизации сетей [7] как на этапе проектирования, так и при расширении существующих структур.

Однако на практике часто требуется обеспечить не просто существование пути между каждой парой целевых узлов, а существование пути, проходящего по ограниченному числу звеньев. Например, если есть ограничение на время передачи данных между двумя узлами – T, то количество транзитных узлов, участвующих в передачи данных, не должно превышать T/t, где t – требуемое время для обработки данных на каждом узле сети. Ряд протоколов накладывают ограничение на количество пересылок для каждого пакета данных, чтобы избежать заторов из-за зацикливания; например, это некоторые peer-to-peer сети, такие как Freenet, Gnutella и другие. При передаче данных в беспроводных сенсорных сетях [8, 9] также важное значение имеет ограничение на количество транзитных узлов. Для анализа надёжности таких сетей был предложен другой показатель надёжности – вероятность связности сети с ограничением на диаметр [10], т.е. вероятность того, что любые два полюса сети соединены путём, состоящим из ограниченного количества звеньев.

Как и задача расчёта вероятности связности сети, задача расчёта вероятности связности сети с ограничением на диаметр NP-трудна [10]. Из способов расчёта классической меры надёжности – вероятности связности графа, наиболее широко известен метод ветвления (факторизации, Мура–Шеннона [1, 2]). В [10] предложена модификация этого метода в случае ограничения на диаметр, основанная на предварительном формировании множества всех путей ограниченной длины для каждой пары полюсов. Авторами настоящей работы ранее были

*Работа поддержана грантами РФФИ № 13-07-00589, № 14-07-31069 и грантом Президента России поддержки ведущих научных школ НШ 5176.2010.9.

разработаны методы декомпозиции [11, 12], применяя которые можно существенно ускорить расчёт надёжности двухполюсной сети с ограничением на диаметр.

В данной работе предлагаются новые методы для ускорения точного расчёта надёжности сети с ограничением на диаметр.

2. Основные определения и обозначения

Будем представлять сеть с ненадёжными звеньями с помощью неориентированного случайного графа $G = (V, E)$, для каждого ребра e которого задана вероятность его присутствия в графе r_e, что соответствует надёжности звена. Задано выделенное множество вершин K – полюсов, соответствующим узлам сети, для которых необходимо обеспечить возможность устанавливать соединение друг с другом.

Элементарным событием будем называть частную реализацию графа, определяемую присутствием или отсутствием каждого ребра. Таким образом, общее количество элементарных событий составляет $2^{|E|}$. Вероятность элементарного события равна произведению вероятностей присутствия исправных рёбер, умноженному на произведение вероятностей отсутствия отказавших рёбер.

Вероятность связности графа G с ограничением на диаметр d определяется как сумма вероятностей всех частных реализаций графа, в которых любая пара вершин из множества K связана не более чем d рёбрами. Далее, если не оговорено обратное, будем называть эту характеристику надёжностью графа или соответствующей сети, и обозначать как $R_K^d(G)$. Под путём будем подразумевать путь без самопересечений, под длиной пути в графе – количество рёбер в этом пути. Вероятность связности графа G без ограничения на диаметр будем обозначать как $R_K(G)$ (или просто $R(G)$ в случае $K = V$).

3. Метод ветвления

Расчёт $R_K^d(G)$ непосредственно по определению приведёт к перебору всех реализаций графа, что делает расчёт невозможным даже при небольшой размерности. Поэтому для расчёта различных показателей надёжности используются другие методы, самый распространенный из которых – метод ветвления [1–4]. Метод заключается в рекурсивном применении формулы полной вероятности при рассмотрении в качестве альтернативных гипотез наличия либо отсутствия очередного разрешающего ребра. Для $R(G)$ эта формула принимает вид

$$R(G) = r_e R(G/e) + (1 - r_e) R(G \backslash e), \tag{1}$$

где G/e – граф со стянутым ребром e, $G \backslash e$ – граф без ребра e. Рекурсии продолжаются либо до получения несвязного графа, либо до получения графа малой размерности, для которого надёжность можно рассчитать непосредственно. В случае с ограничением на диаметр d будут два важных отличия: G/e будет графом с абсолютно надёжным ребром e, а рекурсии продолжаются до получения графа, в котором либо существует пара полюсов, не связанных путём длины, не превосходящей d (возвращается 0), либо все пары полюсов связаны надёжными путями допустимой длины (возвращается 1).

В [10] предложен модифицированный метод ветвления для расчёта надёжности сети, который работает существенно быстрее, чем вышеописанный классический метод ветвления (1) в случае с ограничением на диаметр. Основная идея состоит в переходе от графов к спискам путей P. На начальном этапе формируется список всех путей длины, не превосходящей d, для каждой пары полюсов. Это автоматически исключает из рассмотрения все рёбра, через которые не проходит не один такой путь, например, так называемые «прикреплённые деревья» без полюсов. Для каждого оставшегося ребра e формируется список $P(e)$ всех содержащих его путей. При рекурсивных вызовах процедуры в качестве параметров не передаются подграфы, вместо них передаётся шесть параметров, описывающих состояние соответствующего подграфа с точки зрения путей из P. Ниже приведён псевдокод этого алгоритма и описание используемых в нём вспомогательных параметров.

- np_{st} – количество путей длины не более d между полюсами s и t;
- $links_p$ – число рёбер в пути $p \in P$, не являющихся абсолютно надёжными;
- $feasible_p$ – принимает значение $false$, если путь p включает абсолютно ненадёжное ребро, $true$ – иначе;
- $connected_{st}$ – принимает значение $true$, если вершины s и t соединены абсолютно надёжным путём длины не более d, $false$ – иначе;
- $connectedPairs$ – число пар полюсов, связанных абсолютно надёжными путями ограниченной длины.

Псевдокод алгоритма Cancela и Petingi [10].

function FACTO($P, np_{st}, links_p, feasible_p, connected_{st}, connectedPairs$)
    $RContract \leftarrow 0$ ▷ случай, отвечающий стягиванию ребра
    $RDelete \leftarrow 0$ ▷ случай, отвечающий удалению ребра
    $e \leftarrow$ **случайное ребро** : $0 < r_e < 1$
    for all $p = (s, \ldots, t) \in P$**, где** $feasible_p = true$ **do** ▷ «Стягивание ребра»
        $links_p \leftarrow links_p - 1$
        if $connected_{st} = false$ **и** $links_p = 0$ **then**
            $connected_{st} \leftarrow true$
            $connectedPairs \leftarrow connectedPairs + 1$
            if $connectedPairs = \frac{k \times (k-1)}{2}$ **then**
                $RContract \leftarrow 1$
                GoTo("Удаление ребра")
            end if
        end if
    end for
    $RContract \leftarrow$ FACTO($P, np_{st}, links_p, feasible_p, connected_{st}, connectedPairs$)
    for all $p = (s, \ldots, t) \in P$**, где** $feasible_p = true$ **do** ▷ «Удаление ребра»
        $feasible_p \leftarrow false$
        $np_{st} \leftarrow np_{st} - 1$
        if $connected_{st} = false$ **и** $links_p = 0$ **then**
            $feasible_p \leftarrow false$
            $np_{st} \leftarrow np_{st} - 1$
            if $np_{st} = 0$ **then**
                $RDelete \leftarrow 0$
                GoTo(«Финальные вычисления»)
            end if
        end if
    end for
    $RDelete \leftarrow$ FACTO($P, np_{st}, links_p, feasible_p, connected_{st}, connectedPairs$)
    $R^d_K(G) = r_e \times RContract + (1 - r_e) \times RDelete$ ▷ «Финальные вычисления»
    Return $R^d_K(G)$
end function

4. Ускорение расчёта надёжности сети с ограничением на диаметр

Одна из основных причин, делающих расчёт надёжности с ограничением на диаметр существенно более трудоёмким по сравнению с другими показателями сетевой надёжности – это отсутствие методов снижения количества рекурсий. Например, для расчёта $R_K(G)$ используются методы редукции, декомпозиции, направленное ветвление и другие методы, которые ещё не адаптированы или в силу разных причин не могут быть применены для расчёта $R_K^d(G)$.

Мы предлагаем использовать редукцию рёбер (последовательное преобразование) и упорядочивание рёбер для направленного ветвления.

4.1. Редукция рёбер

Одним из эффективных методов ускорения расчёта $R_K(G)$ является последовательно-параллельное преобразование, удаляющее из графа вершины степени 2 [1, 3, 4] и замещающее параллельные рёбра, которые могут в результате возникнуть, одним ребром. В случае с ограничением на диаметр возможно объединение двух рёбер, инцидентных вершине степени 2, при условии, что она не является полюсом. На рис. 1 изображена такая ситуация. Любой путь, связывающий два каких-либо полюса и проходящий через ребро (s, v), будет обязательно проходить и через ребро (v, t), так как v – не полюс. Следовательно, $P(s, v) = P(v, t)$ и рёбра (s, v) и (v, t) могут быть заменены на ребро (s, t) с надёжностью $r_{(s,v)} \times r_{(v,t)}$.

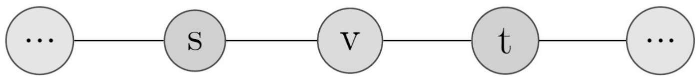

Рис. 1. Редукция рёбер, инцидентных вершине степени 2

Параллельное преобразование в данном случае нереализуемо. Предположим, что вершины s и t были связаны ребром f. Тогда для вновь образованного ребра $g = (s, v)$ в общем случае неверным будет равенство $P(g) = P(f)$, так как через f может проходить большее число путей ограниченной длины между всевозможными парами полюсов, чем через g.

Если формирование списков путей $P(e)$ осуществлять после преобразования, необходимо учесть, что образованное ребро внесет больший вклад в длину любого проходящего через него пути. Если преобразование осуществлять после формирования списка, то нужно просто оставить в нём одно из двух совпадающих множеств, например $P(s, v)$.

В общем случае вместо вершины v может быть произвольный подграф без полюсов (рис. 2). Тогда любой путь, связывающий два каких-либо полюса и проходящий через ребро (s, v), будет обязательно проходить через ребро (u, t). Следовательно, остается верным равенство $P(s, v) = P(u, t)$ и можно совершать ветвление сразу по этим двум рёбрам.

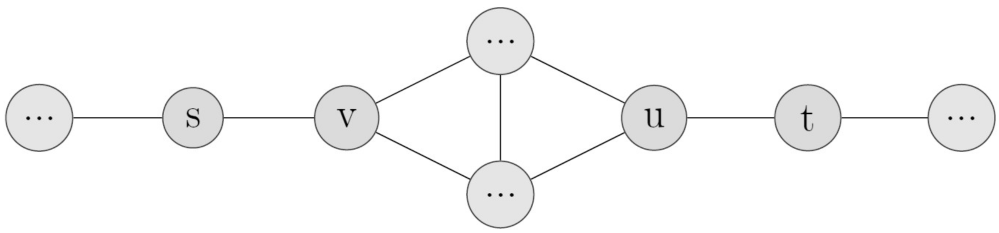

Рис. 2. Редукция рёбер в общем случае

Таким образом, на предварительном этапе появляется возможность редуцировать цепи произвольной длины в одно ребро и объединять пары рёбер в одно при определённых условиях, что уменьшает количество рекурсий и, соответственно, время работы алгоритма.

4.2. Упорядочивание рёбер для направленного ветвления

Метод ветвления будет правильно работать при любом выборе разрешающего ребра, однако вопрос оптимального выбора ребра, ускоряющий время работы алгоритма, остаётся открытым [10]. В некоторых случаях упорядочивание рёбер для направленного ветвления существенно влияет на количество рекурсий.

Мы предлагаем упорядочивать рёбра по критерию максимума путей из P, содержащих эти рёбра. Другими словами, при очередном выборе ребра для ветвления предпочтение отдаётся ребру, которое входит в наибольшее количество путей из P. В большинстве случаев это даёт ускорение расчёта, но всё же не является оптимальным. Например, для небольшого графа (рис. 3) при условиях $K = \{1, 2, 3, 4\}$, $d = 4$, количество рекурсий без упорядочивания составило 602, с упорядочиванием по предложенной схеме оно уменьшается до 216. Однако полным перебором всех вариантов упорядочивания был найден оптимальный вариант в 128 рекурсий.

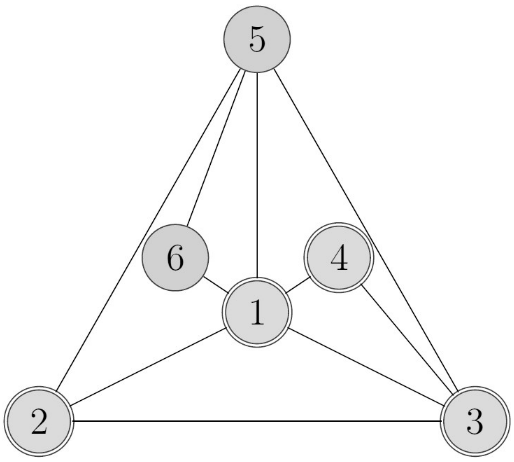

Рис. 3. Тестовый граф

5. Результаты численных экспериментов

Предложенные методы ускорения расчёта надёжности были протестированы на структуре научно-образовательной сети Internet 2, изображённой на рис. 4, (данный рисунок имеется в свободном доступе по адресу [13]). В графе сети 58 вершин и 67 рёбер. В качестве полюсов естественным образом были выбраны маршрутизаторы сети (IP router nodes), значение диаметра полагалось равным 15, 20 и 25.

За основу был взят модифицированный метод ветвления [10], который был улучшен тремя способами: сортировкой рёбер, редукцией рёбер, и сортировкой и редукцией рёбер. В таблице приведено время расчёта надёжности данной структуры для каждого из тестируемых алгоритмов, а также количество рекурсий, т.е. количество вызовов процедуры факторизации в процессе расчёта. Для расчётов использовался компьютер с четырёхъядерным процессором AMD A8-450M 1.9 GHz.

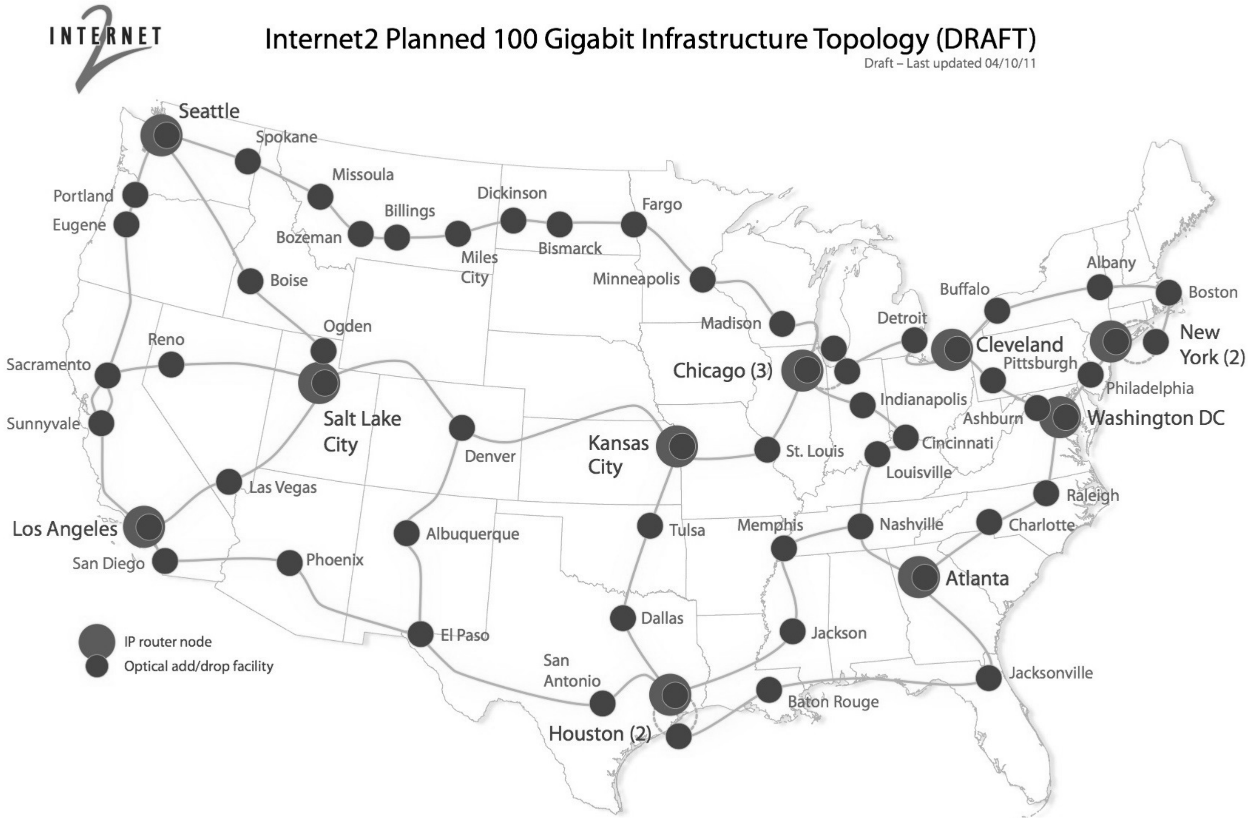

Рис. 4. Структура научно-образовательной сети Internet2

Т а б л и ц а 1. Результаты расчётов

Алгоритм	d=15		d=20		d=25	
	Время	Рекурсии	Время	Рекурсии	Время	Рекурсии
Метод ветвления	>24 часов	–	>24 часов	–	>24 часов	–
Метод ветвления с сортировкой рёбер	>24 часов	–	>24 часов	–	>24 часов	–
Метод ветвления с редукцией рёбер	8 секунд	109798	87 секунд	1462308	8 минут	9581810
Метод ветвления с редукцией и сортировкой рёбер	4 секунды	38016	36 секунд	699552	2 минуты	1935311

Как видно из таблицы, наиболее существенный вклад в ускорение расчёта надёжности сети с ограничением на диаметр вносит редукция рёбер, а использование сортировки позволяет дополнительно ускорить расчёт.

6. Заключение

Предложен и экспериментально подтверждён аналог известного последовательно-параллельного преобразования в вычислении надёжности сети для случая с ограничением на её диаметр. Изучался вопрос о влиянии упорядочивания рёбер для выбора в качестве разрешающих при расчёте надёжности сети с ограничением на диаметр методом ветвления. Как было продемонстрировано, эти методы позволяют существенно ускорить процесс вычисления указанного показателя. Однако вопрос об оптимальном упорядочивании рёбер всё ещё остаётся открытым.

Дальнейшие исследования в этой области могут быть связаны с разработкой метода последовательного уточнения верхней и нижней границ рассматриваемого показателя до достижения наперёд заданного порогового значения надёжности, что позволяет более быстро принимать решение о надёжности (ненадёжности) сети аналогично [3,4], где рассматривался случай отсутствия ограничения на диаметр. Также предполагается рассмотрение более сложных приёмов редукции размерности задачи, в том числе путём декомпозиции сети.

Литература

1. *Colbourn Ch. J.* The combinatorics of network reliability. N.Y.: Oxford Univ. press, 1987. 160 p.

2. *Satyanarayana A., Chang M.K.* Network reliability and the factoring theorem // Networks. 1983. V. 13. P. 107-120.

3. *Won J.-M., Karray F.* Cumulative update of all-terminal reliability for faster feasibility decision // IEEE transactions on reliability. 2010. V. 59, № 3. P. 551–562.

4. *Rodionov A., Migov D., Rodionova O.* Improvements in the efficiency of cumulative updating of all terminal network reliability // IEEE Transactions on Reliability. 2012. V. 61, № 2. P. 460-465.

5. *Родионов А.С.* К вопросу ускорения расчёта коэффициентов полинома надёжности случайного графа // Автоматика и телемеханика. 2011. № 7. С. 134-146.

6. *Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А., Лосев А.С.* Асимптотика вероятности связности графа с низконадёжными рёбрами // Прикладная дискретная математика. 2013. № 1(19). С. 93-98.

7. *Нечунаева К.А.* Оптимальное по показателям связности объединение сетей в условиях структурных и стоимостных ограничений // Проблемы информатики. 2010. № 2. С. 18-26.

8. *Shakhov V., Choo H.* Reliability of wireless sensor network with sleeping nodes // Lecture Notes in Computer Science. 2007. V. 4490. P. 530-533.

9. *Shakhov V.* Protecting Wireless Sensor Networks from Energy Exhausting Attacks // Lecture Notes in Computer Science. 2013. V. 7971. P. 184-193.

10. *Cancela H., Petingi L.* Diameter constrained network reliability: exact evaluation by factorization and bounds // Proc. Int. Conf. on Industrial Logistics. Japan, 2001. P. 359-356.

11. *Мигов Д.А.* Расчёт надёжности сети с ограничением на диаметр с применением точек сочленения // Автоматика и телемеханика. 2011. № 7. С. 69–74.

12. *Migov D., Rodionov A.* Decomposing graph with 2-node cuts for diameter constrained network reliability calculation // Proc. of the 7th Int. Conference on Ubiquitous Information Management and Communication (ACM ICUIMC 2013). Kota Kinabalu, Malaysia, 2013. ACM New York, USA. Article No. 39. 6 p.

13. `http://www.extremetech.com/computing/98283-the-next-internet-a-quest-for-speed/2`

Статья поступила в редакцию 9.12.2013;
переработанный вариант – 15.12.2013.

Мигов Денис Александрович

к.ф.-м.н., научный сотрудник лаборатории моделирования динамических процессов в информационных сетях Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (630090, Новосибирск, пр. Лаврентьева, 6), тел. (383) 332-69-49,
e-mail: `mdinka@rav.sscc.ru`.

Нестеров Сергей Николаевич

магистрант Новосибирского государственного университета (630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2), e-mail: `cepera_666@inbox.ru`

Родионов Алексей Сергеевич

д.т.н., профессор кафедры вычислительных систем СибГУТИ (630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86), тел. (383) 332-69-49, e-mail: `alrod@sscc.ru`.

Methods of speeding up calculation of diameter constraint network reliability

D. Migov, S. Nesterov, A. Rodionov

Calculating diameter constraint network reliability is NP-hard problem. The methods for edge reduction and special ordering of edges while calculating the reliability index by the well-known factoring method are proposed. Experiments show a considerable speeding up of diameter constraint network reliability computations.

Keywords: network reliability, random graph, diameter constraint.