УДК 621.391

Тензорная модель сети связи

В.В. Лебедянцев, В.М. Деревяшкин

Предложено математическое описание сети связи в виде многомерной поверхности, являющейся полем тензоров. Показаны преимущества такой модели, заключающиеся в её геометрической наглядности, универсальности, возможности вычисления важнейших характеристик сети и решения некоторых оптимизационных задач.

Ключевые слова: тензорная модель сети, собственные векторы и собственные числа матрицы оператора тензорной модели сети, каскадное представление сети, базисная сеть, отношение Релея.

1. Введение

Сети связи представляют собой весьма сложный объект для исследования. Известны разные математические методы анализа сетей связи, в частности, методы, базирующиеся на описании сетей графами и гиперграфами. Однако всё усложняющаяся структура современных сетей связи стимулирует поиск новых математических моделей для их отображения, которые, с одной стороны, были бы достаточно наглядными, а с другой стороны, обладали бы необходимой математической мощностью. Как известно, тензоры по своей сути представляют собой геометрические объекты, компоненты которых, записанные в некоторой системе координат в виде матрицы, при переходе к другой системе координат рассчитываются посредством линейных преобразований [1]. При этом в особой «собственной системе координат» запись тензора имеет простейшую структуру в виде диагональной матрицы. Это обстоятельство значительно облегчает исследования «сущностных» свойств физических объектов, описываемых тензорами.

Эффективность применения тензоров для анализа электрических схем была показана Г.Кроном. Результаты его исследований в систематизированном виде опубликованы в [2]. В соответствии с выводами Г.Крона, «… мы можем рассматривать величины и структуру каждой цепи как ″проекции″ абстрактной цепи, играющей роль тензора в разные системы координат, определяемые структурой соединения ветвей. Это позволяет использовать основное преимущество тензорного подхода: по результатам расчёта одной наиболее простой цепи (состоящей, скажем, из отдельных ветвей, которую будем называть простейшей или примитивной) получать с помощью формул преобразования результаты расчёта любой цепи, составленной из тех же ветвей, но соединённых любым другим способом. Способ соединения ветвей в структуру рассматривается как преобразование координат, представленное матрицей…» [3, стр. 79].

Непосредственное применение тензорного анализа электрических схем для исследования сетей связи невозможно, так как эти системы имеют существенные отличия. С учётом этого, преследуя цель использования преимущества тензорного анализа сложных систем, к которым относятся и сети связи, на первом этапе необходимо разработать тензорную модель сети связи.

2. Постановка задачи

Представим сеть связи в виде многополюсника, имеющего m входов и n выходов (рисунок 1).

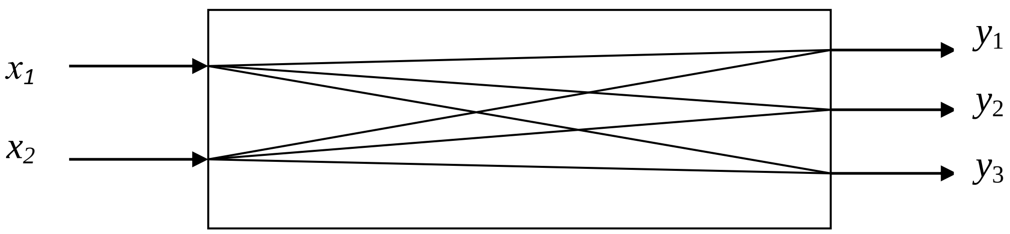

Рис. 1. Представление сети связи в виде многополюсника

Для простоты и большей наглядности рисунок соответствует величинам m=2 и n=3. Входные воздействия обозначены символами x_1 и x_2, выходные результаты воздействия – y_1, y_2, y_3. Этот многополюсник может быть описан некоторой матрицей связей C между входами и выходами сети:

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{Vmatrix}.$$

В разных задачах физический смысл элементов этой матрицы может быть разным. Это могут быть коэффициенты тяготения между входами и выходами сети, пропускные способности маршрутов, величины, определяющие задержки сообщений для маршрутов и т.п. В любом случае сеть будет задана некоторой матрицей C, элементы которой имеют определённый физический смысл. Необходимо доказать, что эта матрица отображает тензор, а также показать возможности и преимущества тензорного представления сети связи.

3. Разработка и исследование тензорной модели сети

Для доказательства тензорного представления сети матрицей связей C достаточно показать геометрический характер такой математической модели, не зависящей от используемого базиса пространства представления, в которое погружена геометрическая модель сети [1].

Рассмотрим вначале простой пример, когда элементы матрицы C отображают коэффициенты тяготения k_{ij} между i-м входом и j-м выходом. При этом взаимосвязь между вектором входных потоков $\bar{x} = \|x_1, x_2\|$ и вектором выходных потоков $\bar{y} = \|y_1, \ y_2, \ y_3\|$ будет следующей:

$$\bar{x}C = \bar{y}, \tag{1}$$

или в развёрнутом виде:

$$\|x_1, x_2\| \cdot \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{Vmatrix} = \|y_1, \ y_2, \ y_3\|.$$

При этом $y_1 = k_{11}x_1 + k_{21}x_2$, $y_2 = k_{12}x_1 + k_{22}x_2$; $y_3 = k_{13}x_1 + k_{23}x_2$.

В результате несложных преобразований из последних уравнений можно получить следующее равенство, связывающее координаты вектора выходных потоков:

$$ay_1 + by_2 + zy_3 = 0, \tag{2}$$

где

$$a = \frac{k_{13}}{k_{11}\left(1 - \frac{k_{11}k_{12}}{k_{11}k_{22}}\right)} - \frac{k_{12}k_{23}}{k_{11}\left(1 - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{11}}\right)};$$

$$b = \frac{k_{23}}{k_{22}} + \frac{k_{21}k_{12}k_{23}}{k_{22}k_{11}\left(1 - \frac{k_{12}k_{21}}{k_{11}}\right)};$$

z = 1.

Уравнение (2) и, соответственно, исходное уравнение (1) являются уравнениями двумерной плоскости, расположенной в трёхмерном пространстве представления с координатными осями $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$, что доказывает геометрический характер рассматриваемой сети.

Нетрудно показать, что и в другом базисе пространства представления $\bar{y}_1', \bar{y}_2', \bar{y}_3'$, выражение (1) по-прежнему отображает плоскость. Для доказательства обе части (1) умножим на квадратную ортогональную матрицу Q, что будет соответствовать повороту координатных осей $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ в новое положение $\bar{y}_1', \bar{y}_2', \bar{y}_3'$:

$$\bar{x}CQ = \bar{y}Q \text{ или } \bar{x}C' = \bar{y}'. \tag{3}$$

Матрица C' имеет ту же размерность, что и матрица C; следовательно, все преобразования (3) к виду (2) можно совершить аналогично уже проведённым ранее для матрицы C. Таким образом, и в новом базисе пространства представления (3) имеет геометрический образ в виде плоскости, т.е. C является матрицей тензора.

Доказательство тензорного характера модели сети (1) несложно обобщить для больших значений m и n. В этом случае тензорная геометрическая модель сети будет представлять собой m-мерную плоскость, погружённую в n-мерное пространство представления.

Для иллюстрации на рис. 2 изображён пример тензорной геометрической модели сети связи для случая m = 2 и n = 3.

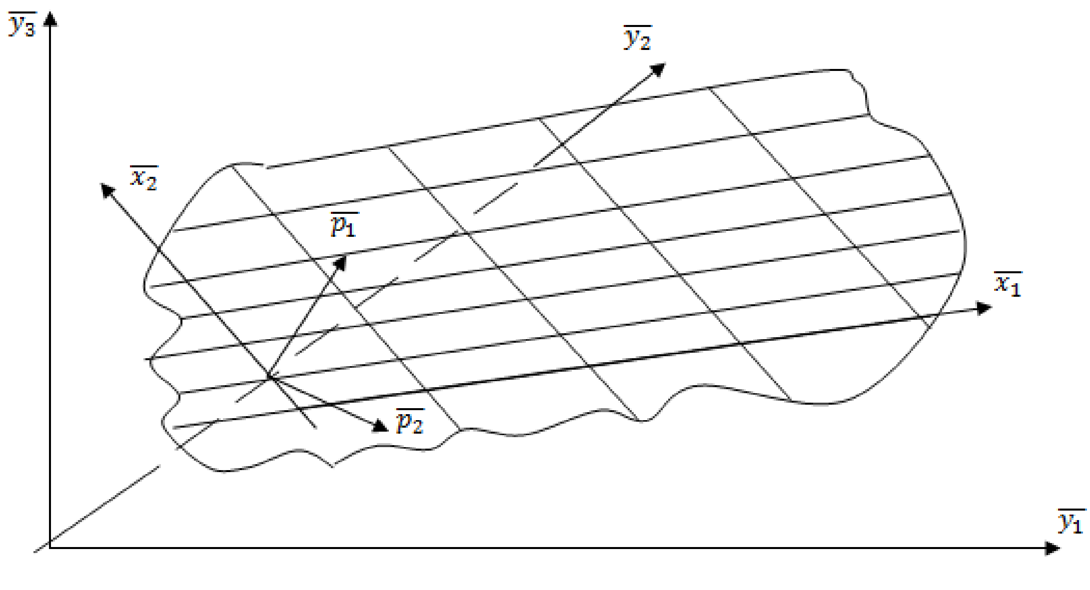

Рис. 2. Пример тензорной геометрической модели сети связи (m = 2, n = 3)

На плоскости геометрической модели сети можно построить её систему координат с координатными осями $\overline{x_1}$ и $\overline{x_2}$. Сетка координатных линий этой системы вычисляется посредством (1) при непрерывном изменении x_1 и фиксированных значениях x_2, а затем при непрерывном изменении x_2 и фиксированных значениях x_1. Тогда, как следует из рис. 2, каждая точка плоскости тензорной модели сети одновременно обозначает и вектор входных потоков (координаты точки в системе координат $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ плоскости), и соответствующий вектор выходных потоков (координаты этой точки в системе координат $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$). В целом плоскость описывает все возможные «состояния» сети связи, описываемой (1). Отсюда следует, что для данной сети невозможны такие сочетания величин y_1, y_2, y_3, если они не удовлетворяют уравнению плоскости (1).

Исследуем теперь свойства тензорной модели сети.

Для этого представим матрицу тензора С в виде сингулярного разложения [4]:

$$C = P_1^T \Lambda^{1/2} P_2,$$

где P_1 – ортогональная матрица собственных векторов матрицы CC^T;

T – символ транспонирования;

Λ – диагональная матрица собственных чисел матрицы CC^T;

P_2 – ортогональная матрица собственных векторов матрицы C^TC (количество собственных векторов матрицы C^TC выбирается равным количеству отличных от нуля собственных чисел).

Поскольку матрица CC^T имеет размерность $m\times m$, то и матрица P_1 имеет такую же размерность, т.е. содержит m строк, отображающих собственные векторы матрицы CC^T. Эти собственные векторы, условно изображённые на рис. 2 как $\overline{p_1}$ и $\overline{p_2}$, задают на плоскости тензорной модели особую собственную систему координат с линейными масштабами в направлении каждой оси, равными $\lambda_i^{\frac{1}{2}}$. Если собственные числа матрицы неодинаковы, то плоскость тензорной модели сети анизотропна.

Покажем, что каждый собственный вектор матрицы CC^T, лежащий в плоскости тензорной модели сети, в системе координатных осей пространства представления отображается соответствующим собственным вектором матрицы C^TC, умноженным на $\lambda_i^{\frac{1}{2}}$:

$$\bar{p}_{i1}C = \bar{p}_{i1}P_1^T\Lambda^{\frac{1}{2}}P_2 = \lambda_i^{\frac{1}{2}}\bar{p}_{i2},$$

где $\bar{p}_{i1}$ – i-й собственный вектор матрицы CC^T(i-й столбец матрицы P_1^T);

$\bar{p}_{i2}$ – i-й собственный вектор матрицы C^TC (i-ая строка матрицы P_2).

Итак, синтезированная тензорная геометрическая модель сети обладает наглядностью, отсутствием избыточности в том смысле, что одна точка модели однозначно отображает и вектор входных потоков, и вектор выходных потоков.

Среди множества возможных систем координат плоскости тензорной модели особое место занимает система, образуемая собственными векторами матрицы CC^T. Эти векторы задают направления, вдоль которых плоскость максимально проявляет свои анизотропные свойства. Степень анизотропности определяется степенью неравенства собственных чисел λ_i матрицы CC^T.

Вращением исходных систем координат плоскости тензорной модели сети и пространства представления, в которое оно погружено, можно привести матрицу C к диагональному виду:

$$P_1 CP_2^T = P_1P_1^T\Lambda^{1/2}P_2P_2^T = \Lambda^{1/2}.$$

Операция вращения систем координат осуществляется путём их умножения на ортогональные матрицы собственных векторов матриц CC^T и C^TC.

Выражение (1) представляет собой линейное (аффинное) преобразование множества векторов $\bar{x}$ в соответствующее множество векторов $\bar{y}$, что обусловлено независимостью элементов матрицы C от входных воздействий. В реальных сетях элементы матрицы C часто зависят от вектора входных воздействий $\bar{x}$. К примеру, известно, что пропускная способность маршрутов передачи сообщений между входными и выходными узлами сети конечна. Это означает, что элементы c_{ij} матрицы C, используемой для расчёта вектора скоростей выходных потоков $\bar{y}$, должны зависеть от скоростей передаваемых потоков сообщений:

$$\bar{x} \cdot \begin{Vmatrix} c_{11}(r_{11}) & c_{12}(r_{12}) & c_{13}(r_{13}) \\ c_{21}(r_{21}) & c_{22}(r_{22}) & c_{23}(r_{23}) \end{Vmatrix} = \bar{y}. \quad (4)$$

В этом выражении r_{ij} обозначают скорости передачи потоков сообщений между i-м входом и j-м выходом сети, $\bar{x}$ ─ вектор скорости входных потоков, $\bar{y}$ ─ вектор скорости выходных потоков.

Теперь (4) описывает некоторое многообразие Y [1] в пространстве с координатными осями $\overline{y_1}$, $\overline{y_2}$, $\overline{y_3}$.

При m=2 и n=3 многообразие Y имеет геометрический образ в виде кривой двумерной поверхности, погруженной в трёхмерное пространство представления. В общем случае многообразие Y будет представлять собой m-мерную криволинейную поверхность в n-мерном пространстве представления. В данном случае (4) описывает уже поле тензоров [1].

4. Каскадная модель сети

Пока ограничимся рассмотрением ситуации, когда скорости передачи потоков сообщений на маршрутах не достигают предельных значений (пропускных способностей). В этом случае можно считать, что элементы матрицы C постоянны, то есть не зависят от скорости передачи сообщений. Для определённости рассмотрим задачу расчёта вектора скоростей на выходе сети связи по заданному вектору скоростей входных потоков. В этом случае элементы матрицы C можно представить в виде произведения коэффициентов тяготения k_{ij} между входами и выходами сети и коэффициентами снижения скорости передачи сообщений k_{ccij} вследствие, например, потери пакетов, повторных передач и т.п., т.е. $c_{ij} = k_{ij}k_{ccij}$. Тогда c_{ij} можно рассматривать как коэффициенты передачи входных потоков сообщений по соответствующим маршрутам.

Используя сингулярное разложение матрицы C, перепишем (1) в следующем виде:

$$\bar{x}P_1^T\Lambda^{1/2}P_2 = \bar{y}. \quad (5)$$

Выражение (5) позволяет рассматривать преобразования вектора входных потоков $\bar{x}$ как результат прохождения ими трёх последовательно соединенных сетей, отображаемых, соответственно, матрицами P_1^T, $\Lambda^{1/2}$, P_2.

Матрицы P_1^T и P_2 – ортогональные, так как составлены из ортонормированных собственных векторов, вследствие этого длина вектора потоков сообщений при его умножении на эти матрицы не изменяется. Тогда матрицей, которая изменяет длину вектора потока сообщений, проходящих через сеть, является диагональная матрица $\Lambda^{1/2}$. Диагональный характер этой матрицы позволяет заключить, что соответствующая ей сеть является простейшей сетью без перекрёстных связей.

С учётом вышесказанного, сеть, изображённую на рис. 1, можно представить в виде каскадного соединения трёх сетей:

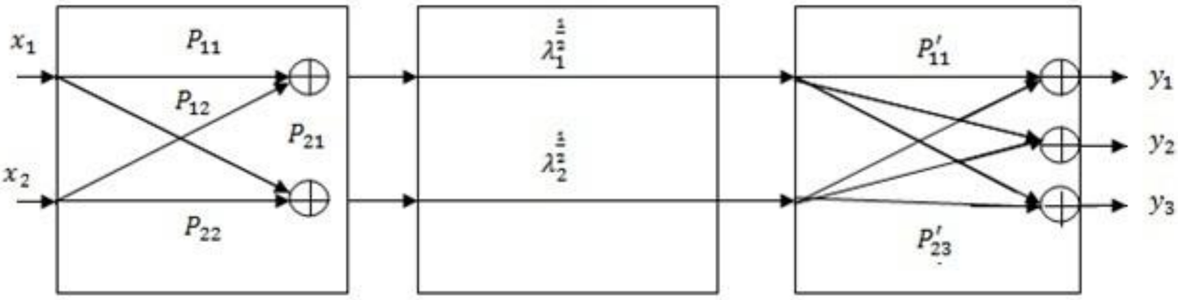

Рис. 3. Каскадное представление сети

На этом рисунке символами p_{11}, p_{12} представлен первый собственный вектор матрицы CC^T, символами p_{21}, p_{22} – её второй собственный вектор. Символы $p'_{11}, p'_{12}, p'_{13}$, $p'_{21}, p'_{22}, p'_{23}$ отображают первые два собственных вектора матрицы $C^T C$, соответствующие её ненулевым собственным числам. Эти элементы собственных векторов в совокупности с $\lambda_1^{\frac{1}{2}}$, $\lambda_2^{\frac{1}{2}}$ играют роль множителей в данной схеме.

Выявим физический смысл собственных чисел матрицы CC^T, образующих диагональную матрицу Λ.

Нетрудно убедиться в том, что сумма диагональных элементов матрицы CC^T, т.е. её след $Sp(CC^T)$, равна сумме квадратов коэффициентов передачи всех маршрутов сети:

$$Sp(CC^T) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j}^2 .$$

Поскольку матрица CC^T симметричная, то её след равен сумме её собственных чисел [4], т.е.:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i .$$

Следовательно, собственные числа матрицы CC^T имеют важный физический смысл, определяя «передаточные» свойства сети связи, и эти свойства выражает простейшая («базисная») сеть без перекрёстных связей. Отсюда следует, что любую сеть при анализе её «передаточных» свойств можно заменить эквивалентной «базисной» сетью, а это значительно упрощает исследование. С учётом этого, можно предложить классификацию сетей связи по признаку эквивалентности передаточных свойств, объединив в один класс сети, имеющие в своей каскадной структуре одинаковые простейшие базисные сети.

5. Применение тензорной модели сети для решения оптимизационной задачи

Тензорное описание сети связи позволяет геометризировать и сделать более наглядным решение некоторых оптимизационных задач. Например, с целью максимизации суммарной интенсивности выходных потоков сообщений, определяемой квадратом длины вектора $\bar{y}$, следует найти оптимальное распределение интенсивностей потоков сообщений на входах сети (вектор $\bar{x}_{опт}$).

Считая, что элементы c_{ij} матрицы C представляют собой известные коэффициенты тяготения между i-м входом и j-м выходом сети, запишем квадрат длины вектора выходных потоков в следующем виде:

$$|\bar{y}|^2 = \bar{y}\bar{y}^T = \bar{x}C(\bar{x}C)^T = \bar{x}CC^T\bar{x}^T.$$

Тогда критерий оптимизации можно предоставить в виде отношения квадратов длин выходного и входного векторов сообщений:

$$\max\left\{\frac{\bar{y}\bar{y}^T}{\bar{x}\bar{x}^T} = \frac{\bar{x}CC^T\bar{x}^T}{\bar{x}\bar{x}^T}\right\}.$$

Полученное выражение представляет собой известное отношение Релея. Максимум отношения равен первому (максимальному) собственному числу матрицы CC^T, а вектор $\bar{x}$, обеспечивающий максимум, равен первому собственному вектору этой матрицы [5], т.е. $\bar{x}_{опт} = \overline{p_1}(CC^T)$.

Отсюда следует, что оптимальный вектор интенсивностей входных потоков должен совпадать по направлению с первой осью собственной системы координат тензорной модели сети связи, имеющей наибольший коэффициент линейного масштаба $\lambda_I^{\frac{1}{2}}$.

Таким образом, геометрические свойства тензорной модели сети связи в этом примере непосредственно указывают на решение данной оптимизационной задачи.

6. Выводы

1. Для исследования сетей связи возможно использование их тензорных моделей, имеющих наглядные геометрические образы в виде гиперплоскостей или криволинейных поверхностей (многообразий) в общем случае.
2. Тензорные модели сети, помимо наглядности, обладают необходимой информативностью: каждая точка тензорной геометрической модели сети одновременно описывает входное воздействие и выходной отклик на него. Различие линейных масштабов вдоль осей собственной системы координат тензорной модели позволяет находить оптимальные входные воздействия. В собственной системе координат тензорная модель сети имеет простейшее представление в форме диагональной матрицы.
3. Сингулярное разложение матрицы тензора сети связи даёт возможность представить сеть в виде каскадного соединения трёх сетей, среди которых особую роль играет простейшая сеть без перекрёстных связей, определяющая суммарный коэффициент передачи потоков сообщений. Вследствие этого, в задачах анализа можно заменять сети их простейшими эквивалентами, что существенно упрощает исследования.

Литература

1. *Мантуров О.В.* Элементы тензорного исчисления. М.: Просвещение, 1991. 255 с.
2. *Крон Г.* Тензорный анализ сетей: Пер. с англ./под. ред. Л.Т.Кузина, П.Г. Кузнецова. М.:Советское радио, 1978. 720 с.
3. *Петров А.Е.* Тензорная методология в теории систем М.: Радио и связь, 1985. 152 с.
4. *Хорн Р.Джонсон.* Матричный анализ: Пер. с англ.М.: Мир, 1989. 655 с.
5. *Маркус М.; Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств / Пер. с англ., под. ред. В.Б. Лидиного. М.: Наука, 1972. 232 с.

Статья поступила в редакцию 05.02.2014
переработанный вариант — 12.05.2014;

Лебедянцев Валерий Васильевич
д.т.н., профессор, заведующий кафедрой АЭС СибГУТИ, тел. (383) 269-82-42,
e-mail: lebvv@sibsutis.ru

Деревяшкин Владимир Михайлович
к.т.н., доцент кафедры ЛС, декан факультета МТС, тел. (343) 269-82-50,
e-mail: dvm@sibsutis.ru

Tensor model of communication network

V.V. Lebedyanzev, V.M. Derevyashkin

Mathematical description of communication network as a multidimensional surface being a tensor field is proposed. Advantages of this model consisting in its geometrical visualization, universality, possibilities of calculation of major network characteristics and solving of some optimization problems are presented.

Keywords: tensor model network, eigenvector, matrix proper number of tensor model network operator, cascading network presentation, base net, Relay ratio.