

Эволюционный синтез семейств оптимальных двумерных циркулянтных сетей*

Э. А. Монахова, О. Г. Монахов

Исследуется решение оптимизационной проблемы построения семейств оптимальных по диаметру циркулянтных сетей размерности два. Циркулянтные сети обеспечивают практический интерес как графо-теоретические модели надежных сетей связи параллельных суперкомпьютерных систем, как основа структуры в модели малого мира, в нейронных и оптических сетях. Разрабатывается подход, использующий эволюционные алгоритмы для автоматического порождения аналитических (описываемых формулами) параметрических описаний семейств сетей. Алгоритм эволюционного синтеза комбинирует преимущества генетических алгоритмов и генетического программирования и основан на эволюционном вычислении, темплейтах решения и множестве экспериментальных данных. Представлено более 70 новых семейств оптимальных циркулянтных сетей размерности два с единичной образующей, полученных посредством эволюционного алгоритма

Ключевые слова: неориентированные двумерные циркулянтные сети, диаметр, эволюционные алгоритмы

1. Введение

Циркулянтные сети (графы) и их разнообразные приложения являются объектом интенсивных исследований (см. обзоры [1, 2, 3]). Они используются в проектировании оптических сетей, сетей передачи данных и распределённых вычислениях, реализованы как коммуникационные сети в ряде параллельных вычислительных и мультимедийных кластерных систем. Циркулянтные сети и их обобщения [4] применяются в теории кодирования при построении совершенных кодов, исправляющих ошибки [5], в модели «малого мира» (small-world networks) [6, 7], в клеточных нейронных сетях [8], что объясняется высокими показателями надёжности, наращиваемости, модульности и связности этих графов.

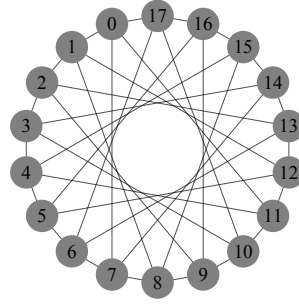
Пусть N и $s_1, s_2, \dots, s_k$, — целые числа такие, что $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < N$. Неориентированный граф $C(N; S)$, где $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$, с множествами вершин $V = \{0, 1, \dots, N - 1\}$ и рёбер $E = \{(i, j) : |i - j| \equiv s_m \pmod{N}, m = 1, \dots, k\}$, называется *циркулянтной сетью*, элементы порождающего множества S — *образующими*, k — *размерностью*, N — *порядком графа*.

Пример циркулянта размерности 2 показан на рис. 1.

Важными метрическими характеристиками графа являются диаметр и среднее расстояние (оценивают, соответственно, максимальную и среднюю структурные задержки в сети, а также время выполнения коллективных обменов в системе). *Диаметром* графа $G = (V, E)$ называется

$$d(G) = \max_{i, j \in V} d(i, j),$$

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-00031.


 Рис. 1. Циркулянт $C(18; 1, 7)$

где $d(i, j)$ — длина кратчайшего пути из вершины i в вершину j . Известно (см. ссылки в [1]), что верхняя граница максимально возможного числа вершин в циркулянтах размерности два с диаметром d равна

$$N_d = 2d^2 + 2d + 1.$$

Точная нижняя граница диаметра двумерных циркулянтов получена в [9]:

$$D(N) = \lceil (-1 + \sqrt{2N - 1})/2 \rceil.$$

Средним расстоянием графа порядка N называется $d_{av} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j \in V} d(i, j)$. Как показали исследования, наилучшими структурами вычислительных систем по различным критериям функционирования (структурной живучести, надёжности, производительности, самодиагностируемости и др.), при одинаковом числе вычислительных модулей и линий связи у каждого модуля, являются структуры с минимальными диаметром и средним расстоянием (см. ссылки в [1]). Таким образом, фундаментальная проблема синтеза оптимальных графов состоит в поиске графов с минимальным диаметром и/или минимальным средним расстоянием среди регулярных графов с заданными степенью и числом вершин.

Циркулянтный граф $C(N; S)$ назовём оптимальным, если $d(C(N; S)) = D(N)$, и субоптимальным, если $d(C(N; S)) = D(N) + 1$. Циркулянтный граф назовём *предельно оптимальным*, если граф достигает точных нижних границ диаметра и среднего расстояния. Такие оптимальные графы, взятые в качестве сетей связи, имеют высокие отказоустойчивость и скорость коммуникаций, минимальную задержку и максимальные связность и надёжность.

Случай $k = 2$ широко изучается благодаря практическим приложениям. В [9] доказано, что неориентированные циркулянтные графы любого порядка N могут иметь одновременно и минимальный диаметр $D(N)$, и минимальное среднее расстояние, и дано их аналитическое описание: предельно оптимальный двумерный циркулянт порядка $N > 4$ есть

$$C(N; d, d + 1), \text{ где } d = \lceil (-1 + \sqrt{2N - 1})/2 \rceil,$$

$\lfloor x \rfloor$ — ближайшее целое к x . Найденные оптимальные двумерные циркулянты интенсивно изучались в качестве технической реализации сетей связи вычислительных систем высокой производительности (см. ссылки в [1]), а также в теории кодирования при построении совершенных групповых кодов [5].

Из заданного описания циркулянтного графа $C(N; s_1, s_2)$, в частности из описания вида $(N; d, d + 1)$, можно получить все изоморфные описания, умножив $s_i \in S$, $i = 1, 2$, на элементы t приведённой системы вычетов по модулю N , не превосходящие $\lfloor N/2 \rfloor$, и взяв в качестве новых образующих s'_i остатки от деления ts_i на N , если они не больше $\lfloor N/2 \rfloor$, или дополнения этих остатков до N в противном случае. К сожалению, данный метод не всегда можно

использовать для нахождения оптимальных двумерных графов с единичной образующей, так как для некоторых значений N они или не существуют, или не изоморфны описанию вида $(N; d, d + 1)$.

2. Подходы к построению оптимальных двумерных циркулянтов с единичной образующей

Двумерные циркулянтные графы с единичной образующей $s_1 = 1$ (double-loop networks [2, 3, 10, 11, 12]) являются популярной моделью коммуникаций в локальных сетях и архитектурах параллельной обработки. Некоторые семейства циркулянтов, описанные в литературе, изучаются как сети связи мультимикропроцессорных систем с рассмотрением их коммуникативных свойств (алгоритмов маршрутизации, вложимости в СБИС и др.). Например, активно исследовалось [1] первое семейство предельно оптимальных графов с аналитическим описанием, полученное в [13] и затем переоткрытое в ряде зарубежных работ:

$$\{C(2d^2 + 2d + 1; 1, 2d + 1) \mid d \geq 1\}.$$

В [14] авторы поставили следующую задачу: классифицировать все значения N , для которых предельно оптимальные (оптимальные) двумерные циркулянты порядка N с единичной образующей существуют.

В работах [10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20] и др. рассмотрены различные подходы к решению поставленной задачи и получены бесконечные семейства графов с аналитическим описанием. В [14] найдена верхняя граница диаметра графа $C(N; 1, s)$ и на её основе получено 16 бесконечных семейств оптимальных графов $C(N; 1, s)$ с линейными образующими вида $s = 2d + \alpha$:

$$\{C(2d^2 + kd + h; 1, 2d + k - 1) \mid d > 3\},$$

где $(k, h) = (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 2), (5, 3), (6, 3)$;

$$\{C(2d^2 + kd + h; 1, 2d + k - 3) \mid d > 3\},$$

где $(k, h) = (3, -1), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 3), (5, 4), (6, 5)$.

В [16] описаны бесконечные семейства графов $C(N; 1, s)$ с заданной образующей s и их диаметры: пусть $l \geq 1$, $m \geq -l + 1$, тогда $d(C(N; 1, s)) = l + \lceil m/2 \rceil$, где $s = 2l + 1$, $N = N_l + ms$, или $s = 2l$, $N = 2l^2 + l + ms$. Часть графов из описанных семейств являются оптимальными. Используя данный результат, автор нашёл множество бесконечных семейств величин N мощности $O(\sqrt{d})$ для каждого интервала $N_{d-1} < N \leq N_d$, дающих оптимальные графы $C(N; 1, s)$ с линейными образующими вида $s = 2d \pm \alpha$.

В [12] изучены следующие семейства оптимальных циркулянтов (здесь d — диаметр графа):

$$\{C(2d^2; 1, (d - 1)^2) \mid d \equiv 3 \pmod{4}\};$$

$$\{C(2d^2; 1, (d + 1)^2) \mid d \equiv 1 \pmod{4}\}.$$

Показана возможность построения этих графов из $2d \times d$ прямоугольных скрученных торов (rectangular twisted torus), и, соответственно, получен для них эффективный алгоритм парной маршрутизации. Отметим, что рассмотренные в [12] семейства найдены ранее в работе [21]. В [17, 18] исследованы следующие семейства оптимальных циркулянтов, описанные в [16]:

$$\{C(2d^2 - d; 1, (2d - 1)k - 1) \mid d \geq 5\};$$

$$\{C(2d^2 + d; 1, (2d + 1)k - 1) \mid d \geq 5\};$$

$$\{C(2d^2; 1, 2kd - 1) \mid d \geq 3\},$$

где $1 \leq k < d/2$ и $\text{нод}(d, k) = 1$. Показано построение этих графов из скрученных торов, и на его основе даны простые алгоритмы парной маршрутизации. В [19] исследован вопрос, какие графы, представляющие собой произведения Кронекера двух циклов, являются оптимальными циркулянтами. Таких семейств графов найдено всего три: графы $C_d \times C_{2d-1}$, изоморфные предельно оптимальным циркулянтам

$$\{C(2d^2 - d; 1, 4d - 1) \mid d \equiv 1 \pmod{2}\};$$

графы $C_d \times C_{2d+1}$, изоморфные предельно оптимальным циркулянтам

$$\{C(2d^2 + d; 1, 4d + 1) \mid d \equiv 1 \pmod{2}\},$$

и, наконец, графы $C_d \times C_{2d+3}$, изоморфные оптимальным циркулянтам с числом вершин $N = 2d^2 + 3d$, где $d \equiv 1 \pmod{2}$.

Новый шаг в области изучения оптимальности графов $C(N; 1, s)$ сделан в [10, 20]: получена формула диаметра графов $C(N; 1, s)$ для подкласса значений N , где $2d^2 + d < N < N_d - 1$, $d > 1$. Используя её, авторы нашли необходимые и достаточные условия существования оптимального описания для двумерного циркулянта порядка N с единичной образующей и получили 6 новых оптимальных и 5 субоптимальных бесконечных семейств двумерных циркулянтных графов в рассмотренной области значений N , а также алгоритмы парной маршрутизации [11].

В [16] высказана гипотеза, проверенная для всех $N \leq 8 \cdot 10^6$, что по крайней мере субоптимальные двумерные циркулянты с единичной образующей существуют для всех значений N . В целом, проблема классификации всех значений N , для которых оптимальные графы $C(N; 1, s)$ существуют, остаётся открытой.

Продвижение в этом направлении сделано в настоящей работе. Используя метод эволюционного синтеза, авторы получили новые, отличные от всех известных в литературе, семейства предельно оптимальных циркулянтов вида $C(N; 1, s)$ с линейными образующими. Разработанный метод эволюционного синтеза даёт возможность получать новые семейства циркулянтов также с другими образующими, в частности с квадратичными образующими, что планируется выполнить в будущей работе.

3. Алгоритм эволюционного синтеза семейств оптимальных циркулянтов

Основными методами, используемыми для построения циркулянтных сетей с минимальным диаметром и/или минимальным средним расстоянием, являются локальный поиск или поиск в ширину, а также переборные и эвристические алгоритмы. Новый подход, основанный на задании темплейтов и использующий эволюционные вычисления, предложен в [22] и использован в [23, 24, 25] для синтеза графов. Представленный алгоритм эволюционного синтеза интегрировал преимущества генетических алгоритмов и генетического программирования и был применён для автоматического переоткрытия и открытия некоторых графовых, вычислительных и комбинаторных алгоритмов. Основная идея алгоритма состоит в эволюционных преобразованиях над множествами аналитических описаний графов (формул), основанных на естественной селекции: выживает «сильнейший». В нашем случае этими особями являются графы, имеющие наименьший возможный диаметр. Функция пригодности оценивает в данном случае сумму отклонений полученных диаметров от оптимальных значений для семейства циркулянтных графов с заданными размерностью, множествами образующих и порядками.

Особь представлены строками функций (аналитическими описаниями порядков и образующих или хромосомой). Каждая популяция является множеством порядков и образующих $N(d)$, $s(d)$, для семейства графов $C(N; 1, s)$ с диаметрами в диапазоне $d_{min} \leq d \leq d_{max}$. На основе анализа структур известных описаний оптимальных семейств графов были предложены следующие два обобщённых шаблона (темплейта) для функций $s(d)$ и $N(d)$.

Шаблон для функций $s(d)$ имеет следующий вид:

$$s(d) = p \cdot d + sg_1 \cdot q,$$

где: $p, q \in \{C\}$, C — множество натуральных констант, $sg_j \in \{+, -\}$, $j = 1, 2, 3$.

Шаблон для функций $N(d)$ имеет вид:

$$N(d) = 2d^2 + sg_2 \cdot [(a/b) \cdot d]^{tr} + sg_3 \cdot e,$$

где: $a, b, e \in \{C\}$, $d_{min} \leq d \leq d_{max}$, $tr \in \{\lceil x \rceil, \lfloor x \rfloor\}$ — тип округления.

Используя данные шаблоны, порождаем аналитические выражения для функций $s(d)$ и $N(d)$ и можем производить их оценивание и модификации. Таким образом, для фиксированных значений d и параметров $\Pi = \{a, b, e, p, q, sg, tr\}$ можем вычислять функции $s(d)$ и $N(d)$ для $C(N; 1, s)$.

В алгоритме эволюционного синтеза целевая функция F оценивает сумму квадратов отклонений для семейства тестируемых графов от диаметра $D(N)$ оптимального графа (для d от d_{min} до d_{max} , на основе данного аналитического описания семейства тестируемых графов, диаметр $d(G)$ вычисляется для каждого $d \equiv i \pmod{m}$, где i, m — заданные параметры):

$$F = \sum_{d_{min} \leq d \leq d_{max}} (d(C(N; 1, s)) - D(N))^2.$$

Данная целевая функция показывает качество аналитического описания графа $G(N; 1, s)$ и используется для получения семейств оптимальных сетей $C(N; 1, s)$.

Рассмотрим операторы алгоритма эволюционного синтеза. Оператор *мутации* применяется к особям, случайно выбранным из текущей популяции с вероятностью $p_m \in [0, 1]$. Мутация состоит в случайном изменении значения параметров Π описания особи на другую, случайно выбранную величину из множества допустимых значений.

Оператор *кроссовера* (скрещивания) применяется к двум особям (родителям), случайно выбранным из текущей популяции с вероятностью $p_c \in [0, 1]$. Кроссовер состоит в порождении двух новых особей путём обмена частями хромосом родителей.

Оператор создания *нового элемента* (особи) состоит в генерации случайных значений параметров шаблонов функций, описывающих семейство графов. Это позволяет добавить элемент случайности при создании популяции.

Оператор *селекции* (отбора) реализует принцип выживания наиболее приспособленных особей. Он выбирает наилучших особей с минимальными диаметрами (описания наилучших семейств графов $C(N; 1, s)$) в текущей популяции.

В алгоритме эволюционного синтеза итерационный процесс вычислений, направленный на поиск оптимума заданной целевой функции F , организован следующим образом. Алгоритм начинается с генерации начальной популяции. Все особи в этой популяции создаются случайно, затем отбираются наилучшие особи и запоминаются. Для создания популяции следующего поколения (следующей итерации), новые особи формируются с помощью генетических операций селекции (отбора), мутации, кроссовера и добавления новых элементов (для сохранения разнообразия популяции). После оценки целевой функции для каждой особи в поколении отбираются лучшие. Итерации заканчиваются либо после исполнения заданного числа шагов

$T = t$, либо после нахождения оптимального семейства графов в данном диапазоне диаметров d . После выполнения данного алгоритма, получается множество функций $s(d)$ и $N(d)$, которые описывают семейство оптимальных (или близких к оптимальным) графов $C(N; 1, s)$.

4. Новые семейства оптимальных двумерных циркулянтов с единичной образующей

На рис. 2 показана зависимость оптимальных образующих s от порядка графа $C(N; 1, s)$. Порядок графа изменяется в диапазоне $N_{d-1} < N \leq N_d$, где $d = 50$. Для каждого значения N , $N_{49} < N \leq N_{50}$, отмечены все его оптимальные образующие, полученные с помощью полного перебора.

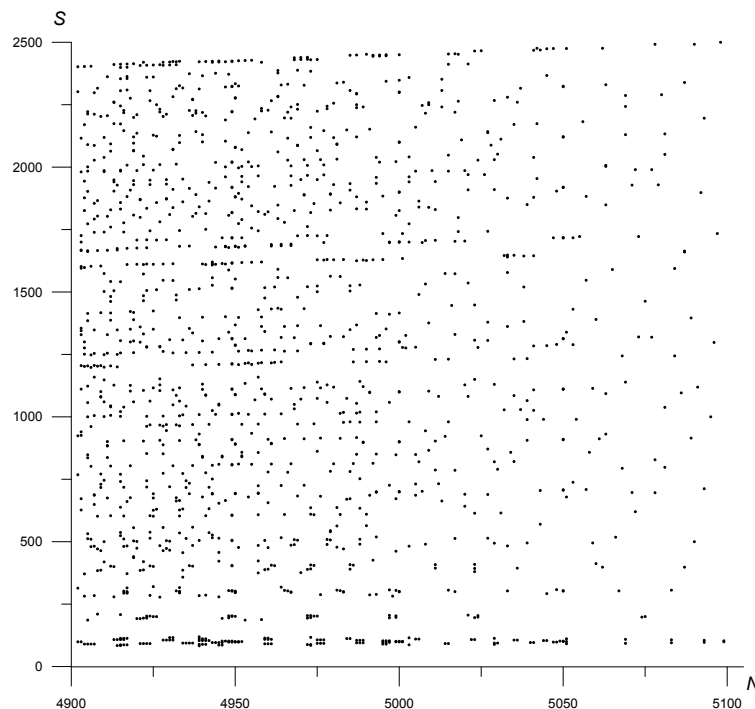


Рис. 2. Зависимость оптимальных образующих s от порядка N графа $C(N; 1, s)$, $4901 < N \leq 5101$

В настоящей работе исследуется нижний диапазон представленных значений образующих s , соответствующий линейным образующим. Семейства оптимальных графов с образующими вида $s = 2d \pm \alpha$, соответствующими нижней линии на рис. 2, исследованы в работах [14, 16, 17, 18]. Линейные образующие с нечётным коэффициентом при d , как было замечено при полном переборе оптимальных описаний для различных N , не дают устойчивых оптимальных семейств на больших диапазонах изменения диаметра. Поэтому на первом этапе применения эволюционного метода к построению оптимальных семейств исследовалось получение бесконечных семейств оптимальных циркулянтов с линейными образующими с чётным коэффициентом при d , большим двух.

Алгоритм эволюционного синтеза семейств был применён для поиска семейств графов оптимальных циркулянтов $C(N; 1, s)$. Предельное число итераций равно 1000, размер популяции равен 100, $p_m=0.15$, $p_c=0.7$, указанные параметры выбирались экспериментальным путём. Диаметр тестируемых циркулянтов менялся на диапазоне от $d = 11$ до $d = 50$. С использованием алгоритма эволюционного синтеза было получено более 70 новых семейств оптимальных двумерных циркулянтов. Описания полученных семейств приведены в таблицах

1 – 4: с образующими видов $s = 4d \pm \alpha$ (табл. 1 и 2) и $s = 6d \pm \alpha$ (табл. 3 и 4). Приведённая на рис. 1 циркулянтная сеть получается, с точностью до изоморфизма, из первого семейства табл. 2 (описание вида $(2d^2; 1, 4d - 1)$) при значении диаметра $d = 3$.

Т а б л и ц а 1. Новые семейства оптимальных двумерных циркулянтов $C(N; 1, s)$ с образующей вида $s = 4d + \alpha$

s	N			
	$d \equiv 0 \pmod{2}$	d_{min}	$d \equiv 1 \pmod{2}$	d_{min}
$4d$	$2d^2 \pm 3d/2$	4	$2d^2 \pm \lceil d/2 \rceil$	3
	$2d^2 - 3d/2 + 1$	4	$2d^2 - \lfloor d/2 \rfloor$	3
$4d + 1$	$2d^2 - d$	4	$2d^2$	3
	$2d^2 - d - 1$	4	$2d^2 + d$	3
$4d + 2$	$2d^2 - d/2$	4	$2d^2 + \lfloor d/2 \rfloor$	3
	$2d^2 - d/2 - 1$	4	$2d^2 + \lceil 3d/2 \rceil$	3
	$2d^2 - 3d/2 - 1$	4		
	$2d^2 - 3d/2 - 2$	8		
$4d + 3$	$2d^2 - 1$	4	$2d^2 + d$	3
	$2d^2 - d - 1$	4		
	$2d^2 - d - 2$	4		
$4d + 4$	$2d^2 + d/2 - 1$	4	$2d^2 + \lfloor 3d/2 \rfloor$	3
	$2d^2 - d/2 - 2$	4	$2d^2 - \lceil 3d/2 \rceil - 2$	9
	$2d^2 - d/2 - 3$	4	$2d^2 - \lceil 3d/2 \rceil - 3$	11
$4d + 5$	$2d^2 - 3$	4	$2d^2 - d - 4$	7
$4d + 7$			$2d^2 - d - 8$	11
$4d + 8$	$2d^2 - 3d/2 - 10$	6	$2d^2 - \lceil d/2 \rceil - 9$	9

Т а б л и ц а 2. Новые семейства оптимальных двумерных циркулянтов $C(N; 1, s)$ с образующей вида $s = 4d - \alpha$

s	N			
	$d \equiv 0 \pmod{2}$	d_{min}	$d \equiv 1 \pmod{2}$	d_{min}
$4d - 1$			$2d^2$	3
			$2d^2 - d$	3
$4d - 2$	$2d^2 + d/2 - 1$	2	$2d^2 - \lfloor d/2 \rfloor$	3
	$2d^2 + 3d/2 - 1$	2	$2d^2 - \lceil d/2 \rceil$	3
			$2d^2 - \lfloor 3d/2 \rfloor$	3
			$2d^2 - \lceil 3d/2 \rceil$	5
$4d - 3$	$2d^2 - 1$	2	$2d^2 - d$	3
$4d - 4$	$2d^2 - d/2 - 2$	4	$2d^2 - \lceil 3d/2 \rceil$	3
	$2d^2 + d/2 - 2$	2	$2d^2 - \lfloor 3d/2 \rfloor$	3
$4d - 6$	$2d^2 - d/2 - 3$	4	$2d^2 + \lfloor d/2 \rfloor - 5$	3
	$2d^2 - 3d/2 - 2$	8		
	$2d^2 - 3d/2 - 3$	10		
$4d - 8$	$2d^2 - 3d/2 - 4$	12	$2d^2 - \lceil d/2 \rceil - 7$	7
	$2d^2 - 3d/2 - 5$	14	$2d^2 + \lfloor d/2 \rfloor - 8$	3
$4d - 9$			$2d^2 - d - 8$	11
$4d - 10$			$2d^2 - \lceil d/2 \rceil - 10$	9
			$2d^2 - \lceil 3d/2 \rceil - 9$	23

После этого для всех найденных семейств оптимальных циркулянтов была проведена проверка на существование на диапазоне диаметров от $d = 2$ до $d = 3000$ (до $N = 18 \cdot 10^6$) с помощью программы анализа структурных характеристик [26]. Результаты проверки отражены в приведённых таблицах. После описания формул для параметра N указаны минимальные значения диаметров d_{min} , начиная с которых существуют полученные описания семейств оптимальных циркулянтов.

Т а б л и ц а 3. Новые семейства оптимальных двумерных циркулянтов $C(N; 1, s)$ с образующей вида $s = 6d + \alpha$

s	N					
	$d \equiv 0 \pmod{3}$	d_{min}	$d \equiv 1 \pmod{3}$	d_{min}	$d \equiv 2 \pmod{3}$	d_{min}
$6d$	$2d^2 - 5d/3$	6	$2d^2 - \lfloor d/3 \rfloor$	4	$2d^2 \pm \lceil d/3 \rceil$	5
	$2d^2 + 5d/3$	3			$2d^2 - \lfloor 5d/3 \rfloor$	5
$6d + 1$	$2d^2 - 4d/3$	6	$2d^2$	4	$2d^2$	5
			$2d^2 + \lceil 2d/3 \rceil$	4	$2d^2 - \lceil 4d/3 \rceil$	5
$6d + 2$	$2d^2 - d$	6	$2d^2 + d$	4	$2d^2 \pm d$	5
	$2d^2 - d - 1$	6	$2d^2 + \lfloor d/3 \rfloor$	4	$2d^2 - d - 1$	5
	$2d^2 - 5d/3 - 1$	9			$2d^2 - \lfloor 5d/3 \rfloor - 1$	5
$6d + 3$	$2d^2 - 2d/3 - 1$	6			$2d^2 - \lceil 4d/3 \rceil - 1$	5
	$2d^2 - 4d/3 - 1$	6			$2d^2 + \lceil 4d/3 \rceil$	5
					$2d^2 - \lfloor 2d/3 \rfloor - 1$	5
					$2d^2 + \lfloor 2d/3 \rfloor$	5
$6d + 4$	$2d^2 - d - 1$	6	$2d^2 + d$	4	$2d^2 - d - 1$	5
	$2d^2 - d - 2$	6	$2d^2 + \lceil 5d/3 \rceil$	4	$2d^2 - d - 2$	5
	$2d^2 - d/3 - 1$	6			$2d^2 - \lceil d/3 \rceil - 1$	5
					$2d^2 + d$	5
$6d + 5$	$2d^2 - 1$	6	$2d^2 + \lfloor 4d/3 \rfloor$	4	$2d^2 - \lfloor 2d/3 \rfloor - 2$	5
	$2d^2 - 2d/3 - 2$	6				
$6d + 6$	$2d^2 - d/3 - 2$	6	$2d^2 - \lceil 5d/3 \rceil - 3$	16	$2d^2 \pm \lceil d/3 \rceil - 2$	5
	$2d^2 - 5d/3 - 3$	15			$2d^2 + \lceil 5d/3 \rceil$	5
	$2d^2 - 5d/3 - 4$	18				
$6d + 7$	$2d^2 - 3$	6	$2d^2 - \lfloor 4d/3 \rfloor - 4$	10	$2d^2 - 3$	5
	$2d^2 - 4d/3 - 4$	9				
$6d + 8$	$2d^2 - d - 5$	9	$2d^2 - \lceil 5d/3 \rceil - 5$	22	$2d^2 + d - 2$	5
	$2d^2 + d/3 - 3$	6	$2d^2 - \lceil 5d/3 \rceil - 6$	25		
	$2d^2 - 5d/3 - 6$	24				

Направления будущих исследований включают синтез оптимальных семейств двумерных циркулянтных сетей с другими линейными и квадратичными образующими, теоретическое исследование и доказательство существования полученных семейств циркулянтных сетей для любых диаметров, получение новых семейств сетей на основе композиции известных структур систем информатики с использованием оптимальных двумерных циркулянтных сетей.

Т а б л и ц а 4. Новые семейства оптимальных двумерных циркулянтов $C(N; 1, s)$ с образующей вида $s = 6d - \alpha$

s	N					
	$d \equiv 0 \pmod{3}$	d_{min}	$d \equiv 1 \pmod{3}$	d_{min}	$d \equiv 2 \pmod{3}$	d_{min}
$6d - 1$			$2d^2$ $2d^2 + \lfloor 4d/3 \rfloor$	4 4	$2d^2$	5
$6d - 2$			$2d^2 - d$ $2d^2 - \lfloor d/3 \rfloor$ $2d^2 + \lceil 5d/3 \rceil - 1$	4 4 4	$2d^2 - d$ $2d^2 - \lceil d/3 \rceil$	5 5
$6d - 3$	$2d^2 + 2d/3 - 1$ $2d^2 + 4d/3 - 1$	3 3	$2d^2 - \lfloor 4d/3 \rfloor$ $2d^2 - \lceil 2d/3 \rceil$	4 4	$2d^2 - \lceil 4d/3 \rceil$ $2d^2 - \lfloor 2d/3 \rfloor$	5 5
$6d - 4$	$2d^2 + d/3 - 1$	3	$2d^2 - \lceil 5d/3 \rceil$ $2d^2 - \lceil 5d/3 \rceil + 1$ $2d^2 + \lfloor d/3 \rfloor - 1$	4 4 4	$2d^2 - d$ $2d^2 - \lfloor 5d/3 \rfloor$	5 5
$6d - 5$			$2d^2 - \lfloor 4d/3 \rfloor$ $2d^2 + \lceil 2d/3 \rceil - 2$	4 4	$2d^2 - \lceil 4d/3 \rceil$	5
$6d - 6$	$2d^2 \pm d/3 - 2$	3	$2d^2 - \lceil 5d/3 \rceil$ $2d^2 \pm \lfloor d/3 \rfloor - 2$	4 4	$2d^2 - \lfloor 5d/3 \rfloor$ $2d^2 - \lceil 5d/3 \rceil - 1$	5 8
$6d - 8$	$2d^2 - d - 2$ $2d^2 - d/3 - 3$	6 3	$2d^2 - \lfloor d/3 \rfloor - 3$	4	$2d^2 + d - 5$	5
$6d - 11$	$2d^2 - 7$ $2d^2 - 4d/3 - 4$	3 9	$2d^2 - \lfloor 4d/3 \rfloor - 4$	10	$2d^2 - 7$	5

Литература

1. Монахова Э. А. Структурные и коммуникативные свойства циркулянтных сетей // Прикладная дискретная математика. 2011, № 3(13). С. 92–115.
2. Bermond J.-C., Comellas F., and Hsu D. F. Distributed loop computer networks: a survey // J. Parallel Distributed Comput. 1995. V. 24. P. 2–10.
3. Hwang F. K. A survey on multi-loop networks // Theoretical Computer Science. 2003. No. 299. P. 107–121.
4. Монахов О. Г., Монахова Э. А. Исследование топологических свойств регулярных параметрически описываемых структур вычислительных систем // Автометрия. 2000. № 2. С. 70–82.
5. Martinez C., Beivide R., Stafford E., et al. Modeling toroidal networks with the gaussian integers // IEEE Trans. Comput. 2008. V. 57. No. 8. P. 1046–1056.
6. Comellas F., Mitjana M., and Peters J. G. Broadcasting in Small-World Communication Networks // 9th Inter. Coll. on Structural Information and Communication Complexity (SIROCCO 9), 2002. Proc. Informatics. 2002. No. 13. P. 73–85.
7. Demichev A., Ilyin V., Kryukov A., Polyakov S. A Quality and cost approach for the comparison of small-world interconnection networks // Journal of Interconnection Networks. 2013. 14:02.
8. Нестеренко Б. Б., Новотарский М. А. Клеточные нейронные сети на циркулянтных графах // Искусственный интеллект. 2009. № 3. С. 132–138.
9. Монахова Э. А. Об аналитическом описании оптимальных двумерных диофантовых структур однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. Вопросы теории и построения ВС. Новосибирск, 1981. № 90. С. 81–91.

10. *Chen B.-X., Meng J.-X., and Xiao W.-J.* Some new optimal and suboptimal infinite families of undirected double-loop networks // DMTCS. 2006. No. 8. P. 299–312.
11. *Chen B.-X., Meng J.-X., and Xiao W.-J.* A Constant Time Optimal Routing Algorithm for Undirected Double-Loop Networks // First Int. Conf. Mobile Ad-hoc and Sensor Networks. MSN 2005, Wuhan, China, December 2005. P. 309–316.
12. *Jha P.K.* Dimension-order routing algorithms for a family of minimal-diameter circulants // J. Interconnection Networks. 2013. V. 14. No. 1. 1350002 (24 pages).
13. *Монахова Э. А.* Синтез оптимальных диофантовых структур // Вычислительные системы. Вопросы теории и построения ВС. Новосибирск, 1979. № 80. С. 18–35.
14. *Du D.-Z., Hsu D. F., Li Q., and Xu J.* A combinatorial problem related to distributed loop networks // Networks. 1990. No. 20. P. 173–180.
15. *Monakhova E. A.* Optimal circulant computer networks // Inter. Conf. “Parallel Computing Technologies”, Novosibirsk, USSR; World Scientific, Singapore, 1991. P. 450–458.
16. *Tzvieli D.* Minimal diameter double-loop networks. 1. Large infinite optimal families // Networks. 1991. No. 21. P. 387–415.
17. *Jha P.K.* Dense bipartite circulants and their routing via rectangular twisted torus // Discrete Appl. Math., In the press. (<http://web.stcloudstate.edu/pkjha/rtt6a.pdf>), July 2013.
18. *Jha P.K.* Tight-optimal circulants vis-a-vis twisted tori // Discrete Appl. Math., (Manuscript Draft October 2013).
19. *Jha P.K., Smith J. D. H.* Cycle Kronecker products that are representable as optimal circulants // Discrete Appl. Math., (Manuscript Draft August 2013).
20. *Chen B.-X., Xiao W.-J., and Parhami B.* Diameter formulas for a class of undirected double-loop networks // J. Interconnection Networks. 2005. V. 6. No. 1. P. 1–15.
21. *Monakhova E. A.* On existence of optimal double-loop computer networks // Bulletin of the Novosibirsk Computing Center, Computer Science series, issue 6, 1997, P. 29–44.
22. *Монахов О. Г.* Эволюционный синтез алгоритмов на основе шаблонов // Автометрия. Новосибирск, 2006. Т. 42. № 1. С. 116–126.
23. *Монахов О. Г., Монахова Э. А.* Синтез новых семейств оптимальных регулярных сетей на основе эволюционных вычислений и шаблонов функций // Автометрия. 2004. Т. 40, № 4. С. 106–116.
24. *Monakhov O. G., Monakhova E. A.* Computer Discovery of Analytical Descriptions of Families of Circulant Networks // 6th Inter. Conf. on Soft Computing and Measurements, (SCM’2003), July 25–27, 2003, St.-Petersburg, Russia. V. 1. P. 345–348.
25. *Monakhov O. G., Monakhova E. A.* An Algorithm for Discovery of New Families of Optimal Regular Networks // Lecture Notes in Artificial Intelligence. 2003. V. 2843. P. 244–254.
26. *Монахов О. Г., Монахова Э. А.* Свидетельство об официальной регистрации программ на ЭВМ № 2013619128 «Программа вычисления характеристик регулярных графов с параметрическим описанием» // М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам, 2013.

*Статья поступила в редакцию 5.05.2014;
переработанный вариант – 19.05.2014.*

Монахова Эмилия Анатольевна

канд. техн. наук, доцент, старший научный сотрудник, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (630090, Новосибирск, Лаврентьева пр., 6), тел. (383)3011489, e-mail: emilia@rav.sscs.ru.

Монахов Олег Геннадьевич

канд. техн. наук, ведущий научный сотрудник, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (630090, Новосибирск, Лаврентьева пр., 6), тел. (383)3011489, e-mail: monakhov@rav.sscs.ru

Evolutionary synthesis of optimal two-dimensional circulant networks families

Monakhova E.A., Monakhov O.G.

Solution of the optimization problem of constructing optimal diameter two-dimensional circulant networks families is investigated. Circulant networks provide a practical interest as graph-theoretical models of reliable communication networks of parallel supercomputer systems, as basis of structures in the model of the «small world networks», in neural and optical networks. The developed approach uses evolutionary algorithms for an automatic generation of analytic (described by formulas) parametric descriptions of networks families. Evolutionary synthesis algorithm combines the advantages of genetic algorithms and genetic programming and is based on evolutionary computation, template solutions and a set of experimental data. More than 70 new families of optimal two-dimensional circulant networks with unit generator, obtained by the evolutionary algorithm, are presented.

Keywords: undirected double-loop networks, diameter, evolutionary algorithms.