

Ограничение динамического диапазона в цифровых фильтрах при представлении чисел в формате с фиксированной запятой

Е.В. Дежина, Ю.В. Рясный, Ю.С. Черных

Рассмотрены методы определения масштабирующих множителей при ограничении максимума амплитуды, при ограничении максимума модуля спектра, при ограничении среднего значения модуля спектра и при ограничении мощности (или энергии) входного сигнала.

Ключевые слова: передаточная функция, импульсная характеристика, цифровой фильтр, узлы ветвления, спектр, мощность, энергия, напряжение, диапазон изменения сигнала.

1. Введение

Задача анализа переполнения разрядной сетки регистров умножителей и сумматоров относится к весьма сложным вопросам, поскольку переполнение может быть вызвано (имеется в виду только формат с фиксированной запятой) как большим входным сигналом и суммированием большого количества чисел, так и большими значениями коэффициентов фильтра. Легче решается задача устранения переполнения из-за большого входного сигнала при известных коэффициентах фильтра или, наоборот, при известном малом (меньше единицы) входном сигнале и больших коэффициентах фильтра, приводящих к переполнению регистров умножителей и сумматоров; она изложена в [1]. Теоретические основы некоторых методов масштабирования, позволяющих и предотвратить переполнения, и в то же время сохранить максимально возможное отношение сигнала к шуму округления, кратко изложены в [1, 2, 3]. Однако некоторые вопросы определения масштабирующих множителей звеньев для каскадной формы фильтра рассмотрены недостаточно подробно, что вызывает определённые трудности при разработке фильтров. В данной статье на основе как известных, так и полученных результатов исследований дан сравнительный анализ методов масштабирования и приведены формулы для расчёта масштабирующих множителей. В статье рассмотрены примеры определения масштабирующих множителей.

2. Постановка задачи

Пусть имеется рекурсивный фильтр $2M$ -го порядка, состоящий из M -звеньев 2-го порядка (рис. 1)

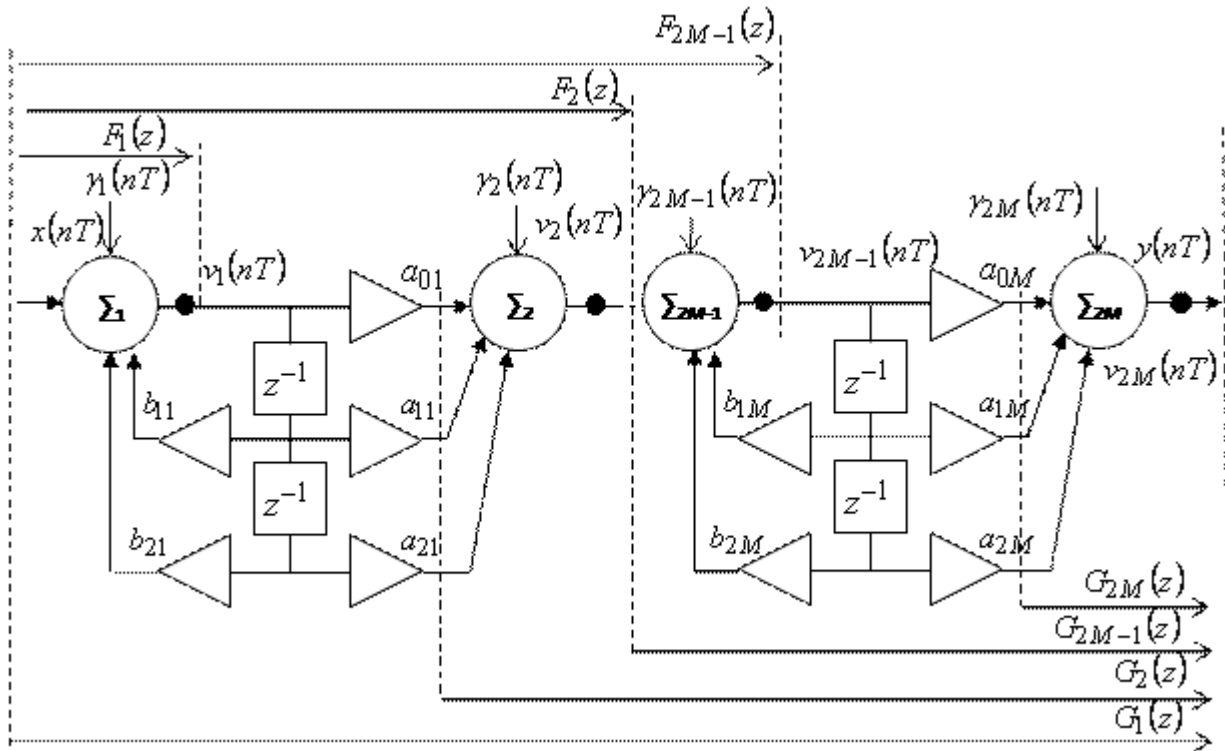


Рис.1. Рекурсивный фильтр 2M-го порядка

Здесь $G_1(z), \dots, G_{2M}(z)$ – передаточные функции для сигналов $\gamma_1(nT), \dots, \gamma_{2M}(nT)$, которые являются шумами, обусловленные округлением результатов операций умножений в регистрах умножителей, подключённых соответственно к 1-му и 2M-му сумматорам; $F_1(z), F_2(z), \dots, F_{2M-1}(z)$ – функции передачи от входа фильтра до выхода соответственно 1-го, 2-го, ..., 2M-1-го узлов разветвления; $v_1(nT), v_2(nT), \dots, v_{2M}(nT)$ – сигналы, выходящие из 1-го, 2-го, ..., 2M-го узлов разветвления.

Передаточная функция фильтра имеет вид

$$H(z) = \prod_{i=1}^M \frac{a_{0i} + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}{b_{0i} + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}}. \quad (1)$$

Необходимо определить масштабирующие множители на входе каждого звена при ограничении максимума амплитуды, при ограничении максимума модуля спектра, при ограничении среднего значения модуля спектра и при ограничении мощности (или энергии) входного сигнала.

3. Теория

3.1. Оценка диапазона изменения сигнала в цифровом фильтре

Для решения задачи масштабирования необходимо знать диапазон изменения сигнала как на выходе фильтра, так и в любой точке фильтра.

Если входной сигнал $x(nT)$ удовлетворяет условию

$$\max_{n \geq 0} |x(nT)| \leq 1, \quad (2)$$

то диапазон изменения сигнала на выходе l-го сумматора ($l = 0, 1, 2, \dots, L$) определяется по формуле [3]

$$V_l(nT) = \max_{n \geq 0} |v_l(nT)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_l(nT)|, \quad (3)$$

причём $V_0(nT) = 1$ (вход фильтра считаем выходом нулевого сумматора, $l = 0$).

Диапазон изменения сигнала в произвольной k -ой точке фильтра определяется по формуле [3]

$$V_{l,k}(nT) = \max_{n \geq 0} |v_{l,k}(nT)| \leq \alpha_{l,k} V_l(nT), \quad (4)$$

где $v_{l,k}$ – сигнал на выходе l -го сумматора (при $k = 0$) или k -го умножителя, подключённого к выходу l -го сумматора ($k = 1, 2, \dots, K$), $\alpha_{l,k}$ – коэффициент k -го умножителя, причём $\alpha_{l,0} = 1$. Таким образом, диапазон изменения сигналов в цифровом фильтре определяется следующей зависимостью [4]

$$V(nT) = \max_{l,k} \max_{n \geq 0} |v_{l,k}(nT)| \leq \max_{l,k} \left(\alpha_{l,k} \sum_{n=0}^{\infty} |f_l(nT)| \right). \quad (5)$$

В работе [1] для определения масштабирующих множителей получено неравенство общего вида

$$|v_k(n)| \leq \|F_k(\exp(j\omega))\|_{L_p} \|X(\exp(j\omega))\|_{L_q}, \quad (6)$$

где L_p и L_q – нормированные пространства, причём

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q \geq 1. \quad (7)$$

Для спектральных величин, неравенство (7) можно записать в виде

$$\|V_k(\exp(j\omega))\|_1 \leq \|F_k(\exp(j\omega))\|_{L_p} \|X(\exp(j\omega))\|_{L_q}, \quad (8)$$

где $\|V_k(\exp(j\omega))\|_1$ – среднее значение модуля спектра $V_k(\exp(j\omega))$ сигнала $v_k(n)$ в k -ой точке разветвления.

Из неравенств (6) и (8) следует, что среднее значение модуля $\|V_k(\exp(j\omega))\|_1$ ограничено величиной произведения $\|F_k(\exp(j\omega))\|_{L_p} \|X(\exp(j\omega))\|_{L_q}$, которая в то же время является ограничением и для $|v_k(n)|$ [1].

Значения p и q могут быть любыми в интервале $[1; \infty)$ в соответствии с уравнением (7). На практике нашли применение следующие значения p и q : $p = 1$, $q = \infty$; $p = 2$, $q = 2$; $p = \infty$, $q = 1$.

Прежде чем приступить к определению масштабирующих множителей на основе уравнения (6), сделаем ряд поясняющих замечаний.

Замечание 1. Если $p = 1$ и $q = \infty$, то в этом случае при известном максимуме модуля спектра входного сигнала ограничивается норма частотной характеристики $F_k(\exp(j\omega))$ в пространстве L_1 . Если $p = 2$ и $q = 2$, то в этом случае при известной мощности (или энергии) входного сигнала ограничивается норма частотной характеристики $F_k(\exp(j\omega))$ в пространстве L_2 (ограничивается «мощность» (или «энергия») частотной характеристики). Если $p = \infty$ и $q = 1$, то в этом случае при известном среднем значении модуля спектра входного сигнала ограничивается норма частотной характеристики $F_k(\exp(j\omega))$ в пространстве L_1 (ограничивается максимум модуля спектра импульсной характеристики).

Замечание 2. Если $|F_k(\exp(j\omega))| = 1$ (АЧХ равна единице), то норма $\|F_k(\exp(j\omega))\|_p = 1$ при любом $p \geq 1$, и в этом частном случае соотношение (6) принимает вид

$$|v_k(n)| = x(n) \leq \|X(\exp(j\omega))\|_q = \|V_k(\exp(j\omega))\|_q, \quad q \geq 1. \quad (9)$$

Замечание 3. Из неравенств (6) и (8) следует, что среднее значение модуля спектра $V_k(\exp(j\omega))$ ограничено значением произведения $\|F_k(\exp(j\omega))\|_1 \|X(\exp(j\omega))\|_\infty$, которое в то же время является и ограничением и для модуля сигнала $|v_k(n)|$.

Ограничение значения энергии $\|V_k(\exp(j\omega))\|_2^2$ сигнала $v_k(n)$ в k -ой точке разветвления можно получить, применяя неравенства Шварца и теорему Парсеваля [2]

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |v_k(n)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_k(\exp(j\omega))X(\exp(j\omega))|^2 d\omega = \|V_k(\exp(j\omega))\|_2^2 \leq \|F_k(\exp(j\omega))\|_2^2 \|X(\exp(j\omega))\|_2^2 = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |x_k(n)|^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_k(\exp(j\omega))|^2 d\omega \end{aligned} \quad (10)$$

Замечание 4. Если входные сигналы являются случайными, тогда неравенства (8) и (9) применять нельзя, так как для случайных процессов преобразование Фурье не определено. В этом случае вместо неравенства (6) используется эквивалентное неравенство, записанное относительно корреляционной функции $R_{v_k}(n)$, а вместо неравенства (8) используется эквивалентное неравенство, записанное относительно спектральной плотности мощности $W_{v_k}(\exp(j\omega))$ сигнала $v_k(n)$ в k -ом узле. Пусть, например, $x(n)$ – входной случайный сигнал с корреляционной функцией R_x и спектральной плотностью мощности $W_x(\exp(j\omega))$, и пусть $v_k(n)$ – случайный сигнал, образующийся в k -м узле разветвления и имеющий корреляционную функцию $R_{v_k}(n)$ и спектральную плотность мощности $W_{v_k}(\exp(j\omega))$. Поскольку корреляционная функция $R_{v_k}(n)$ равна

$$R_{v_k}(nT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} W_{v_k}(\exp(j\omega)) \exp(j\omega nT) d\omega, \quad (11)$$

то, учитывая, что

$$W_{v_k}(\exp(j\omega)) = W_x(\exp(j\omega)) |F_k(\exp(j\omega))|^2, \quad (12)$$

где $|F_k(\exp(j\omega))|^2$ – квадрат модуля спектра импульсной характеристики от входа до k -го узла разветвления, можно записать [1]

$$R_{v_k}(n) \leq \|F_k^2(\exp(j\omega))\|_{Lp} \|W_x(\exp(j\omega))\|_{Lq}, \quad (13)$$

причём $1/p + 1/q = 1$.

Заметим, что дисперсия случайного сигнала $v_{kv}(n)$ в k -ом узле разветвления ограничена в соответствии с выражением (13). Например, если $p = 1$, $q = \infty$, а входной сигнал имеет равномерный энергетический спектр, то есть $\|W_x(\exp(j\omega))\|_\infty = \sigma_x^2$, то из формулы (13) следует [1], что

$$\sigma_{vk}^2 \leq \sigma_x^2 \left\| F_k^2(\exp(j\omega)) \right\|_1 = \sigma_x^2 \left\| F_k(\exp(j\omega)) \right\|_2. \quad (14)$$

Из формулы (14) видно, что для выполнения соотношения $\sigma_{vk}^2 \leq \sigma_x^2$ необходимо, чтобы норма $\left\| F_k(\exp(j\omega)) \right\|_2$ была меньше или равна единице $\left\| F_k(\exp(j\omega)) \right\|_2 \leq 1$, то есть, чтобы «энергия» масштабированной передаточной функции была ограничена значением, равным единице.

3.2. Расчёт масштабирующих множителей при ограничении максимума амплитуды входного сигнала

Для пояснения метода расчёта и основных идей используем линейную модель фильтра второго порядка в канонической форме с источниками шума, содержащего три узла разветвления и два узла суммирования (рис. 2).

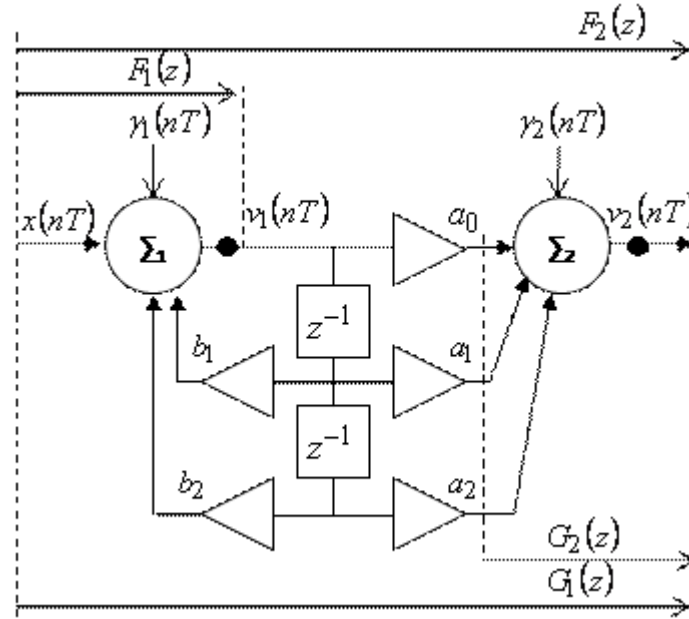


Рис. 2. Каноническая форма фильтра второго порядка

Здесь $G_1(z), G_2(z)$ – передаточные функции для сигналов $\gamma_1(nT)$ и $\gamma_2(nT)$, которые являются шумами, обусловленные округлением результатов операций умножений в регистрах умножителей, подключённых соответственно к 1-му и 2-му сумматорам; $F_1(z), F_2(z)$ – функции передачи от входа фильтра до выхода соответственно 1-го и 2-го узлов разветвления; $v_1(nT), v_2(nT)$ – сигналы, выходящие из первого и второго узлов разветвления. Запишем выражения для $F_1(z), F_2(z), H(z), G_1(z), G_2(z)$:

$$F_1(z) = \frac{1}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}, \quad (15)$$

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}, \quad (16)$$

$$G_1(z) = H(z) = F_2(z), \quad (17)$$

$$G_2(z) = 1. \quad (18)$$

Задача состоит в том, чтобы с помощью этой модели найти метод масштабирования последовательностей $v_1(n), v_2(n)$ (в общем случае $v_l(n)$), гарантирующий отсутствие переполнений в любом из узлов суммирования (на выходе l -го сумматора).

Положим, что при нулевых начальных условиях и отсутствии шума округления выходная последовательность на выходе l -го сумматора ($l = 1, 2, \dots, L$), которая определяется по формуле линейной дискретной свёртки, должна быть меньше или равна 1

$$v_l(n) = \sum_{m=0}^{\infty} f_l(m)x(n-m) \leq 1, \quad (19)$$

где $f_l(m)$ – импульсная характеристика части фильтра от входа фильтра до выхода l -го сумматора. Масштабирующие множители λ_l должны гарантировать выполнение условия (19).

Поскольку $\max_{u \geq 0} |x(nT)| \leq 1$, то

$$V_j = \max_{n \geq 0} |v_l(nT)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_l |f_l(mT)| = \sum_{m=0}^{\infty} |f_l'(mT)|. \quad (20)$$

Поэтому для выполнения неравенства $V_l(nT) = \max_{n \geq 0} |v_l(nT)| \leq 1$ достаточно, чтобы масштабированная последовательность $f_l'(mT)$ удовлетворяла соотношению

$$\sum_{m=0}^{\infty} |f_l'(mT)| \leq 1. \quad (21)$$

Условие (21) является необходимым условием справедливости неравенства $|v_l(nT)| \leq 1$ при любых n . При этом условии значение масштабирующего множителя λ_l определяется из выражения

$$\lambda_l \leq \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} |f_l(mT)|}. \quad (22)$$

Выходная последовательность в любой k -ой точке фильтра при нулевых начальных условиях и отсутствии шума округления определяется по формуле (4), и чтобы максимальное значение сигнала не превышало единицы, масштабирующий множитель должен быть равен

$$\lambda_{l,k} \leq \frac{1}{\alpha_{l,k} \sum_{m=0}^{\infty} |f_l(mT)|} = \frac{1}{\alpha_{l,k} V_l(nT)}. \quad (23)$$

Ограничивая единицей максимальное значение сигналов, определяемое по формуле (5), найдём масштабирующий множитель для этого случая

$$\lambda_{l,k} \leq \frac{1}{\max_{l,k} \left(\alpha_{l,k} \sum_{m=0}^{\infty} |f_l(mT)| \right)}. \quad (24)$$

Если входной сигнал не удовлетворяет условию $\max_{n \geq 0} |x(nT)| \leq 1$, то нужно умножить входной сигнал на масштабирующий множитель на входе системы так, чтобы произведение $\lambda \cdot \max_{n \geq 0} |x(nT)|$ удовлетворяло неравенству $\lambda \cdot \max_{n \geq 0} |x(nT)| \max_k \left[\sum_{n=0}^{\infty} |f_k(nT)| \right] \leq 1$ для всех узлов разветвления [2].

При этом масштабирующий множитель определяется из уравнения вида

$$\lambda \leq \frac{1}{\max_{n \geq 0} |x(nT)| \cdot \max_k \left[\sum_{n=0}^{\infty} |f_k(nT)| \right]}. \quad (25)$$

Формулы (22) и (25) определяют масштабирующие множители с большим запасом, уменьшая при этом отношение сигнал/шум. Кроме того, в большинстве случаев просуммировать ряд $\sum_{m=0}^{\infty} |f_l(mT)|$ для рекурсивных фильтров очень трудно, поэтому разработаны более удобные методы масштабирования, основанные на некоторых допущениях о входных сигналах, например, об ограниченности мощности или модуля спектров сигналов [1].

Замечание. Отношения сигнала к шуму на выходе фильтра при отсутствии масштабирующего множителя и при наличии масштабирующего множителя находим следующим образом. Предположим, что к l -му узлу суммирования подключены k_l источников шума (для приведённой схемы $k_1 = 3$, $k_2 = 4$) и каждый из них создаёт шум со спектральной плотностью мощности $W_k(\omega)$, равной дисперсии $\sigma_{\text{ок}}^2$ шума округления результата умножения. Согласно предположению о некоррелированности шумовых источников, шум $\gamma_l(nT)$ также будет белым и будет иметь спектральную плотность $W_l(\omega)$, равную дисперсии $\delta_{\text{вых}}^2$. Шум на выходе l -го сумматора равен

$$W_l(\omega) = \sigma_{\text{вых}}^2 = k_l \sigma_{\text{ок}}^2 = k_l \frac{\Delta^2}{12}, \quad (26)$$

где Δ – шаг квантования ($\Delta = 2^{-b}$), k_l – количество источников шума, подключённых к l -му сумматору.

Спектральная плотность мощности выходного шума равна

$$W_{\text{вых}}(\omega) = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{l=1}^L k_l |G_l(\exp(j\omega))|^2, \quad (27)$$

где L – количество сумматоров, $G_l(\exp(j\omega))$ – частотная характеристика для l -го шума.

Если в фильтре произведено масштабирование (масштабированные переменные будут отмечаться штрихом), то формула (27) примет вид

$$W_{\text{вых}}(\omega) = \frac{\Delta^2}{12} \sum_{l=1}^{L'} k_l' |G_l'(\exp(j\omega))|^2, \quad (28)$$

причём $k_l' \geq k_l$, так как умножение на масштабирующие множители является дополнительным источником шума.

3.3. Масштабирование при ограничении максимума модуля спектра входного сигнала

Пусть входная последовательность $x(n)$ является детерминированной последовательностью с z -преобразованием $X(z)$. Найдём выходной сигнал v_k k -го узла с помощью обратного преобразования Фурье от произведения преобразований Фурье последовательностей $f_k(n)$ и $x(n)$

$$v_k(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_k(\exp(j\omega)) X(\exp(j\omega)) \exp(j\omega n) d\omega. \quad (29)$$

Масштабирующий множитель находим из неравенства общего вида (6)

$$|v_k(n)| \leq \|F_k(\exp(j\omega))\|_{L_p} \|X(\exp(j\omega))\|_{L_q}, \quad (30)$$

в котором положим, что $q = \infty$; тогда, учитывая соотношение (7), имеем $p = 1$. В этом случае выражение (30) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
|v_k(n)| &\leq \|F_k(\exp(j\omega))\|_1 \|X(\exp(j\omega))\|_\infty = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_k(\exp(j\omega))| d\omega \right] \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\exp(j\omega))|^p d\omega \right]^{\frac{1}{p}} = \\
&= \max_{-\pi \leq \omega \leq \pi} |X(\exp(j\omega))| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_k(\exp(j\omega))| d\omega
\end{aligned} \tag{31}$$

где $\max_{-\pi \leq \omega \leq \pi} |X(\exp(j\omega))|$ – максимальное значение модуля спектра входного сигнала на какой-либо частоте, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_k(\exp(j\omega))| d\omega$ – среднее значение модуля спектра импульсной характеристики от входа фильтра до k -ого узла разветвления. Если норма преобразования Фурье входного сигнала в пространстве L_∞ ограничена и не превышает единицы

$$\|X(\exp(j\omega))\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\exp(j\omega))|^p d\omega \right]^{\frac{1}{p}} = \max_{-\pi \leq \omega \leq \pi} |X(\exp(j\omega))| \leq 1, \tag{32}$$

то есть максимум модуля спектра входного сигнала конечен и не больше единицы, тогда норма масштабированного спектра $F_k'(\exp(j\omega))$ в пространстве L_1 в любом k -ом узле должна удовлетворять условию

$$\|F_k'(\exp(j\omega))\|_1 = \lambda_k \|F_k(\exp(j\omega))\|_1 = \lambda_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_k(\exp(j\omega))| d\omega \leq 1, \tag{33}$$

где λ_k – масштабирующий множитель.

Масштабирующий множитель λ_k в этом случае определяется по формуле

$$\lambda_k \leq \frac{1}{\|F_k(\exp(j\omega))\|_1} = \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_k(\exp(j\omega))| d\omega}. \tag{34}$$

Если норма преобразования Фурье входного сигнала в пространстве L_∞ не удовлетворяет условию (32), тогда масштабирующий множитель определяют по формуле

$$\lambda_k \leq \frac{1}{\max_{-\pi \leq \omega \leq \pi} |X(\exp(j\omega))| \cdot \|F_k(\exp(j\omega))\|_1} = \frac{1}{\max_{-\pi \leq \omega \leq \pi} |X(\exp(j\omega))| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_k(\exp(j\omega))| d\omega}. \tag{35}$$

3.4. Масштабирование при ограничении мощности (или энергии) входного сигнала

Пусть входная последовательность $x(n)$ является детерминированной последовательностью с z -преобразованием $X(z)$. Масштабирующий множитель находим из неравенства общего вида (6), в котором положим, что $q = 2$ и $p = 2$. В этом случае выражение (30) можно записать в виде

$$|v_k(n)| \leq \|F_k(\exp(j\omega))\|_2 \|X(\exp(j\omega))\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_k(\exp(j\omega))|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\exp(j\omega))|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_k(\exp(j\omega))|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (36)$$

где $\sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|^2$ – мощность (или энергия) входного сигнала, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_k(\exp(j\omega))|^2 d\omega$ – «мощность» (или «энергия») импульсной характеристики от входа фильтра до k -го узла разветвления. Для определения масштабирующего множителя вместо уравнения (36) используется уравнение, полученное на основе уравнения (31), используя неравенство Шварца и теорему Парсеваля в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_k^2(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_k(\exp(j\omega))X(\exp(j\omega))|^2 d\omega \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_k(\exp(j\omega))|^2 d\omega. \quad (37)$$

Чтобы мощность (или энергия) сигнала в k -ом узле разветвления была меньше мощности (или энергии) входного сигнала $\sum_{n=0}^{\infty} |v(n)|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|^2$, необходимо умножить последовательность $x(n)$ на такой множитель λ , чтобы выполнялось неравенство вида

$$\lambda_k^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_k(\exp(j\omega))|^2 d\omega \leq 1. \quad (38)$$

Масштабирующий множитель λ_k в этом случае определяется по формуле [2]

$$\lambda_k^2 \leq \frac{1}{\|F_k(\exp(j\omega))\|_2^2} = \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_k(\exp(j\omega))|^2 d\omega} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} |f_k(n)|^2}. \quad (39)$$

Замечание. Поскольку $\left[\sum_{n=0}^{\infty} |f_k(n)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \max_{k,\omega} |F_k(\exp(j\omega))| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_k(n)|$, то формулы (34), (35), (39) дают большее отношение сигнала к шуму по сравнению с формулами (22) и (25) [2].

3.5. Масштабирование при ограничении среднего значения модуля спектра входного сигнала

Пусть входная последовательность $x(n)$ является детерминированной последовательностью с z -преобразованием $X(z)$. Масштабирующий множитель находим из неравенства общего вида (6), в котором положим, что $q=1$ и $p=\infty$. В этом случае выражение (30) можно записать в виде

$$|v_k(n)| \leq \|F_k(\exp(j\omega))\|_{\infty} \|X(\exp(j\omega))\|_1 = \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_k(\exp(j\omega))|^p d\omega \right]^{\frac{1}{p}} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\exp(j\omega))| d\omega \right] =$$

$$\max_{-\pi \leq \omega \leq \pi} |F_k(\exp(j\omega))| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\exp(j\omega))| d\omega$$

где $\max_{-\pi \leq \omega \leq \pi} |F_k(\exp(j\omega))|$ – максимальное значение модуля спектра импульсной характеристики от входа фильтра до k -го узла разветвления на какой-либо частоте,

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\exp(j\omega))| d\omega$ – среднее значение модуля спектра входного сигнала. Если норма преобразования Фурье входного сигнала в пространстве L_1 ограничена и не превышает единицы

$$\|X(\exp(j\omega))\|_1 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\exp(j\omega))| d\omega \right] \leq 1, \quad (41)$$

то есть среднее значение модуля спектра входного сигнала конечно и не больше единицы, тогда норма масштабированного спектра $F_k'(\exp(j\omega))$ в пространстве L_∞ должна удовлетворять условию

$$\begin{aligned} \|F_k'(\exp(j\omega))\|_\infty &= \lambda_k \|F_k(\exp(j\omega))\|_\infty = \lambda_k \lim_{p \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_k(\exp(j\omega))|^p d\omega \right]^{\frac{1}{p}} =, \\ &= \lambda_k \max_{-\pi \leq \omega \leq \pi} |F_k(\exp(j\omega))| \leq 1 \end{aligned} \quad (42)$$

где λ_k – масштабирующий множитель.

Масштабирующий множитель λ_k в этом случае определяется по формуле

$$\lambda_k \leq \frac{1}{\|F_k(\exp(j\omega))\|_\infty} = \frac{1}{\max_{-\pi \leq \omega \leq \pi} |F_k(\exp(j\omega))|}. \quad (43)$$

При каскадном соединении звеньев с целью увеличения отношения сигнала к шуму масштабирующие множители следует устанавливать на входе каждого звена независимо от того, каким методом определяются масштабирующие множители. Масштабирующий множитель второго звена рассчитывается с учётом того, что на входе первого звена уже имеется масштабирующий множитель, и так далее. Например, пусть при ограничении максимума амплитуды входного сигнала выполняется неравенство

$$\max_{n \geq 0} |x(nT)| \leq 1.$$

Масштабирующий множитель на входе первого звена определяется по формуле

$$\lambda_1 \leq \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} |f_1(mT)|}, \quad (44)$$

где $f_1(mT)$ – импульсная характеристика от входа фильтра до узла разветвления первого звена.

Масштабирующий множитель на входе второго звена будет определяться по формуле

$$\lambda_2 \leq \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} |f_2^1(mT)|}, \quad (45)$$

где $f_2^1(mT)$ – импульсная характеристика от входа фильтра до узла разветвления второго звена с учётом масштабирующего множителя λ_1 первого звена.

Масштабирующий множитель на входе k -го звена будет определяться по формуле

$$\lambda_k \leq \frac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} |f_k^1(mT)|}, \quad (46)$$

где $f_k^1(mT)$ – импульсная характеристика от входа фильтра до узла разветвления k -го звена с учётом масштабирующих множителей $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$ первого, второго и т.д. $(k-1)$ -го звеньев.

4. Пример применения полученных формул

Пусть для схемы рис. 2 передаточная функция фильтра имеет вид (БИХ-фильтр нижних частот второго порядка)

$$H(z) = \frac{a_1 z^{-1}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}} = \frac{0.099 z^{-1}}{1 - 1.5016 z^{-1} + 0.6016 z^{-2}}. \quad (47)$$

Представим схему фильтра с учётом шумов и масштабирующих множителей в канонической форме в соответствии с передаточной функцией.

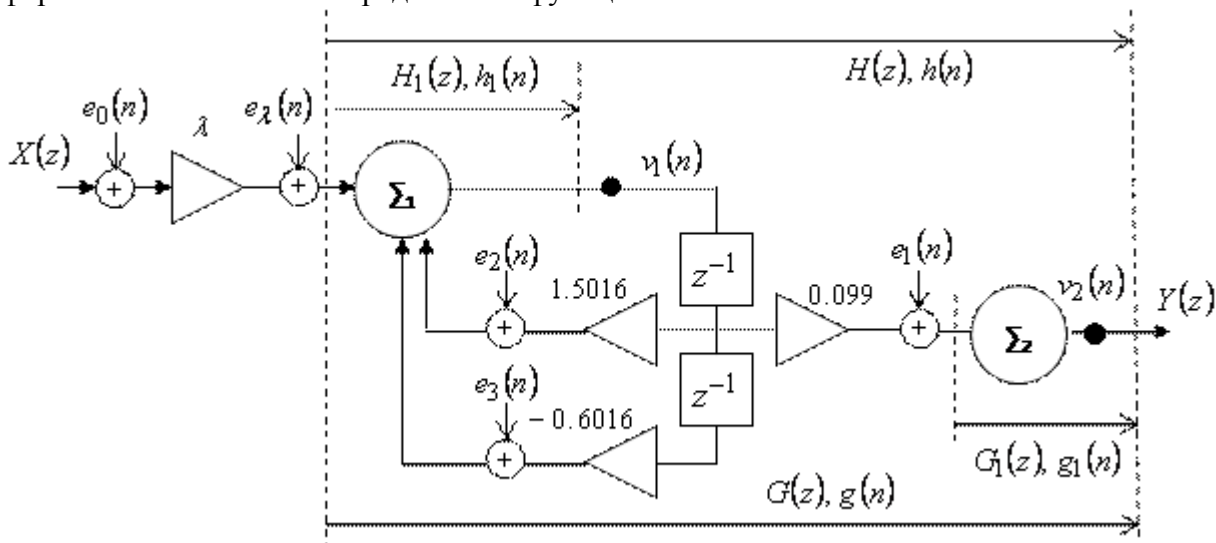


Рис.3. Схема БИХ-фильтра в канонической форме

Здесь: $H(z), h(n)$ – соответственно передаточная функция и импульсная характеристики фильтра (от входа фильтра до второго узла разветвления); $H_1(z), h_1(n)$ – соответственно передаточная функция и импульсная характеристики части фильтра (от входа фильтра до первого узла разветвления); $G(z), g(n)$ – соответственно передаточная функция и импульсная характеристики части фильтра (от входа 1-го сумматора до выхода фильтра – до второго узла разветвления); λ – масштабирующий множитель; $G_1(z), g_1(n)$ соответственно передаточная функция и импульсная характеристики части фильтра (от входа 2-го сумматора до выхода фильтра); $e_0(n), e_\lambda(n), e_1(n), e_2(n), e_3(n)$ – источники шума соответственно АЦП, масштабирующего множителя и умножителей. Полагаем, что разрядность входного сигнала равна 8, а разрядность умножителей и сумматоров равна 12. Кроме того, полагаем, что на вход фильтра подаётся синусоидальный сигнал с амплитудой a , равной единице, тогда $|x(n)| \leq 1$.

Отношение сигнал/шум на входе фильтра определяется выражением вида

$$R_{\text{швх}} = 10 \times \log \frac{P_{\text{свх}}}{P_{\text{швх}}} = 10 \times \log \frac{a^2}{2 P_{\text{швх}}} = 10 \times \log \left(\frac{1^2}{2} \cdot \frac{12}{2^{-16}} \right) = 55.95 \text{ дБ},$$

где мощность шума квантования входного сигнала определена по формуле [3]

$$P_{\text{швх}} = \sigma_{\text{швх}}^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{2^{-16}}{12}.$$

Определяем мощность шума на выходе фильтра по формуле [3]

$$P_{\text{швых}} = \sigma_{\text{швых}}^2 = \frac{\Delta_0^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|^2 + \sum_{l=1}^L K_j \frac{\Delta_j^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|^2 + \frac{\Delta_1^2}{12} =$$

$$= \frac{2^{-16}}{12} \cdot 0.1271 + 2 \frac{2^{-24}}{12} \cdot 0.1271 + \frac{2^{-24}}{12} = 0.1678 \cdot 10^{-6}$$

где $\sum_{n=1}^{\infty} |h(n)|^2$ – сумма квадратов модулей отсчетов импульсной характеристики $h(n)$,

определяемая по формуле

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(z) H(z^{-1}) z^{-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{0.099z^{-1}}{1 - 1.5016z^{-1} + 0.6016z^{-2}} \cdot \frac{0.099z}{1 - 1.5016z + 0.6016z^2} z^{-1} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{0.099z}{z^2 - 1.5016z + 0.6016} \cdot \frac{0.099}{1 - 1.5016z + 0.6016z^2} dz = \sum_{z=z_i} \text{Res } H(z) H(z^{-1}) z^{-1} =$$

$$\frac{0.099(0.7508 + j0.1947)}{(0.7508 + j0.1947 - 0.7508 + j0.1947) \left(1 - 1.5016(0.7508 + j0.1947) + 0.6016(0.7508 + j0.1947)^2 \right)} +$$

$$+ \frac{0.099(0.7508 - j0.1947)}{(0.7508 - j0.1947 - 0.7508 - j0.1947) \left(1 - 1.5016(0.7508 - j0.1947) + 0.6016(0.7508 - j0.1947)^2 \right)} =$$

$$= \frac{0.00736 + j0.00191}{j0.38936(0.1889 - j0.11645)} + \frac{0.00736 - j0.00191}{-j0.38936(0.1889 + j0.11645)} = \frac{0.0009478}{0.00746} = 0.1271.$$

Определяем мощность сигнала на выходе фильтра без масштабирующего множителя по формуле [3]

$$P_{\text{свых}} = P_{\text{свх}} \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|^2 = 0.5 \cdot 0.1271 = 0.0636.$$

Отношение сигнал/шум на выходе фильтра без масштабирующего множителя равно

$$\frac{P_{\text{свых}}}{P_{\text{швых}}} = 10 \times \log \frac{0.0636}{0.1678} 10^6 = 55.79 \text{ дБ}.$$

Определяем масштабирующие множители при ограничении максимума амплитуды сигнала для 1-го и 2-го узлов

$$\lambda_1 \leq \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} |f_1(nT)|} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} |h_1(nT)|} = \frac{1}{11.11} = 0.09,$$

где $h_1(n)$ – импульсная характеристика части фильтра (от входа до 1-го узла) определяется по формуле

$$h_1(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c H_1(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1}{1 - 1.5016z^{-1} + 0.6016z^{-2}} z^{n-1} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z}{(z - (0.7508 + j0.1947))(z - (0.7508 - j0.1947))} z^n dz = \sum_{z=z_{1,2}} \text{Res} H_1(z) z^{n-1} =$$

$$= \left\{ 1; 1.5016; 1.6532; 1.5791; 1.3766; 1.1171; 0.8493; 0.6032; 0.3949; 0.2301; 0.1079; 0.0236; -0.0295; \right.$$

$$\left. -0.0584; -0.0700; -0.0690; -0.063; -0.0525; -0.0409; \dots \right\}$$

Сумма модулей отсчётов импульсной характеристики $\sum_{n=0}^{\infty} |h_1(nT)| \approx 11.11$

$$\lambda_2 \leq \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} |f_2(nT)|} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)|} = \frac{1}{1.1} = 0.909,$$

где $h(nT)$ – импульсная характеристика фильтра определяется по формуле

$$h(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{0.099 z^{-1}}{1 - 1.5016 z^{-1} + 0.6016 z^{-2}} z^{n-1} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{0.099}{(z - (0.7508 + j0.1947))(z - (0.7508 - j0.1947))} z^n dz = \sum_{z=z_{1,2}} \text{Res} H(z) z^{n-1} =$$

$$= 0.5085 \cdot 0.7756^n \sin n(14.55^\circ) = \left\{ 0; 0.099; 0.1487; 0.1637; 0.1563; 0.1363; 0.1106; 0.0841; 0.0597; \right.$$

$$\left. 0.0391; 0.0228; 0.0107; 0.0023; -0.0029; -0.0058; \right.$$

$$\left. -0.0069; -0.0068; -0.0062; -0.0052; \dots \right\}$$

Сумма модулей отсчётов импульсной характеристики $\sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)| \approx 1.1$.

Выбираем меньший масштабирующий множитель и определяем мощность сигнала и шума на выходе фильтра с учётом масштабирующего множителя.

Мощность сигнала на выходе фильтра определяем по формуле

$$P_{\text{свых}} = \lambda_1^2 \cdot P_{\text{свх}} \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|^2 = 0.0081 \cdot 0.5 \cdot 0.1271 = 0.0005151.$$

Мощность шума на выходе фильтра определяем по формуле

$$P_{\text{швых}} = \frac{\lambda_1^2 \Delta_0^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|^2 + \frac{\Delta_0^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|^2 + 2 \frac{\Delta_1^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|^2 + \frac{\Delta_1^2}{12} = 0.1691 \cdot 10^{-6}.$$

Отношение сигнала к шуму на выходе фильтра равно

$$\frac{P_{\text{свых}}}{P_{\text{швых}}} = 10 \cdot \log \frac{0.0005151}{0.1691} 10^6 = 34.81 \text{ дБ}.$$

Определяем масштабирующий множитель при ограничении мощности сигнала для 1-го узла по формуле

$$\lambda_1^2 \leq \frac{1}{\|F_1(\exp(j\omega))\|_2^2} = \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F_1(\exp(j\omega))|^2 d\omega} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} |f_1(n)|^2} = \frac{1}{12.969} = 0.077,$$

где $\sum_{n=0}^{\infty} |f_1(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |h_1(n)|^2$ – сумма квадратов модулей отсчётов импульсной характеристики $h_1(n)$ определяется по теореме Парсеваля

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_1(nT)|^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint_c H_1(z) H_1(z^{-1}) z^{-1} dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{1}{1 - 1.5016z^{-1} + 0.6016z^{-2}} \cdot \frac{1}{1 - 1.5016z + 0.6016z^2} z^{-1} dz = 12.9694$$

Определяем мощность сигнала и шума на выходе фильтра с учётом масштабирующего множителя.

Мощность сигнала на выходе фильтра определяем по формуле

$$P_{\text{свых}} = \lambda_1^2 P_{\text{свх}} \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|^2 = 0.077 \cdot 0.5 \cdot 0.1271 = 0.004893.$$

Мощность шума на выходе фильтра определяем по формуле

$$P_{\text{швых}} = \frac{\lambda_1^2 \Delta_0^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|^2 + \frac{\Delta_0^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|^2 + 2 \frac{\Delta_1^2}{12} \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|^2 + \frac{\Delta_1^2}{12} = 0.1802 \cdot 10^{-6}.$$

Отношение сигнала к шуму на выходе фильтра равно

$$\frac{P_{\text{свых}}}{P_{\text{швых}}} = 10 \times \log \frac{0.004893}{0.1802} 10^6 = 54.34 \text{ дБ}.$$

Отношение сигнала к шуму на выходе фильтра для масштабирующего множителя, полученного при ограничении мощности входного сигнала, на 19.53 дБ больше отношения сигнала к шуму на выходе фильтра для масштабирующего множителя, полученного при ограничении максимума амплитуды входного сигнала.

5. Заключение

1. Приведённые исследования показывают, что отношение мощности сигнала к мощности шума на выходе фильтра существенно зависит от метода определения масштабирующих множителей.
2. Можно с большой достоверностью утверждать, что масштабирование при ограничении мощности сигнала даёт большее отношение сигнала к шуму на выходе фильтра по сравнению с другими методами масштабирования.
3. Необходимо определять масштабирующие множители для всех узлов разветвления, поскольку возможны ситуации, когда напряжение в выходном узле фильтра не вызывает переполнения, в то время как напряжение в ближнем от входа фильтра узле может быть выше допустимого.
4. Полученные и приведённые в статье соотношения и формулы могут быть полезными как для студентов, так и для инженеров, занимающихся задачами цифровой фильтрации.

Литература

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов/Пер. с англ., под ред. Ю.И.Александрова. М.: Мир, 1978.-848 с.
2. Оппенгейм А.В., Шафер Р. В. Цифровая обработка сигналов/Пер. с англ. С.А. Кулешова, по ред. А.С.Ненашева. М.: Техносфера, 2006.-855с.
3. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов. М: «Радио и связь», 1990.-256с.

*Статья поступила в редакцию 11.11.2013;
переработанный вариант — 27.05.2014*

Дежина Елена Викторовна

ст. преподаватель кафедры теории электрических цепей СибГУТИ (630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86), тел. (8-383) 286-80-23, e-mail: alenda@ngs.ru.

Рясный Юрий Васильевич

д.т.н., профессор кафедры теории электрических цепей СибГУТИ (630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86), тел. (8-383) 286-80-27.

Черных Юлия Сергеевна

ст. преподаватель кафедры теории электрических цепей СибГУТИ (630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86), тел. (8-383) 286-80-23.

Constraint of dynamic range in digital filters when presenting numbers in format with fixed point

E.V. Dezhina, Y.V. Ryasny, Y.S. Chernykh

Methods of scale factors determination under constraints of peak magnitude, under constraints of peak spectrum modulus, under constraints of mean value of spectrum modulus and under constraints of input signal power are investigated.

Keywords: transfer function, impulse response characteristic, digital filter, branch points, spectrum, power, energy, voltage, signal variation range.