УДК 681.324

Модель для расчёта показателей осуществимости решения задач на распределённых вычислительных системах с накопителем *

К.В. Павский, В.А. Павский

В рамках теории массового обслуживания построена математическая модель функционирования вычислительных систем (ВС) с накопителем при обслуживании потока задач. Рассматривается параметр исходящего потока, зависящий от времени. Получены решения для расчёта средней загруженности накопителя задачами (с учётом дисперсии).

Ключевые слова: распределённые вычислительные системы, накопитель, математическая модель, оценки показателей.

1. Введение

Показатели потенциальной надёжности и живучести характеризуют качество функционирования вычислительных систем (ВС) вне связи с процессом поступления и решения задач [1]. Поэтому для оценки потенциальных возможностей ВС по достижению цели их функционирования (решения поступающих задач) используют показатели осуществимости решений задач. Эти показатели характеризуют процесс решения задач на неабсолютно надёжных ВС.

В работе описывается математическая модель функционирования ВС с накопителем при обслуживании потока сложных задач.

Рассматривается распределённая ВС, на которую поступают задачи для решения. Поступившая задача попадает в накопитель. Из задач формируется пакет. Количество задач в пакете ограничено числом ЭМ, решающих поступающие задачи. Если пакет сформирован, то вновь поступившая задача остаётся в накопителе и ждёт обслуживания.

2. Модель

На систему массового обслуживания (СМО) поступает поток требований интенсивностью α, из которых формируется пакет объёма n, $n=1,2,...$. Если пакет сформирован, то требование получает отказ. Как только СМО освобождается, она приступает к обслуживанию с интенсивностью β очередного пакета, пусть даже и не до конца сформированного. По окончании обслуживания СМО переходит к обслуживанию очередного пакета.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №13-07-00160).

Требуется найти $P_k(t)$ – вероятность того, что в момент времени $t \in [0,\infty)$ пакет состоит из k нерешённых задач, при условии, что в начальный момент времени пакет был пустым; $k = 0,1,2,...$.

Тогда

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} P_0(t) = -\alpha \cdot P_0(t) + \beta(t) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} P_k(t), \\ \frac{d}{dt} P_k(t) = -(\alpha + \beta(t)) \cdot P_k(t) + \alpha \cdot P_{k-1}(t),\ k \in E_1^{\infty}, \end{cases} \tag{1}$$

а начальные условия

$$P_0(0) = 1,\ P_k(0) = 0,\ k \neq 0. \tag{2}$$

Условие нормировки имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1,\ \forall t \in [0,\infty).$$

Решение системы уравнений (1) при $\beta(t) = \beta$ приведено в работе [2].

3. Оценка наполненности накопителя

Для нахождения среднего числа нерешённых задач в пакете $M_\alpha(t)$ и соответствующей дисперсии $D_\alpha(t)$ используем метод моментов [3].

Введём производящую функцию

$$F(z,t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot P_k(t), \tag{3}$$

и применим её к системе (1).

Дифференцируя (3) по переменным t и z, получим

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \frac{dP_k(t)}{dt},$$

$$\frac{\partial F(z,t)}{\partial z} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot z^{k-1} \cdot P_k(t).$$

Суммируя уравнения системы (1), умноженные на z^k, $k \in E_1^{\infty}$, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} F(z,t) = -(\alpha + \beta(t)) \cdot F(z,t) + \alpha \cdot z \cdot F(z,t) + \beta(t).$$

Продифференцировав последнее равенство по переменной z, один раз – для математического ожидании, два раза – для дисперсии [4] и, положив z=1, после соответствующих преобразований получаем систему уравнений (с учётом (2)) для математического ожидания и дисперсии

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} M_\alpha(t) + \beta(t) \cdot M_\alpha(t) = \alpha, \\ \frac{d}{dt}(D_\alpha(t) - M_\alpha(t) + M_\alpha{}^2(t)) + \beta(t) \cdot (D_\alpha(t) - M_\alpha(t) + M_\alpha{}^2(t)) = 2\alpha \cdot M_\alpha(t), \end{cases} \tag{4}$$

с начальными условиями $M_\alpha(0) = 0,\ D_\alpha(0) = 0$.

Пусть $\psi(N)$ – производительность системы (размерность – ЭМ) при решении задач набора, которые забираются из накопителя, в ВС из N ЭМ. Тогда, если $N(t)$ – число исправных ЭМ в момент времени t, $t \in [0,\infty)$, то

$$\beta(t) = \frac{\psi(N(t))}{\psi(N)} \cdot \beta, \tag{5}$$

где β – интенсивность решения задач на ВС из N ЭМ.

Вообще говоря, вид функции $\psi(x)$ зависит от многих факторов. Например, эффективность решения задач набора зависит: от возможности параллельной обработки на системе [1] от эффективности планировщика [4–6], который определяет необходимый ресурс ВС для их решения и др.

Количество исправных машин в системе будем рассчитывать по формуле [1]

$$N(t) = \frac{N\mu}{\mu+\lambda} + \frac{j \cdot \lambda - (N-j)\mu}{\mu+\lambda} e^{-(\mu+\lambda)\cdot t},$$

где j – число исправных машин в начальный момент времени, λ – интенсивность отказов машин, μ – интенсивность восстановления отказавших машин.

Результаты расчета согласно (4) при (5) приведены на рис. 1, где функция $\psi(x)$ имеет линейный вид.

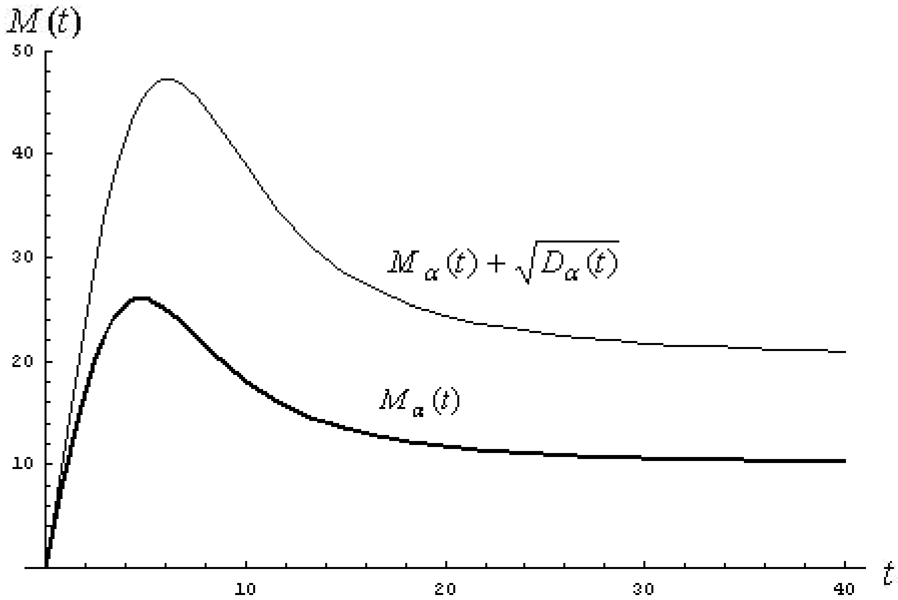

Рис. 1. Зависимость средней наполненности накопителя задачами от времени t с учётом дисперсии при $\alpha = 10$ 1/ч, $\beta = 1$ 1/ч, $\psi(N(t)) = N(t)$, $\lambda = 10^{-4}$ 1/ч, $N = 2 \cdot 10^4$, $\mu = 0.1$ 1/ч, $j = 200$

Если положить, $\beta(t) = \beta$ (т.е. $\psi(N(t)) = N$, производительность неизменна), то математическое ожидание и дисперсия, из (4) при условии (2), запишутся в виде

$$\begin{cases} M_\alpha(t) = \dfrac{\alpha}{\beta}\left(1 - e^{-\beta \cdot t}\right), \\ D_\alpha(t) = 2 \cdot \dfrac{\alpha}{\beta}\left(\dfrac{\alpha}{\beta} - \alpha \cdot t \cdot e^{-\beta \cdot t}\right) + 2\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2 \cdot e^{-\beta \cdot t} + M_\alpha(t) - M_\alpha{}^2(t). \end{cases} \tag{6}$$

Результаты расчёта для (6) приведены на рис. 2.

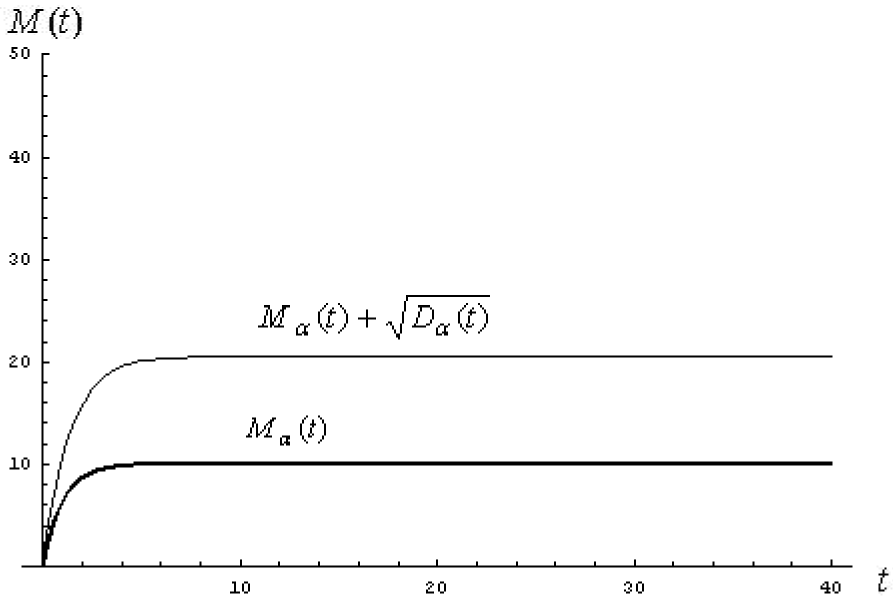

Рис.2. Зависимость средней наполненности накопителя задачами от времени t с учётом дисперсии при $\alpha=10$ 1/ч, $\beta=1$ 1/ч, $\beta(t)=\beta$

4. Заключение

В работе предложена модель для расчёта показателей осуществимости решения задач (потока) на распределённых вычислительных системах с накопителем. В данной модели рассматривается параметр исходящего потока, зависящий от времени. Для нахождения решений для показателей функционирования ВС использовался метод моментов, достоинством которого является то, что зависимость от времени параметра исходящего потока не отражается на использованных преобразованиях. В результате найдены решения для расчёта средней загруженности накопителя задачами с учетом дисперсии.

Литература

1. *Хорошевский В.Г.* Архитектура вычислительных систем. МГТУ им. Баумана, М., 2008, 520 с.
2. *Хорошевский В.Г., Павский В.А., Павский К.В.* Расчёт показателей эффективности функционирования большемасштабных распределённых вычислительных систем // Вестник компьютерных и информационных технологий, Изд. «Машиностроение», №6(60), 2009, С.25-30.
3. *Хорошевский В.Г., Павский В.А., Павский К.В.* Расчёт показателей живучести распределённых вычислительных систем // «Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика», №2(15), 2011, С. 81-88.
4. *Хорошевский В.Г., Мамойленко С.Н.* Стратегии стохастически оптимального функционирования распределённых вычислительных систем // Автометрия. –2003. – № 2. – С. 81-91.
5. *Cirne W., Berman F.* A model for moldable supercomputer jobs // 15th Intl. Parallel & Distributed Processing Symp. – 2001. URL: `http://cseweb.ucsd.edu/~walfredo/papers/moldability-model.pdf` (Дата обращения 01.09.2014).
6. *Dror Feitelson,* Parallel Workloads Archive. URL: `http://www.cs.huji.ac.il/labs/parallel/workload/` (Дата обращения 01.09.2014).

Статья поступила в редакцию 01.09.2014

Павский Кирилл Валерьевич

Д.т.н., доцент, научный сотрудник лаборатории вычислительных систем ФГБУН Института физики полупроводников им. А.В. Ржанова СО РАН (630090, г. Новосибирск, пр. Лаврентьева, 13), доцент кафедры вычислительных систем ФГОБУ ВПО СибГУТИ (630102, г. Новосибирск, ул. Кирова, д. 86), тел. (383) 3332171, e-mail: `pkv@isp.nsc.ru`.

Павский Валерий Алексеевич

Д.т.н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики Кемеровского технологического института пищевой промышленности (650056, г. Кемерово, б-р Строителей, д. 47), тел. (3842) 734200, e-mail: `pavvm@kemtipp.ru`.

A model for realizability calculation of tasks servicing on distributed computer systems with buffer.

Kirill V. Pavsky, Valery A. Pavsky

In the framework of the queueing theory, a mathematical model of distributed computer system operation with buffer servicing task flow is constructed. The parameter of outgoing flow depending on time is considered. The analytical solutions of calculating mathematical expectation and dispersion of buffer load with tasks are presented.

Keywords: distributed computer systems, buffer, mathematical model, estimations of indices, analytical analysis.