УДК 519.688

Вычислительные аспекты распознавания абстрактных свойств бесконечных комбинаторных объектов

Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров

В статье приводится обзор результатов, связанных с решением проблемы Бёрнсайда для малых n и смежных вопросов.

Ключевые слова: периодическая группа, порядок, спектр, экспонента, период.

1. Введение

Несколько лет назад один из авторов этой работы по приглашению В. Г. Хорошевского читал студентам СибГУТИ курс «Теория автоматов». Чтение этого курса натолкнуло его на мысль об использовании компьютерных вычислений для исследования бесконечных периодических групп.

Наша работа посвящена, в основном, периодическим группам, но мы не сомневаемся, что используемые методы применимы к исследованию и других бесконечных комбинаторных объектов.

В октябре 1900 г. Уильям Бёрнсайд написал письмо Роберту Фрике, в котором, в частности, говорилось следующее:

«Пользуясь случаем, спрашиваю, не задавались ли Вы следующим вопросом, а если задавались, пришли ли к какому-нибудь ответу.

Может ли группа, порождённая *конечным* количеством операций, такая, что порядок каждой из этих операций конечен и не превосходит данного числа, состоять из бесконечного числа операций?

Например, пусть S_1 & S_2 — операции и Σ, представляющая по очереди все комбинации повторений S_1 & S_2, таких как $S_1^a S_2^b S_1^c ... S_2^e$, такова, что $\Sigma^m = 1$, где m — данное натуральное число; верно или нет, что группа, порождённая S_1 & S_2, имеет конечный порядок? Конечно, если m равно 2, группа имеет порядок 4, а если m равно 3, группа имеет порядок 27; но для значений m, больших 3, кажется, что вопрос представляет серьёзную сложность для рассмотрения.» (Цит. по [1].)

В следующем письме Фрике, датированном 20 июня 1901 г., Бёрнсайд пишет:

«Я недавно вернулся к вопросу, о котором писал Вам зимой, а именно, о дискретных группах, определённых равенством $S^m = 1$, где S представляет собой любую и каждую комбинацию из n независимых порождающих операций $A_1, A_2, ...A_n$; где m, n — данные натуральные числа. Я обнаружил, что в случае, когда $m = 3$, для данного n порядок может быть определён некоторой рекуррентной формулой... Для $m = 4, n = 2$ я посчитал, что порядок равен 2^{12}... В данный момент я застрял на случае $n = 2$, $m = p$ — простое число, большее 3; но легко показать, что порядок не может быть меньшим, чем p^{p+2}, и мне представляется вероятным, что он больше, если вообще конечен.» (Цит. по [1].)

Из этих писем мы видим, что, говоря современным языком, Бёрнсайд интересуется следующими двумя вопросами:

ВОПРОС 1. Пусть n — натуральное число и G — группа, такая, что порядок любого элемента из G меньше либо равен n. Является ли G локально конечной?

ВОПРОС 2. Пусть n — натуральное число и G — группа, удовлетворяющая тождеству $x^n = 1$. Является ли G локально конечной?

Конечно, эти вопросы разные: Вопрос 2 является частным случаем Вопроса 1. Но, например, для $n = 6$ ответ на Вопрос 2 положителен [2], а Вопрос 1 до сих пор открыт, поскольку включает в себя, в частности, Вопрос 2 для $n = 5$.

Вопрос 1 также включает в себя следующий

ВОПРОС 3. Пусть ω — фиксированное конечное множество натуральных чисел. Предположим, что множество порядков элементов группы G совпадает с ω. Является ли G локально конечной?

В 1902 г. Бёрнсайд опубликовал работу [3], в которой обсуждался Вопрос 2. С течением времени его стали называть Проблемой Бёрнсайда для групп экспоненты n. Исследованию этой проблемы посвящено огромное количество работ (см. список литературы в [4]). Вопрос 1 упоминается в книге [5] со ссылкой на Бёрнсайда.

Мы сосредоточимся на Вопросе 3, касаясь Вопроса 1 и Вопроса 2 лишь в той мере, которая согласуется с нашей основной целью.

2. Проблема Бёрнсайда для групп данной экспоненты

Группа G называется *периодической*, если для любого $g \in G$ существует натуральное n (зависящее от g), такое, что $g^n = 1$; если существует n, удовлетворяющее условию $g^n = 1$ для всех $g \in G$, то n называется *периодом* группы G, а наименьшее такое n называется *экспонентой* группы G. Говорят, что группа G *локально конечна*, если любое конечно множество её элементов содержится в конечной подгруппе. Группа G называется *нильпотентной* ступени нильпотентности, не превосходящей n, если для всех $x_1, \ldots, x_n \in G$ выполняется равенство $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = 1$, где $[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$ и $[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$ для $n \geqslant 3$.

Класс C_n групп периода n является *многообразие*, т. е. он замкнут относительно взятия подгрупп, факторгрупп и декартовых произведений. Пусть $B(d, n)$ — свободная группа из C_n с d порождающими.

2.1. Группы экспоненты 2 и 3

В работе [3] Бёрнсайд отметил очевидный факт локальной конечности групп периода 2 и показал, что это верно и для групп периода 3. Кроме того, он заметил, что в группах периода 3 любые два сопряжённых элемента перестановочны, т. е. в этих группах выполняется 2-энгелево тождество $[[y, x], x] = 1$. В продолжении [6] работы [3], вышедшем годом позже, Бёрнсайд показал, что любая 2-энгелева группа удовлетворяет тождествам $[[x, y], z] = [[y, z], x]$ и $[[x, y], z]^3 = 1$, поэтому она двуступенно нильпотентна, если в ней нет элементов порядка 3. По-видимому, К. Хопкинс [7] первым показал, что 2-энгелевы группы трёхступенно нильпотентны, в частности, таковы все группы периода 3. Этот результат обычно приписывают Ф. Леви [8], хотя он опубликовал свою работу на 13 лет позже Хопкинса.

В 1932 году Леви и Б. Ван дер Варден [9] повторили результат Бёрнсайда о 2-энгелевости групп периода 3. Они также дали оценку порядка группы экспоненты 3 с d порождающими.

Окончательный результат выглядит следующим образом:

ТЕОРЕМА 2.1.

1. *Группа экспоненты* 2 *элементарная абелева, и следовательно, локально конечна*; $|B(d,2)| = 2^d$.
2. *Пусть* G — *группа экспоненты* 3. *Тогда*
   (a) G 2-*энгелева и имеет ступень нильпотентности не выше* 3;
   (b) $B(2,3)$ *двуступенно нильпотентная и* $|B(2,3)| = 27$;
   (c) *для* $d \geqslant 3$ *ступень нильпотентности* $B(d,3)$ *в точности равна* 3, *и* $|B(d,3)| = 3^k$, *где*
$$k = \frac{6d + 3d(d-1) + d(d-1)(d-2)}{6}.$$

2.2. Группы экспоненты 4

В работе [3] Бёрнсайд показал, что $|B(2,4)| \leqslant 2^{12}$. И. Санов [10] доказал, что группы экспоненты 4 локально конечны и дал (грубую) оценку для $|B(d,4)|$. С ростом числа d порождающих ступень разрешимости $B(d,4)$ неограниченно растёт [11].

Больше информации о группах экспоненты 4 можно почерпнуть из комментариев в книге А. И. Кострикина [12].

2.3. Группы экспоненты 5

Вопрос о локальной конечности групп экспоненты 5 до сих пор не решён.

ГИПОТЕЗА 2.2. $B(2,5)$ *бесконечна.*

Информацию о конечных группах экспоненты 5 см. в [12].

2.4. Группы экспоненты 6

В 1956 году вышла знаменитая статья Ф. Холла и Г. Хигмана [13], вооружившая математиков новыми мощными средствами исследования конечных групп. В частности, она подвигла М. Холла на написание работы [2], в которой он доказал локальную конечность групп периода 6. Из этого результата, а также из результата работы Холла и Хигмана, следует

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть* G — *группа экспоненты* 6. *Тогда*

1. *Силовская* 2-*подгруппа группы* $G/O_3(G)$ *нормальна в* $G/O_3(G)$.
2. *Силовская* 3-*подгруппа группы* $G/O_2(G)$ *нормальна в* $G/O_2(G)$.
3. *Ступень разрешимости группы* G *не превосходит* 4.
4. *Если* G *порождена* d *элементами, то*
$$|G| \leqslant 2^a 3^{b+b(b-1)/2+b(b-1)(b-2)/6},$$
где
$$a = 1 + (d-1)3^{d+d(d-1)/2+d(d-1)(d-2)/6},$$
$$b = 1 + (d-1)2^d,$$
и эта граница точная.

Заметим, что позднее М. Ньюман [14] существенно упростил доказательство Холла, сведя его к некоторому утверждению, которое он проверил при помощи компьютерных вычилсений. И. Г. Лысёнок [15] в 1987 г. освободил доказательство Ньюмана от машинных вычислений.

2.5. Отрицательное решение

В 1959 г. П. С. Новиков [16] анонсировал существование бесконечных конечно порождённых групп конечного периода. На основе идей этой заметки Новиков и С. И. Адян в 1968 г. написали большую статью [17, 18, 19] с доказательством существования m-порождённой группы периода n для любого $m \geqslant 2$ и любого нечётного $n \geqslant 4381$. В книге Адяна [20], вышедшей в 1975 году, граница $n \geqslant 4381$ была снижена до $n \geqslant 665$.

Существование не локально конечных 2-групп конечного периода анонсировали в 1992 году независимо С. В. Иванов и Лысёнок. Работы [21] и [22] этих авторов, содержащие полные доказательства, вышли в 1994 и 1996 годах соответственно. В частности, в работе Лысёнка доказано существование бесконечных m-порожденных групп периода n для любых $m \geqslant 2$ и $n \geqslant 8000$.

3. Группы с заданным множеством порядков элементов

Пусть G — периодическая группа. Множество $\omega(G)$, состояще из порядков всех элементов из G, называется *спектром порядков* или просто *спектром* группы G. Если множество $\omega(G)$ конечно, то оно однозначно определяется своим подмножеством $\mu(G)$, состоящим из максимальных по делимости элементов из $\omega(G)$.

3.1. Группы с $\omega(G) = \{1, 2, 3\}$

Б. Х. Нойман [23] был первым, кто обратил внимание на Вопрос 3. Он получил следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $\omega(G) = \{1, 2, 3\}$. Тогда G локально конечна и выполняется одно из следующих утверждений*:

1. *G является полупрямым произведением нормальной элементарной абелевой 2-подгруппы V и группы порядка 3, действующего свободно на V*;
2. *G является полупрямым произведением нормальной элементарной абелевой 3-подгруппы V и группы порядка 2, инвертирующей любой элемент из V при сопряжении в G.*

Напомним, что если группа G действует на нетривиальной группе V, то говорят, что это действие является *свободным* (или G действует *свободно* на V), если для любых нетривиальных $g \in G$ и $v \in V$ образ v^g элемента v под действием g не равен v. Группа $\langle t \rangle$ порядка 2 *инвертирует* группу V, на которой она действует, если $v^t = v^{-1}$ для любого $v \in V$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2 (Ответ на Вопрос 1 для $n = 3$). *Пусть G — группа, в которой порядок любого элемента не превосходит 3. Тогда G локально конечна.*

В самом деле, это следует из теорем 1.1, 1.3 и 2.1.

3.2. Группы, порядки элементов которых не превосходят 4

В своей работе о группах экспоненты 4 Санов [10] доказал, что группа G с $\omega(G) = \{1, 2, 3, 4\}$ локально конечна. Позднее Д. В. Лыткина [24] определила структуру таких групп.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть G — группа с $\mu(G) = \{3, 4\}$. Тогда G разрешима ступени не выше 3 и возможен один из следующих случаев*:

1. *$G = VQ$, где V — нетривиальная нормальная элементарная абелева 3-подгруппа, Q — 2-группа, действующая свободно на V, и изоморфна либо циклической группе порядка 4, либо кватернионной группе порядка 8;*
2. *$G = T\langle a\rangle$, где T — нормальная нильпотентная двуступенно нильпотентная 2-подгруппа и порядок a равен 3;*
3. *$G = TS$, где T — элементарная абелева нормальная 2-подгруппа и S изоморфна симметрической группе степени 3.*

3.3. Свободное действие

Пусть G — группа автоморфизмов нетривильной группы V. Автоморфизм $a \in G$ порядка n называется *расщепляемым*, если $vv^a \cdots v^{a^{n-1}} = 1$ для любого $v \in V$. Другими словами, a — расщепляемый автоморфизм группы V, если $(va^{-1})^n = 1$ для любого $v \in V$ в естественном полупрямом произведении VG.

В этом пункте мы собрали результаты о группах, которые допускают расщепляемый автоморфизм небольшого порядка или содержат такой автоморфизм.

ТЕОРЕМА 3.4 ([25, 26]). *Пусть V — группа, допускающая автоморфизм a порядка 3.*

1. *Если $\langle a\rangle$ действует свободно на V и $V = \{v^a v^{-1} \mid v \in V\}$, то V нильпотентна ступени нильпотентности не выше 2* ([25]);
2. *Если a расщепляемый автоморфизм, то V нильпотентна ступени нильпотентности не выше 3* ([26]).

ТЕОРЕМА 3.5 ([26]). *Пусть G — нетривиальная периодическая группа, действующая свободно на абелевой группе, и $x \in G$ — элемент порядка 3. Тогда либо x лежит в центре G или $\langle x^G\rangle$ изоморфна $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$. В любом случае центр G нетривиален.*

ТЕОРЕМА 3.6 ([27, 28]). *Пусть G — группа экспоненты 5, действующая свободно на абелевой группе. Тогда G циклическая.*

3.4. $\{2, 3\}$-группы, действующие свободно на абелевой группе

В этом параграфе мы перечислим результаты из [29]. Интерес к этой теме был стимулирован работой Э. Ябары и П. Майра [30], которые доказали локальную конечность $\{2, 3\}$-группы G конечного периода $2^m 3^2$, действующей свободно на абелевой группе. Позднее Лыткина [31] показала, что этот результат остаётся верным и без предположения о конечности периода силовской 2-подгруппы группы G.

Под *локально циклической* группой в дальнейшем понимается группа, любое конечное подмножество которой содержится в некоторой циклической подгруппе. *Локально циклическая примарная* группа либо является конечной циклической p-группой для некоторого простого числа p, либо изоморфна группе типа p^∞, т. е. группе

$$C(p) = \langle a_0, a_1, \dots \mid a_0^p = 1, a_{i+1}^p = a_i \text{ для } i \geq 0\rangle.$$

Кватернионной группой мы называем группу кватернионов порядка 8 или обобщённую группу кватернионов, т. е. группу, изоморфную группе

$$Q_{2^{m+1}} = \langle a, b \mid a^{2^m} = b^4 = 1,\ a^b = a^{-1},\ b^2 = a^{2^{m-1}}\rangle, \quad m \geq 3.$$

Локально кватернионной группой называется 2-группа G, любое конечное подмножество которой содержится в некоторой кватернионной подгруппе. По известному результату В. П. Шункова (см. [32]) локально кватернионная группа либо является кватернионной группой, либо изоморфна группе $Q(2) = \langle C(2), b \mid b^2 = a_0,\ a_i^b = a_i^{-1} \text{для } i \geq 1\rangle$. Локально кватернионная группа содержит ровно одну инволюцию (т. е. элемент порядка 2), которая порождает центр этой группы.

Группа кватернионов порядка 8 обладает автоморфизмом порядка 3. Соответствующее полупрямое произведение порядка 24 изоморфно группе $SL_2(3)$ двумерных матриц над полем порядка 3 с определителем, равным единице. Через $\tilde{S}_4$ мы обозначаем расширение группы порядка 2 посредством симметрической группы S_4 степени 4 с кватернионной силовской 2-подгруппой. Известно (см., например, [33]), что группа $\tilde{S}_4$ существует и единственна с точностью до изоморфизма. Отметим, что все элементы простого порядка из $\tilde{S}_4$ порождают подгруппу индекса 2, изоморфную $SL_2(3)$.

Группа G называется *центральным произведением* своих подгрупп A и B с объединением по подгруппе C, если $G = AB$, $[A, B] = 1$ и $C = A \cap B$. Центральное произведение AB называется *нетривиальным*, если $A \neq G \neq B$. Очевидно, что $C \leq Z(G)$ и центральное произведение AB с объединением по C изоморфно факторгруппе $A \times B$ по подгруппе $C_1 = \{(c, c^{-1}) \mid c \in C\}$.

Пусть p — простое нечётное число, a — натуральное число. Назовём *группой типа* $Q(p^a)$ бесконечную p-группу P, обладающую следующими свойствами:

1. центр группы P — циклическая группа порядка p^a;
2. любая конечная подгруппа из P является циклической.

Отметим, что любая группа типа $Q(p^a)$ не является локально конечной.

Пусть p — простое нечётное число, a — натуральное число. Назовём *группой типа* $Q(p^a, d)$ $\{2, p\}$-группу H с инволюциями, обладающую следующими свойствами:

1. центр группы H является локально циклической группой;
2. все 2-элементы из H содержатся в $Z(H)$ и образуют группу T порядка 2^d (случай $d = \infty$ не исключается);
3. H/T является группой типа $Q(p^a)$ для некоторого натурального числа a.

ЛЕММА.

1. *Для любого нечётного простого числа p и любого натурального числа a существует группа типа $Q(p^a)$.*
2. *Для любого нечётного простого числа p и любых натуральных чисел a и d существует группа типа $Q(p^a, d)$.*
3. *Для любого нечётного простого числа p и любого натурального числа a существует группа типа $Q(p^a, \infty)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n = p^s > 665$, $m \geq 2$ и $G = A(m, n)$ — группа, определённая в [20, гл. VII, §1]. Как показано в этой главе, $Z(G) = \langle z \rangle$ — бесконечная циклическая группа, $Z(G) \leq G'$, $G/Z(G) \simeq B(m, n)$ и любые две циклические подгруппы из G пересекаются нетривиально.

1. Пусть $P = G/\langle z^{p^a} \rangle$. Покажем, что P — группа типа $Q(p^a)$. По [20, гл. VII, § 1, теорема 1.8] конечные подгруппы группы $B(m, n)$ — не локально конечной m-порождённой свободной группы периода $n \geq 665$ — являются конечными циклическими группами. Следовательно, если K — нетривиальная конечная подгруппа группы P, то её полный прообраз A в G порождается элементом z и подходящим элементом $x \in G \setminus Z(G)$. В силу свойств группы $A(m, n)$ подгруппа $A = \langle z, x \rangle$ является абелевой группой без кручения, и поскольку каждая неединичная подгруппа из A имеет нетривиальное пересечение с $\langle z \rangle$, то по основной теореме о конечно порождённых абелевых группах группа A циклическая. Значит, $A/\langle z^{p^a} \rangle$

— циклическая p-группа порядка p^r, где $a < r \le a+s$, а подгруппа $A/\langle z^{p^a}\rangle$ порождена элементом $x\langle z^{p^a}\rangle$ и содержит подгруппу $\langle z\rangle/\langle z^{p^a}\rangle$. Отсюда следует, что центр $Z(P)$ группы P — циклическая группа $\langle z\rangle/\langle z^{p^a}\rangle$ порядка p^a и любая конечная подгруппа из P является циклической, т. е. P является группой типа $Q(p^a)$.

2. Если в доказательстве п. 1 леммы положить $P = G/\langle z^{p^a 2^d}\rangle$, то те же рассуждения показывают, что P — группа типа $Q(p^a, d)$.

3. Пусть $n = p^t > 10^{10}$, $m \ge 2$ и H — свободная группа ранга m многообразия, заданного тождеством $x^n y = yx^n$. Как вытекает из [34, следствие 31.1 и теорема 31.2], существует факторгруппа G группы H, обладающая следующими свойствами.

1. $Z(G) \le G'$ и $Z(G)$ — свободная абелева группа счётного ранга.
2. $G/Z(G) \simeq B(m, n)$.
3. В $Z(G)$ найдётся подгруппа A, такая, что $G/A \simeq A(m, n)$.

В силу последнего свойства в $Z(G)$ найдётся подгруппа N, для которой G/N — группа типа $Q(p^a)$. Далее, как свободная абелева группа счётного ранга $Z(G)$ обладает подгруппой M такой, что группа $Z(G)/M$ изоморфна квазициклической 2-группе $C(2)$. Понятно, что $G/N \cap M$ — группа типа $Q(p^a, \infty)$. □

ТЕОРЕМА 3.7. *Пусть G — $\{2,3\}$-группа, действующая свободно на абелевой группе. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

1. *G локально конечна и изоморфна либо локально циклической группе, либо прямому произведению локально циклической 3-группы на локально кватернионную группу, либо полупрямому произведению локально циклической 3-группы R на циклическую 2-группу $\langle b\rangle$, где $b^2 \ne 1$ и $a^b = a^{-1}$ для любого $a \in R$, либо полупрямому произведению локально циклической 3-группы R на локально кватернионную группу Q, в котором $|Q : C_Q(R)| = 2$, либо полупрямому произведению группы кватернионов $Q_8 = \langle x, y\rangle$ порядка 8 на циклическую 3-группу $\langle a\rangle$, в котором $x^a = y$, $y^a = xy$, либо группе $\tilde{S}_4$.*
2. *G не является локально конечной группой, и все элементы простых порядков из G порождают циклическую подгруппу.*

Обратно, любая из перечисленных групп может действовать свободно на подходящей абелевой группе.

Подробное описание групп из пункта 2 теоремы 2.7 даёт следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.8. *Пусть G — не локально конечная $\{2,p\}$-группа, где p — простое нечётное число. Тогда и только тогда все элементы простых порядков из G порождают циклическую подгруппу, когда все 2-элементы из G порождают 2-подгруппу S, которая является локально циклической или локально кватернионной группой, и выполнено одно из условий*:

1. *$G = P \times S$, где P — группа типа $Q(p^a)$ для некоторого натурального числа a (случай $S = 1$ не исключается);*
2. *S — нетривиальная локально циклическая группа, и G — группа типа $Q(p^a, d)$ для некоторого натурального числа a;*
3. *S — локально циклическая группа, и G — нетривиальное центральное произведение группы S и группы типа $Q(p^a, d)$ для некоторых натуральных чисел a и d с объединением по подгруппе порядка 2^d;*
4. *S — локально кватернионная группа, и G — центральное произведение группы S и группы типа $Q(p^a, 1)$ для некоторого натурального числа a с объединением по подгруппе порядка 2;*
5. *S — группа кватернионов порядка 8, $p = 3$, $|G : C_G(S)| = 3$ и G/S — группа типа $Q(p^a)$ для некоторого натурального числа a. При этом $C_G(S)$ — либо группа типа $Q(p^a, 1)$, либо прямое произведение группы типа $Q(p^a)$ на группу порядка 2.*

4. $\{2,3\}$-группы без элементов порядка 6

В этом параграфе G обозначает $\{2,3\}$-группу без элементов порядка 6.

Если π — некоторое множество простых чисел, то π-*группой* называется периодическая группа, каждый элемент которой является π-элементом, т. е. элементом, порядок которого может делиться только на простые числа из π.

Запрещённой подгруппой группы G назовём её подгруппу H, обладающую следующими свойствами:

(а) H порождается инволюцией, т. е. элементом порядка 2, и элементом порядка 3 и является $\{2,3\}$-группой;

(б) H не содержит элементов порядка 6;

(в) любая максимальная 2-подгруппа из H является бесконечной локально циклической группой.

Авторам не известны примеры групп, содержащих запрещённую подгруппу.

Основной целью работы является получение следующего результата.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть G — $\{2,3\}$-группа, не содержащая элементов порядка 6 и запрещённых подгрупп. Если порядок произведения любых двух элементов из G, порядки которых не превосходят числа 4, не превосходит числа 9, то выполнено одно из следующих утверждений:*

1. *$G = O_3(G)T$, где $O_3(G)$ абелева, а T — либо локально циклическая 2-группа, либо кватернионная группа порядка 8 или 16;*
2. *$G = O_2(G)R$, где $O_2(G)$ нильпотентна ступени нильпотентности, не превосходящей двух, а R — 3-группа с единственной подгруппой порядка 3, действующая свободно на $O_2(G)$;*
3. *$G = O_2(G)D$, где D содержит локально циклическую подгруппу R индекса 2 и $O_2(G)R$ удовлетворяет пункту* (2)*;*
4. *G является 2-группой или 3-группой.*

Здесь $O_p(G)$ для простого числа p обозначает наибольшую нормальную p-подгруппу группы G.

Отметим, что существуют примеры не локально конечных групп, удовлетворяющих пункту (2) теоремы (см., напр., [29]).

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Пусть G — $\{2,3\}$-группа без элементов порядка 6, содержащая элементы порядков 2 и 3. Если для любых элементов $x, y \in G$, порядки которых не превосходят числа 4, период $\langle x, y\rangle$ делит число 72, то либо G локально конечна, либо для неё выполнен пункт 2 теоремы 3.1.*

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Пусть G — $\{2,3\}$-группа без элементов порядка 6, в которой порядок произведения любых двух элементов порядков, не превосходящих 4, не превосходит 9. Если порядки 2-элементов из G ограничены в совокупности, то либо G локально конечна, либо для неё выполнен один из пунктов 2 или 4 теоремы 3.1.*

СЛЕДСТВИЕ 4.4 ([23, 10, 24, 35, 36, 37]). *Группа периода 72 без элементов порядка 6 является либо локально конечной, либо примарной.*

ТЕОРЕМА 4.5. *Пусть G — бесконечная непримарная $\{2,3\}$-группа без элементов порядка 6. Следующие условия эквивалентны*:

1. *$O_2(G)O_3(G) \neq 1$.*
2. *Существует непустое G-инвариантное подмножество $\Lambda \subseteq G$ элементов порядка 3, такое, что группа $\langle x, y\rangle$ конечна для любых $x, y \in \Lambda$.*
3. *G удовлетворяют одному из следующих условий (a), (b), (c):*

(a) $G = O_3(G) \cdot T$, где $O_3(G) \neq 1$ — абелева группа, T — локально циклическая или локально кватернионная 2-группа, действующая свободно на $O_3(G)$.

(b) $G = O_2(G) \cdot R$, где $O_2(G) \neq 1$ — нильпотентная 2-группа, ступень нильпотентности которой не превосходит двух, R — 3-группа с единственной подгруппой порядка 3, действующая свободно на $O_2(G)$.

(c) $G = O_2(G) \cdot (R \cdot \langle t \rangle)$, где $O_2(G) \neq 1$ — нильпотентная 2-группа, ступень нильпотентности которой не превосходит двух, R — локально циклическая 3-группа, действующая свободно на $O_2(G)$, t — элемент порядка 2, переводящий при сопряжении каждый элемент из R в обратный.

5. 2-изолированные группы

Пусть p — простое число. Периодическая группа H называется p-изолированной, если $\omega(G) = \{p\} \cup w'$, где числа из w' не делятся на p.

ТЕОРЕМА 5.1 ([38]). *Пусть G — периодическая 2-изолированная группа, т. е. $\omega(G) = \{2\} \cup \omega'$ и ω' содержит только нечётные элементы. Тогда выполняется одно из следующих условий*:

1. *G содержит абелеву подгруппу A индекса 2, $\omega(A) = \omega'$, и $a^x = a^{-1}$ для всех $a \in A$ и $x \in G \setminus A$;*
2. *G содержит элементарную абелеву нормальную 2-подгруппу A и G/A действует свободно на A при сопряжении в G;*
3. *$G \simeq L_2(P)$, где P — локально конечное поле характеристики два.*

Обратно, периодическая группа, удовлетворяющая пунктам 1, 2 или 3, является 2-изолированной.

СЛЕДСТВИЕ 5.2.

1. *Пусть $\mu(G) = \{2, m\}$, где $m = 5$ или 9. Тогда G локально конечна и либо G содержит абелеву подгруппу индекса 2 и экспоненты m, или G является полупрямым произведением элементарной абелевой нормальной 2-подгруппы A и циклической группы порядка m, действующей свободно на A.*
2. *Если $\mu(G) = \{2, 2^m - 1, 2^m + 1\}$, то $G \simeq L_2(2^m)$.*

Доказательство. В любом случае G является 2-изолированной и, следовательно, удовлетворяет условию теоермы 5.1. Теперь заключение следсвтвия следует из теорем 2.1, 3.5 и 3.6. □

Заметим, что строение групп со спектром $\{1, 2, 5\}$ описано в [14].

6. Группы, порядки элементов которых не превосходят числа 5

Пусть G — периодическая группа.

ТЕОРЕМА 6.1 ([39], [27]). *Если $\mu(G) = \{3, 5\}$, то выполнено одно из следующих условий:*

1. *$G = FT$, где F — нормальная 5-подгруппа экспоненты 5 и ступени нильпотентности не выше 2, а T — группа порядка 3, действующая свободно на F.*
2. *$G = TF$, где T — нормальная 3-подгруппа ступени нильпотентности не выше 3, а F — группа порядка 5, действующая свободно на T.*

В частности, G локально конечна.

ТЕОРЕМА 6.2. ([39], [27]). *Если $\mu(G) = \{4, 5\}$, то выполнено одно из следующих свойств*:

1. *$G = TD$, где T — нормальная нетривиальная элементарная абелева 2-подгруппа, а U — неабелева подгруппа порядка 10;*
2. *$G = FT$, где F — элементарная абелева нормальная 5-подгруппа группы G, T действует свободно на F и изморфна подгруппе группы кватернионов порядка 8;*
3. *$G = TF$, где T — нормальная 2-подгруппа ступени нильпотентности не выше 6, а F — подгруппа порядка 5, действующая свободно на T.*

ТЕОРЕМА 6.3 ([40]). *Если $\mu(G) = \{3, 4, 5\}$, то либо $G \simeq A_6$, либо $G = VC$, где $C \simeq A_5$ и V — элементарная абелева нормальная 2-подгруппа, являющаяся прямым произведением C-инвариантных групп порядка 16.*

СЛЕДСТВИЕ 6.4. *Пусть G — периодическая группа, порядки элементов которой не превосходят числа 5. Тогда либо G — это 5-группа, либо G локально конечна.*

7. Группы, порядки элементов которых не превосходят числа 6

В этом параграфе G обозначает периодическую группу.

ТЕОРЕМА 7.1 ([41]). *Если $\mu(G) = \{5, 6\}$, то G — разрешимая локально конечная группа и выполнено одно из следующих свойств*:

1. *$G = FC$, где F — нормальная элементарная абелева 5-группа, а C — циклическая группа порядка 6, действующая свободно на F;*
2. *$G = TD$, где T — нормальная подгруппа экспоненты 3, а D — неабелева группа порядка 10;*
3. *$G = (T \times U)F$, где T — нормальная подгруппа экспоненты 3, U — нормальная подгруппа экспоненты 2, а F — группа порядка 5, действующая свободно на $T \times U$.*

ТЕОРЕМА 7.2 ([42]). *Если $\mu(G) = \{4, 6\}$, то G локально конечна.*

ТЕОРЕМА 7.3 ([43]). *Если $\mu(G) = \{4, 5, 6\}$, то G локально конечна и выполнено одно из следующих свойств*:

1. *$G = NA$, где N — нормальная нетривиальная элементарная абелева 2-подгруппа, A действует свободно на N при сопряжении и A изоморфна $SL_2(3)$ или неабелевой группе порядка 12, содержащей циклическую силовскую 2-подгруппу;*
2. *G содержит нетривиальную нормальную элементарную абелеву 2-подгруппу V и $G/V \simeq A_5$;*
3. *G изоморфна S_5 или S_6.*

СЛЕДСТВИЕ 7.4. *Если порядки элементов группы G не превосходят числа 6, то G — локально конечная группа или 5-группа.*

8. Различные результаты и гипотезы

Пусть G — периодическая группа.

ТЕОРЕМА 8.1 ([44]). *Пусть $\mu(G) = \{3, 4, 7\}$. Тогда $G \simeq L_2(7)$.*

Пусть M_{10} — группа, изоморфная стабилизатору точки спорадической группы Матьё в её подстановочном представлении степени 11.

ТЕОРЕМА 8.2 ([45]). *Если $\mu(G) = \{3, 5, 8\}$, то $G \simeq M_{10}$.*

ТЕОРЕМА 8.3 ([46, 41]). *Если G — группа экспоненты 12 и выполняется одно из условий (a), (b), то G локально конечна.*

(a) *Порядок произведения любых двух инволюций из G не равен 4.*

(b) *Порядок произведения любых двух инволюций из G не равен 6.*

ГИПОТЕЗА 8.4. *Группы экспоненты 12 локально конечны.*

ГИПОТЕЗА 8.5.

1. *Если $\mu(G) = \{4, 5, 6, 7\}$, то $G \simeq A_7$.*
2. *Если $\mu(G) = \{5, 6, 11\}$, то $G \simeq L_2(11)$.*
3. *Если $\mu(G) = \{8, 9, 17\}$, то $G \simeq L_2(17)$.*
4. *Если $\mu(G) = \{6, p\}$, где p — простое число, $p \geqslant 7$, то G локально конечна.*

Литература

1. *Adelmann C., Gerbracht E. H.-A.* Letters from William Burnside to Robert Fricke: automorphic functions, and the emergence of the Burnside Problem // Arch. Hist. Exact Sci. – 2009. – Vol. 63, no. 1. – P. 33–50.
2. *Hall M.* Solution of the Burnside problem for exponent six // Illinois J. Math. – 1958. – Vol. 2. – P. 764–786.
3. *Burnside W.* On an unsettled question in the theory of discontinuous groups // Quart. J. Pure Appl. Math. – 1902. – Vol. 33. – P. 230–238.
4. *Adyan S. I.* The Burnside problem and related questions. // Russian Math. Surveys. – 2010. – Vol. 65, no. 5. – P. 805–855.
5. *Hilton M. A.* An introduction to the theory of groups of finite order. – Oxford : Clarendon Press, 1908.
6. *Burnside W.* On groups in which every two conjugate operations are permutable // Proc. London Math. Soc. – 1903. – Vol. 35. – P. 28–37.
7. *Hopkins C.* Finite groups in which conjugate operations are commutative // Amer. J. Math. – 1929. – Vol. 51. – P. 35–41.
8. *Levi F.* Groups in which the commutator operations satisfy certain algebraic conditions // J. Indian Math. Soc. – 1942. – Vol. 6. – P. 166–170.
9. *Levi F., van der Waerden B.* Über eine besondere Klasse von Gruppen // Abh. Math. Semin., Hamburg Univ. – 1932. – Vol. 9. – P. 157–158.
10. *Санов И. Н.* Решение проблемы Бёрнсайда для показателя 4 // Учёные записки Ленинградского гос. ун-та. Сер. матем. – 1940. – № 55. – С. 166–170.
11. *Размыслов Ю. П.* Проблема Холла-Хигмана // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1978. – Т. 42, № 4. – С. 833–847.
12. *Kostrikin A. I.* Around Burnside. – Springer-Verlag, New York, Berlin, and Heidelberg, 1990. – Vol. 20 of Ergeb. Math. Grenzgeb. (3).
13. *Hall P., Higman G.* On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 6, no. 3. – P. 1–42.
14. *Newman M. F.* Groups of exponent six // Computational group theory (Durham, 1982), London: Academic Press. – 1984. – P. 39–41.
15. *Лысёнок И. Г.* Доказательство теоремы М. Холла о конечности групп $B(m, 6)$ // Матем. заметки. – 1987. – Т. 41, № 3. – С. 422–428.
16. *Новиков П. С.* О периодических группах // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 127. – С. 749–752.

17. *Новиков П. С., Адян С. И.* О бесконечных периодических группах. I // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1968. – Т. 32, № 1. – С. 212–244.
18. *Новиков П. С., Адян С. И.* О бесконечных периодических группах. II // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1968. – Т. 32, № 2. – С. 251–524.
19. *Новиков П. С., Адян С. И.* О бесконечных периодических группах. III // Изв. АН СССР, Сер. матем. – 1968. – Т. 32, № 3. – С. 709–731.
20. *Адян С. И.* Проблема Бёрнсайда и тождества в группах. – Москва : Наука, 1975.
21. *Ivanov S. V.* The free Burnside groups of sufficiently large exponents // Internat. J. Algebra Comput. – 1994. – Vol. 4. – P. 3–308.
22. *Лысёнок И. Г.* Бесконечные бёрнсайдовы группы чётного периода // Изв. РАН, Сер. матем. – 1996. – Т. 60, № 3. – С. 3–224.
23. *Neumann B. H.* Groups whose elements have bounded orders // J. London Math. Soc. – 1937. – Vol. 12. – P. 195–198.
24. *Лыткина Д. В.* Строение группы, порядки элементов которой не превосходят числа 4 // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48, № 2. – С. 353–358.
25. *Neumann B. H.* Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed // Arch. Math. – 1956. – Vol. 7. – P. 1–5.
26. *Журтов А. Х.* О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса // Сибирский математический журнал. – 2000. – Т. 41, № 2. – С. 329–338.
27. *Jabara E.* Fixed point free action of groups of exponent 5 // J. Austral. Math. Soc. – 2004. – Vol. 77. – P. 297–304.
28. *Jabara E.* Free actions of groups of exponent 5 // Algebra and Logic. – 2011. – Vol. 50, no. 5. – P. 466–469.
29. О периодических группах, свободно действующих на абелевых группах / А. Х. Журтов, Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров, А. И. Созутов // Тр. ИММ УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 3. – С. 136–143.
30. *Jabara E., Mayr P.* Frobenius complements of exponent dividing $2^m \cdot 9$ // Forum Mathematicum. – 2009. – Vol. 21, no. 1. – P. 217–220.
31. *Лыткина Д. В.* О периодических группах, действующих свободно на абелевой группе // Алгебра и логика. – 2010. – Т. 49, № 3. – С. 379–387.
32. *Шунков В. П.* Об одном классе p-групп // Алгебра и Логика. – 1970. – Т. 9, № 4. – С. 484–496.
33. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы. – Москва : Наука, 1968.
34. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. – Москва : Наука, 1989.
35. *Мазуров В. Д.* О группах периода 24 // Алгебра и логика. – 2010. – Т. 49, № 6. – С. 766–781.
36. *Джабара Э., Лыткина Д. В.* О группах периода 36 // Сиб. матем. ж. – 2013. – Т. 54, № 1. – С. 44–48.
37. *Jabara E., Lytkina D. V., Mazurov V. D.* Some groups of exponent 72 // J. Group Theory. – 2014. – Vol. 17, no. 5. – P. 1.
38. *Mazurov V. D.* Infinite groups with Abelian centralizers of involutions // Algebra and Logic. – 2000. – T. 39, № 1. – C. 42–49.
39. *Gupta N. D., Mazurov V. D.* On groups with small orders of elements // Bull. Austral. Math. Soc. – 1999. – Vol. 60. – P. 197–205.
40. *Мазуров В. Д.* О группах периода 60 с заданными порядками элементов // Алгебра и логика. – 2000. – Т. 39, № 3. – С. 329–346.
41. *Мазуров В. Д., Мамонтов А. С.* О периодических группах с элементами малых порядков //

Сиб. матем. ж. – 2009. – Т. 50, № 2. – С. 397–404.
42. *Mamontov A. S.* Groups of exponent 12 without elements of order 12 // Siberian Mathematical Journal. – 2013. – Vol. 54, no. 1. – P. 114–118.
43. Groups of period 60 / E. Jabara, D. V. Lytkina, A. S. Mamontov, V. D. Mazurov // in preparation.
44. *Lytkina D. V., Kuznetsov A. A.* Recognizability by spectrum of the group $L_2(7)$ in the class of all groups // Sib. Electronic Math. Reports. – 2007. – Vol. 4. – P. 300–303. – URL: http://semr.math.nsc.ru.
45. *Jabara E., Lytkina D. V., Mamontov A. S.* Recognizing M_{10} by spectrum in the class of all groups // Int. J. Algebra Comput. – Vol. 24, no. 2. – P. 113–119.
46. *Лыткина Д. В., Мазуров В. Д., Мамонтов А. С.* Локальная конечность некоторых групп периода 12 // Сибирский математический журнал. – 2012. – Т. 53, № 6. – С. 1373–1378.

Статья поступила в редакцию 01.09.2014.

Дарья Викторовна Лыткина
д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры высшей математики СибГУТИ (630102, г. Новосибирск, ул. Кирова, д. 86) тел. (383) 286-80-38, e-mail: daria.lytkin@gmail.com

Виктор Данилович Мазуров
член-корреспондент РАН, д.ф.-м.н., советник Российской академии наук при Институте математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения РАН (630090, г. Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, д. 4) тел. (383) 363-45-83, e-mail: mazurov@math.nsc.ru

Computing aspects of recognition of abstract properties of infinite combinatoric objects

Daria V. Lytkina, Victor D. Mazurov

This paper is a survey of some results and open problems about the structure of (mostly infinite) periodic groups with a given set of element orders.

Keywords: spectrum, exponent, periodic group, locally finite group.