

Оценка точности алгоритмов восстановления дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке с точно неизвестными значениями координат узлов

С.В. Поршневу, Д.В. Кусайкин

В статье обсуждаются результаты исследования возможности восстановления дискретных сигналов (ДС), заданных на неравномерной временной сетке $t_i = iT + \tau_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$, где T – период дискретизации; τ_i – случайное число, точное значение которого неизвестно (джиттер), $\tau_i \in (-T/2, T/2)$. Изучены известные оптимизационные методы, разработанные для оценивания значений джиттера. Получены оценки точности восстановления дискретных сигналов при определении значений координат узлов временной сетки рассматриваемыми методами.

Ключевые слова: неравномерная дискретизация, восстановление дискретных сигналов, неизвестные местоположения отсчетов.

1. Введение

ДС с неравномерной частотой дискретизации используются, например, в спутниковых системах связи (где возникновение неравномерной дискретизации обусловлено взаимными перемещениями абонентских станций и ретранслятора); в аналогово-цифровых и цифроаналоговых преобразователях (АЦП и ЦАП) (вследствие вариации длительности синхронизирующих или тактовых импульсов) [1]; в беспроводных широкополосных многоканальных системах передачи [2]; в беспроводных сенсорных сетях (вследствие погрешности данных о расположении датчиков) и т.д.

Рассматриваемая задача формулируется следующим образом. Имеется последовательность значений ограниченного по спектру дискретного сигнала $x(t_i) = x_i$, заданного на неравномерной сетке с джиттером

$$t_i = iT + \tau_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, M_0, \quad (1)$$

где T – период дискретизации; τ_i – случайная величина, $\tau_i \in (-T/2, T/2)$, точные значения которой неизвестны, $t_i > t_{i-1}$.

Требуется восстановить сигнал $x(t)$ в узлах равномерной временной сетки

$$\eta_{m_1} = m_1 T_1, \quad m_1 = 1, 2, 3, \dots, M_1, \quad (2)$$

где $t_1 \leq \eta_1$.

Отметим, что в данной постановке задача восстановления значений сигнала оказывается принципиально отличной от задачи восстановления сигнала в промежуточных точках по заданной таблице значений $t_i, x(t_i), i = \overline{1, r}$, которая вне зависимости от равномерности или неравномерности временной сетки, как очевидно, относится к задаче интерполяции.

Разработка методов восстановления дискретных сигналов, значения которых заданы в узлах неравномерной временной сетки (non-uniform sampling, irregular sampling), началась ещё в середине прошлого века [3]. Одна из первых работ в данной области была опубликована Янем (Yen) в 1956 г. [4]. Здесь доказано, что можно восстановить исходный сигнал по отсчётам ДС, представляющего собой отсчёты ограниченного по спектру непрерывного сигнала, полученные при использовании рекуррентной неравномерной дискретизации. В 1959 г. Шапиро и Сильверман [5] рассмотрели особенности восстановления ДС для случая аддитивной неравномерной дискретизации и дискретизации с флуктуирующей частотой.

Также существенный вклад в теорию ДС, заданных в узлах неравномерной временной сетки, внесли отечественные исследователи. Так, в 1982 г. была издана монография Горелова [6], в которой рассмотрена теория восстановления непрерывных случайных процессов, дискретизированных по времени случайным образом, а также ДС, возникающих в системе связи при передаче сообщений в случайные моменты времени. Здесь предложены методы восстановления ДС в режиме реального времени по потокам сообщений, построены аналитические модели дискретизируемых сообщений и случайных потоков отсчётов, получены оценки, подтверждающие адекватность разработанных моделей и реальных потоков. Отметим, что в качестве методов восстановления ДС в режиме реального времени в [6] предложено использовать интерполяционные и экстраполяционные процедуры нулевого и первого порядков.

В 1983 г. Билинский и Микелсон [7] обосновали условия, при которых ДС, полученный при использовании стохастической неравномерной дискретизации непрерывного сигнала, можно восстановить без искажений, обусловленных наложением спектров. В частности, они показали, что можно снять ограничение, накладываемое теоремой Котельникова, и восстанавливать широкополосные сигналы, дискретизованные через сравнительно большие интервалы времени при условии, что средняя плотность узлов временной сетки на временном интервале, соответствующем длительности ДС, должна быть постоянной. Отметим, что данное требование на практике в большинстве случаев не выполняется.

Описание других известных методов восстановления ограниченных по спектру ДС, заданных в узлах неравномерной временной сетки, можно найти в [8–10]. Анализ методов, описанных в данных работах, показывает, что их авторы неявно предполагают, что координаты узлов неравномерной временной сетки известны точно, а в такой постановке рассматриваемая задача, вообще говоря, оказывается аналогичной классической задаче интерполяции.

Необходимо отметить, что значительно более сложной задачей оказывается задача восстановления дискретного сигнала в случае, когда местоположения неравномерных дискретных отсчётов на временной оси точно неизвестны, например, вследствие случайных вариаций частоты дискретизации АЦП (джиттера). Здесь априори можно ожидать, что ранее разработанные методы восстановления сигналов, дискретизированных на неравномерной временной сетке, окажутся неработоспособными.

В этой связи Browning и Marziliano, Vetterli был разработан ряд методов определения местоположений отсчётов для восстановления дискретного сигнала, заданного на временной сетке с неизвестными координатами её узлов, в которых неизвестные координаты узлов временной сетки находятся как решения той или иной оптимизационной задачи. Данные методы описаны в [11,12] и [13–15], соответственно.

Стоит отметить, что в работах Marziliano, Vetterli [13–15] постановка задачи отличается от задачи, рассматриваемой нами. С нашей точки зрения, она представляет исключительно академический интерес, поскольку на практике оказывается известной только единственная выборка ДС, заданного в узлах сетки с неизвестными значениями координат её узлов, что не позволяет использовать метод, описанный авторами, для восстановления реальных сигналов, поэтому далее данный алгоритм в статье не рассматривается.

Оптимизационные методы определения координат отсчётов ДС, рассматриваемые Browning, являются более практичными. Однако ни в одной из своих работ автор не приводит каких-либо обоснований гипотезы о наличии у выбранной целевой функции глобального максимума, достигаемого при истинных значениях координат узлов временной сетки, и не дает рекомендаций по выбору начального приближения и области поиска параметров. Без этого, вообще говоря, гарантировать нахождение глобального, но не локального максимума оптимизируемой функции оказывается достаточно проблематично.

Также необходимо отметить, что в работах Browning не обсуждаются вопросы точности восстановления ДС на основе вычисленных значений координат узлов временной сетки. В этой связи проведение целенаправленного исследования перечисленных выше проблем является актуальной задачей.

В данной статье обсуждаются результаты исследования оптимизационных методов определения местоположений отсчётов для восстановления дискретных сигналов, заданных в узлах неравномерной временной сетки с не известными точно значениями координат её узлов.

2. Оптимизационные методы восстановления сигнала, заданного на неравномерной временной сетке с неизвестными значениями координат её узлов

Предваряя анализ оптимизационных методов определения местоположений отсчётов для восстановления сигнала, заданного на неравномерной временной сетке с неизвестными значениями координат её узлов, отметим один из возможных подходов к решению рассматриваемой задачи, состоящий в сопоставлении значений сигнала x_i к узлам той или иной временной сетки (например, равномерной) с точно известными значениями координат её узлов и затем в использовании известных методов интерполяции [16]. Однако данный (наиболее очевидный) подход к восстановлению ДС, заданного на неравномерной временной сетке с неизвестными значениями координат её узлов, не обеспечивает должной точности восстановления сигнала, как показано в [17].

С нашей точки зрения, для повышения точности восстановления сигнала $x(t)$ в узлах равномерной временной сетки с неизвестными координатами её узлов возможно использование следующих подходов:

1. определение тем или иным образом неизвестных значений координат отсчётов неравномерно дискретизированного сигнала и далее интерполяция по вычисленным значениям координат узлов исходной временной сетки на равномерную временную сетку;
2. отнесение значений сигнала x_i к узлам равномерной временной сетки и их корректировка с учётом характеристик джиттера, например, используя сглаживающие нерекурсивные фильтры и т.д.

Далее мы обсуждаем результаты исследований методов восстановления ДС, заданных на временной сетке с неизвестными значениями координат её узлов, относящихся к первому из описанных выше подходов. (Результаты исследования алгоритмов, разработанных авторами данной статьи в рамках второго подхода, будут предметом последующих публикаций).

Алгоритм № 1 (Browning [11]). Данный алгоритм предложен для решения следующей задачи. Имеется последовательность значений ограниченного по спектру ДС $u_i = \{u_0 < u_1 < \dots < u_{N_d-1}\}$, заданного на неравномерной временной сетке с неизвестными значениями координат её узлов. Известно, что число спектральных составляющих ДС равно L . Предполагается, что значение координаты узла временной сетки первого отсчёта известно

и равно нулю $t_0 = 0$, а также известно значение координаты последнего отсчёта t_{N_d-1} . Требуется определить значения координат t_i , $i = \overline{1, N_d - 2}$ отсчётов дискретного сигнала u_i .

Для решения данной задачи в [11] предложено минимизировать число спектральных составляющих, находящихся вне априорно известной полосы спектра сигнала $[1, L]$. Данный алгоритм реализуется выполнением следующей последовательности действий.

1. Выбор произвольным образом координаты узлов временной сетки $t_i^{(rand)}$, за исключением первого и последнего отсчёта, значения которых фиксированы. Общее число узлов временной сетки $t_i^{(rand)}$ равняется числу отсчётов N_d дискретного сигнала u_i , $i = \overline{0, N_d - 1}$.

2. Вычисление по таблице $\left\langle t_i^{(rand)}, u_i \right\rangle$ с помощью кубической сплайн-интерполяции в узлах равномерной временной сетки $t_m^{(uniform)}$, $m = \overline{1, N}$, значений дискретного сигнала s_m .

3. Вычисление дискретного преобразования Фурье S_k сигнала s_m :

$$S_k = \sum_{i=0}^{N-1} s_i e^{-j \frac{2\pi}{N} ik}, \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (3)$$

4. Вычисление значений целевой функции

$$C = \sum_{k=F_{\max}}^{N-F_{\max}} |S_k|^2, \quad (4)$$

где N – число отсчётов равномерной временной сетки;

F_{\max} – номер максимальной гармоники спектра сигнала s_m .

5. Поиск минимума целевой функции (4), используя один из известных методов решения оптимизационных задач, например, методом градиентного спуска.

Алгоритм № 2 (Browning [12]). Рассмотренный выше метод оценивания неизвестных координат неравномерной временной сетки, как утверждает Browning, был его первым шагом в попытке решить задачу определения неизвестных значений координат неравномерно дискретизированного сигнала. Новый алгоритм является модифицированной версией алгоритма № 1, в отличие от которого в нём уже не используется сплайн-интерполяция для вычисления значений сигнала на равномерной временной сетке. В данном случае вычисляется формальное ДПФ непосредственно по неравномерно отстоящим отсчётам.

Алгоритм № 2 предложен для решения такой же задачи, как в алгоритме №1, за исключением того, что максимальная частота сигнала здесь считается равной L/τ , где L – целое число.

Сигнал $\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}\}$, может быть аппроксимирован конечным рядом Фурье, содержащим $2L+1$ комплексных экспонент

$$g(t_i) = \sum_{k=-L}^L \alpha_k \exp\left(\frac{2\pi j}{\tau} k x_i\right), \quad i = 1, \dots, N-2.$$

Необходимо определить местоположения отсчётов $\{x_i\}$ и значения коэффициентов $\{\alpha_k\}$, при которых $\{g_i\} = \{u_i\}$:

$$\begin{bmatrix} z_1^{-L} & \cdots & z_1^0 & \cdots & z_1^L \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_{N-2}^{-L} & \cdots & z_{N-2}^0 & \cdots & z_{N-2}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{-L} \\ \vdots \\ \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $z_i = \exp\left(\frac{2\pi j}{\tau} kx_i\right)$.

В матричной форме (5) можно записать как $\mathbf{M} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{u}$.

Для наилучшего приближения дискретного сигнала с помощью (5) необходимо решить задачу

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \{x_i\} \rangle = \arg \min_{\mathbf{M}, \mathbf{a}} \|\mathbf{u} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{a}\|^2, \quad (6)$$

где $\|\cdot\|$ является нормой пространства l_2 ; \mathbf{u} – вектор значений дискретного сигнала с неизвестными координатами отсчётов; \mathbf{M} – матрица, содержащая экспоненты ряда Фурье; \mathbf{a} – вектор, содержащий коэффициенты α_k .

Таким образом, рассмотренные методы определения неизвестных координат узлов временной сетки основаны на решении той или иной многопараметрической оптимизационной задачи. Далее мы проведём анализ этих методов для проверки гипотезы о наличии у выбранной целевой функции глобального максимума, достигаемого при истинных значениях координат узлов временной сетки. Также мы исследуем точность восстановления ДС на основе вычисленных значений координат узлов временной сетки данными методами.

3. Анализ результатов исследования точности восстановления ДС, заданного на неравномерной временной сетке с неизвестными значениями координат узлов

3.1 Методика проведения исследования

Для оценки точности восстановления исходного сигнала использовалось отношение мощности сигнала к мощности ошибки восстановления (Signal-to-Error Ratio – *SER*):

$$SER = 10 \times \log \frac{\sum_{i=1}^M x_i^2}{\sum_{i=1}^M (x_i - \hat{x}_i)^2}, \quad (7)$$

где x_i – значения исходного сигнала, вычисленные в узлах равномерной сетки (2); \hat{x}_i – значения восстановленного сигнала в узлах равномерной сетки (2). Здесь для получения статистически устойчивой оценки *SER* было использовано статистическое моделирование. Его результаты позволили для каждого i -го узла временной сетки вычислить усреднённые по ансамблю реализаций значения \hat{x}_i , которые далее использовать в (8).

В проведённых вычислительных экспериментах для первого сигнала в качестве τ_i использовались случайные числа, генерируемые в соответствии с равномерным законом распределения и областью рассеяния случайной величины $[-0.06, 0.06]$. Число неравномерно расположенных отсчётов исходного сигнала – 32, безразмерная частота дискретизации сигнала $\hat{f} = 0.4$, $M = 128$. Число статистических испытаний – 50.

В проведённых вычислительных экспериментах для второго сигнала в качестве τ_i использовались случайные числа, генерируемые в соответствии с равномерным законом распределения и областью рассеяния случайной величины $[-0.016, 0.016]$. Число неравномерно

расположенных отсчётов исходного сигнала – 32, безразмерная частота дискретизации сигнала $\hat{f} = 0.3$, $M = 128$. Число статистических испытаний – 50.

В качестве исследуемых сигналов были использованы:

1) сигнал № 1:

$$y_1(t) = \sin(2\pi 0.5 f_c t) + 2 \sin(2\pi f_c t), \quad (8)$$

вычисленный в узлах временной сетки

$$t_i = iT + \tau_i, \quad i = \overline{1, 32}, \quad (9)$$

где T – период дискретизации; τ_i – случайная величина, с $\tau_i \in [-\Delta/2, \Delta/2]$, где $\Delta < T$ – размах джиттера. Таким образом, по формуле, следующей из (7):

$$y_1(t_i) = u_i = \sin\left(\pi \hat{f} \left(i + \frac{\tau_i}{T}\right)\right) + 2 \sin\left(2\pi \hat{f} \left(i + \frac{\tau_i}{T}\right)\right), \quad (10)$$

где $\hat{f} = f_c \cdot T$ – безразмерная частота дискретизации; поскольку $\tau_i \in (-\Delta/2, \Delta/2)$, соответственно, вариация безразмерной частоты дискретизации $\Delta f_i \in [-0.5\hat{f}; 0.5\hat{f}]$;

2) сигнал № 2 (использованный Browning в [11]):

$$\begin{aligned} y_2(t_i) = u_i = & 0.25 \cdot \cos\left(\frac{2}{3} \pi \hat{f} \left(i + \frac{\tau_i}{T}\right)\right) + 0.265 \cos\left(\frac{10}{9} \pi \hat{f} \left(i + \frac{\tau_i}{T}\right)\right) + \\ & + 0.26 \cos\left(\frac{4}{3} \pi \hat{f} \left(i + \frac{\tau_i}{T}\right)\right) + 0.25 \cos\left(2\pi \hat{f} \left(i + \frac{\tau_i}{T}\right)\right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\hat{f} = f_c \cdot T$ – безразмерная частота дискретизации; поскольку $\tau_i \in (-\Delta/2, \Delta/2)$, соответственно, вариация безразмерной частоты дискретизации $\Delta f_i \in [-0.5\hat{f}; 0.5\hat{f}]$.

3.2 Анализ результатов исследования точности восстановления ДС в соответствии с алгоритмом № 1

Рассмотрим результаты восстановления сигнала № 1 (рис. 1 – 3). Из рис. 1, 2 видно, что форма спектра, вычисленного по интерполируемым значениям сигнала $[x_i, u_i]$, существенно отличается от спектра исходного сигнала. Данное несоответствие возникает из-за погрешности сплайн-интерполяции, которая в [11] даже не учитывалась. Также необходимо отметить, что в данном методе предполагается, что все амплитуды всех спектральных составляющих, номера которых выходят за пределы значения L , равны нулю. Однако, как известно, при вычислении преобразования Фурье от сигнала конечной длительности данное условие будет выполняться только в том случае, если гармоники анализируемого сигнала в точности ортогональны базисным функциям, то есть на интервале анализа укладывается целое число периодов каждой гармоники. При анализе реальных сигналов конечной длительности данное условие, как правило, не выполняется, поэтому в спектре сигнала присутствуют дополнительные составляющие. В этой связи возникает вопрос о том, какую полосу частот при восстановлении реальных сигналов считать шириной спектра.

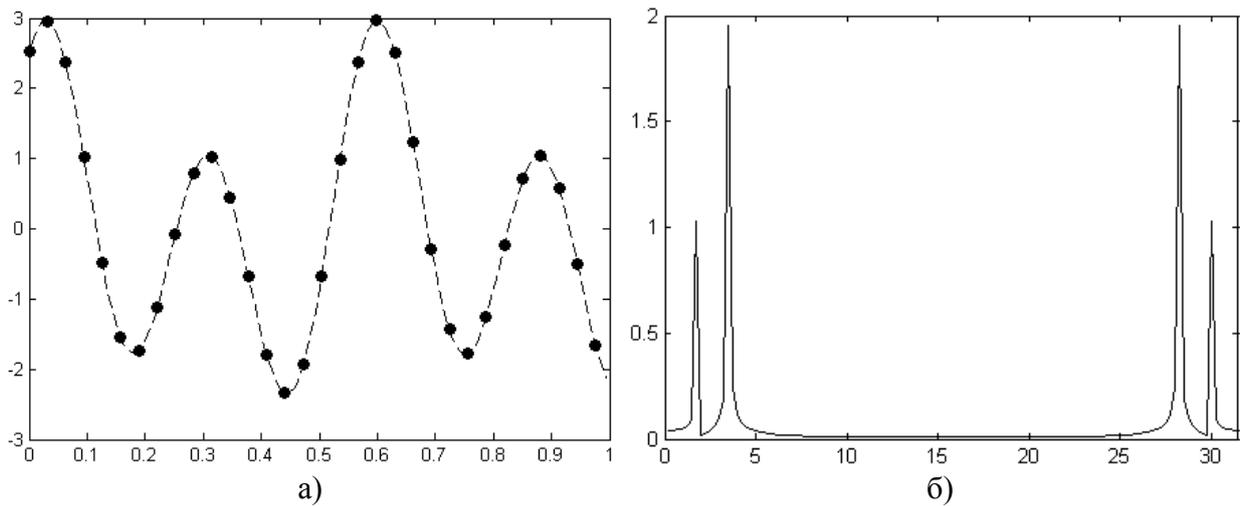


Рис. 1. а) дискретный сигнал № 1; б) спектр дискретного сигнала № 1

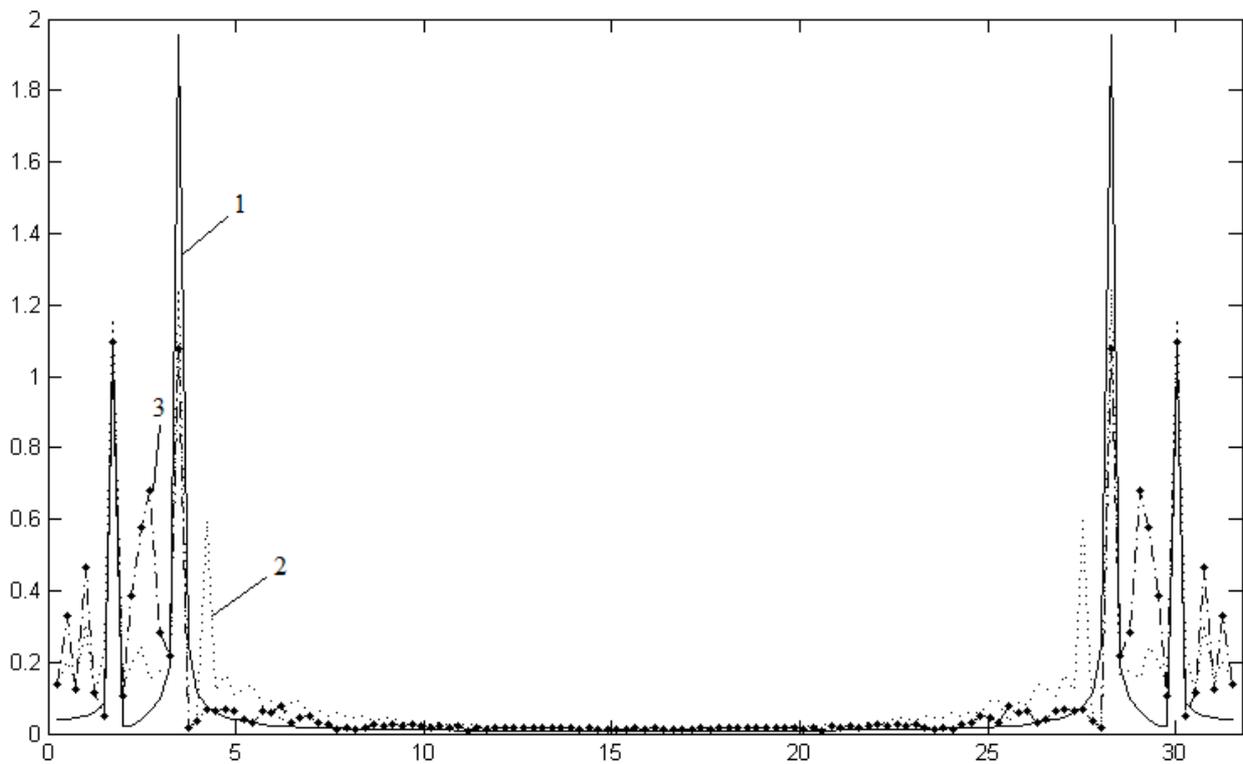


Рис. 2. Сигнал № 1: 1 – истинный спектр сигнала; 2 – спектр сигнала, полученного сплайн-интерполяцией по таблице $[t_i, u_i]$; 3 – спектра сигнала, полученного сплайн-интерполяцией по таблице $[x_i, u_i]$, где значения x_i получены в результате нахождения глобального минимума целевой функции (4)

Истинный сигнал и сигнал, полученный с помощью сплайн-интерполяции по таблице $[x_i, u_i]$, где значения x_i получены в результате нахождения глобального минимума целевой функции (4), представлены на рис. 3. Из рис. 3 видно, что данные сигналы существенно отличаются друг от друга, а потому точность восстановления сигнала № 1 нельзя признать удовлетворительной.

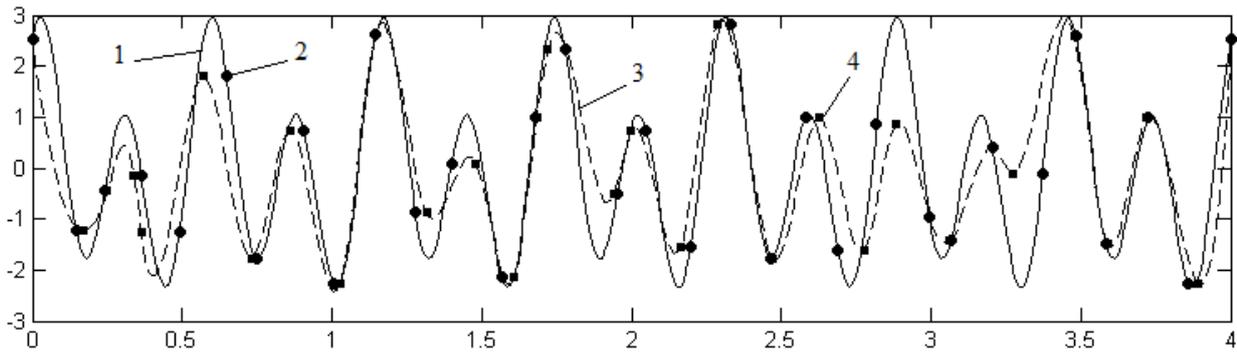


Рис. 3. Сигнал № 1: 1 – исходный сигнал; 2 – отсчёты дискретного сигнала u_i , заданного на неравномерной временной сетке t_i ; 3 – восстановленный сигнал с помощью сплайн-интерполяции по таблице $[x_i, u_i]$; 4 – отсчёты дискретного сигнала u_i , заданного на вычисленной неравномерной временной сетке x_i

Отметим, что в [11] Browning не привёл теоретического доказательства того, что целевая функция (4) будет иметь глобальный минимум только в том случае, если значения координат отсчётов, по которым она была вычислена, совпадают с истинными значениями координат t_i отсчётов сигнала. В этой связи мы провели самостоятельное исследование данного вопроса, результаты которого представлены в табл. 1.

Таблица 1. Результаты статистического моделирования спектра сигнала № 1, восстанавливаемого по таблицам $[t_i, u_i]$, $[x_i, u_i]$, $[iT, u_i]$

	Сигнал, восстановленный по таблице $[t_i, u_i]$	Сигнал, восстановленный по таблице $[x_i, u_i]$	Сигнал, восстановленный по таблице $[iT, u_i]$
Среднее значение целевой функции C	0.8	0.06	0.2
Среднеквадратическое отклонение целевой функции C	0.09	0.01	0.01
Среднее значение параметра SER , дБ,	11.2	0.3	8.3
Среднеквадратическое отклонение параметра SER	1.1	3.8	0.9

Из табл. 1 видно, что целевая функция (5) может иметь глобальный минимум не только при истинных, но и при значениях координат отсчётов, не соответствующих истинным. Описанная особенность целевой функции (5) определила необходимость получения оценок точности восстановления ДС по значениям координат отсчётов, вычисленных данным методом, приведённых в табл. 1 (столбец 3). Из табл. 1 видно, что точность восстановления сигнала № 1 по значениям ДС в узлах временной сетки, вычисляемых в соответствии с [11], оказывается ниже точности восстановления по таблице $[iT, u_i]$.

Аналогичные результаты были получены для сигнала № 2 (рис. 4), использовавшегося Browning в [11] (см. табл. 2).

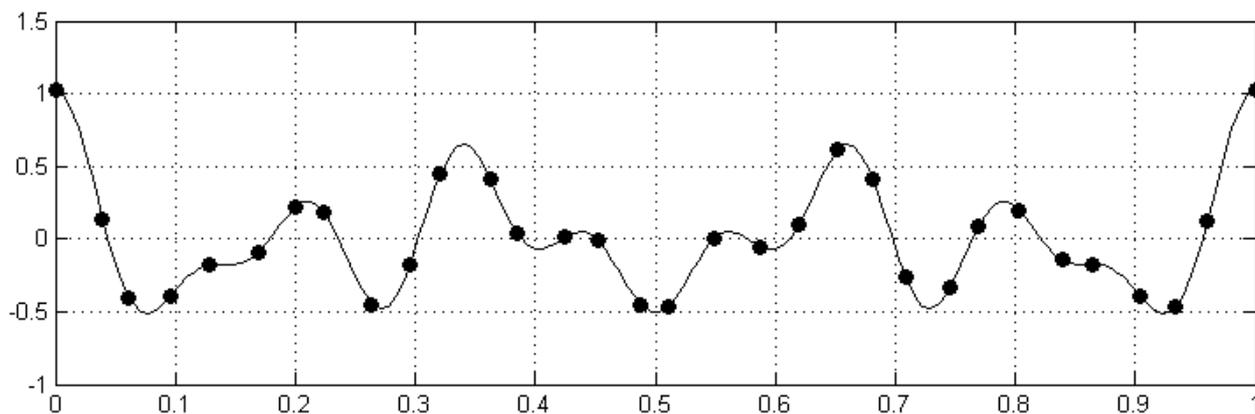


Рис. 4. Сигнал № 2 (точки – отсчёты ДС, использовавшиеся для восстановления сигнала № 2)

Таблица 2. Результаты статистического моделирования спектра сигнала № 2, восстанавливаемого по таблицам $[t_i, u_i]$, $[x_i, u_i]$, $[iT, u_i]$, и точности восстановления сигнала

	Сигнал, восстановленный по таблице $[t_i, u_i]$	Сигнал, восстановленный по таблице $[x_i, u_i]$	Сигнал, восстановленный по таблице $[iT, u_i]$
Среднее значение целевой функции C	0.18	0.007	0.11
Среднеквадратическое отклонение целевой функции C	0.01	0.002	0.02
Среднее значение параметра SER , дБ,	15.6	1.7	29.5
Среднеквадратическое отклонение параметра SER	1.0	2.7	1.1

Из табл. 2 видно, что использование метод нахождения значений неизвестных координат неравномерно дискретизированного сигнала, предложенный в [11], не обеспечивает повышения точности восстановления сигнала. При этом тривиальный подход восстановления по таблице $[iT, u_i]$ обеспечивает более высокую точность.

3.3 Анализ результатов исследования точности восстановления ДС в соответствии с алгоритмом № 2

Рассмотрим результаты анализа точности восстановления сигналов № 1, 2, полученные при использовании метода оценки координат узлов временной сетки, предложенный в [12] (см. табл. 3).

Таблица 3. Результаты статистического моделирования спектра сигналов № 1, 2, восстанавливаемых по таблицам $[t_i, u_i]$, $[x_i, u_i]$, $[iT, u_i]$, и точности восстановления сигналов

	Сигнал	Сигнал, восстановленный по таблице $[t_i, u_i]$	Сигнал, восстановленный по таблице $[x_i, u_i]$	Сигнал, восстановленный по таблице $[iT, u_i]$
Среднее значение целевой функции $\langle \alpha, \{x_i\} \rangle$	№ 1	5.3	0.3	3.1
	№ 2	$1.2 \cdot 10^{-14}$	0.2	0.9
Среднеквадратическое отклонение $\langle \alpha, \{x_i\} \rangle$	№ 1	0.5	0.2	1.8
	№ 2	$2.9 \cdot 10^{-15}$	0.07	0.2
Среднее значение параметра SER , дБ,	№ 1	11.2	0.1	8.3
	№ 2	29.2	0.1	14.5
Среднеквадратическое отклонение параметра SER	№ 1	1.1	2.0	0.9
	№ 2	1.1	5.6	1.1

Из табл. 3 видно, что использование метода нахождения значений неизвестных координат неравномерно дискретизированного сигнала, предложенного в [12], не обеспечивает повышения точности восстановления сигнала. Тривиальный подход восстановления по таблице $[iT, u_i]$ обеспечивает более высокую точность.

Отметим, что для второго сигнала минимум целевой функции достигается при истинных значениях координат узлов временной сетки. Данное условие выполняется только в том случае, если на интервале анализа укладывается целое число периодов каждой гармоники.

4. Заключение

Анализ результатов исследования оптимизационных методов Browning определения местоположений отсчетов для восстановления дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке, точные значения узлов которых неизвестны, показывает, что использовать данные методы в такой их формулировке для реальных сигналов нельзя. Решение многопараметрической оптимизационной задачи всегда требует больших вычислительных ресурсов. Browning утверждает, что его алгоритмы могут легко работать с сотнями или даже тысячами отсчетов данных, однако, не приводит соответствующих подтверждений этого. Рассматриваемые методы требуют знания такой информации, которая в практических приложениях недоступна, например, знание значений координат первого и последнего отсчетов.

Поскольку данные методы вычисляют неизвестные значения координат отсчетов неравномерно дискретизированного сигнала, чтобы далее по ним можно было восстановить сигнал, необходимо проводить оценку точности восстановления. По результатам численных экспериментов можно сделать вывод, что использование данных методов не обеспечивает повышения точности восстановления сигнала по сравнению с тривиальным подходом восстановления по таблице $[iT, u_i]$.

В своих работах Browning не приводит теоретического доказательства того, что целевая функция оптимизационной задачи всегда будет иметь глобальный минимум только в том случае, если значения координат отсчетов, по которым она была вычислена, совпадают с ис-

тинными значениями координат узлов сигнала. Как показывают результаты численных экспериментов, данное утверждение выполняется не всегда. Обнаруженная неработоспособность рассматриваемых методов определения истинных значений координат отсчётов, предложенных Browning, обусловлена неверными целевыми функциями.

С нашей точки зрения, для решения задачи восстановления дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке, точные значения узлов которой неизвестны, необходимо разрабатывать более простые «квазиоптимальные» методы аппроксимации данных сигналов, учитывающие их локальные особенности, что станет предметом последующих публикаций.

Литература

1. *Divi V., Wornell G.* Signal recovery in time-interleaved analog-to-digital converters // Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process., 2004, P. 593–596.
2. *Ahmad, Bashar I.* Applications of nonuniform sampling in wideband multi-channel communication systems. PhD thesis, University of Westminster, School of Electronics and Computer Science, 2011. P.180.
3. *Unser M.* Sampling –50 years after Shannon //Proceedings of the IEEE, 2000, vol. 88, no. 4.P. 569–587.
4. *Yen. J. L.* On Nonuniform sampling of bandwidth-limited signals. / IRE Transactions on Circuit Theory CT-3.1956, pp. 251–259.
5. *Shapiro H. S.* Alias free sampling of random noise / H. S. Shapiro, R. A. Silverman // Journal Society for Industrial and Applied Mathematics. 1960.Vol. 8, no. 2, pp. 225-248.
6. *Горелов Г.В.* Нерегулярная дискретизация сигналов / Г.В. Горелов. - М.: Радиоисвязь, 1982. - 256 с.
7. *Билинский, И. Я.* Стохастическая цифровая обработка непрерывных сигналов / И. Я. Билинский, А. К. Микелсон. – Рига: Зинатне, 1983. – 292 с.
8. *Feichtinger H.G., Grochenig K., Strohmer T.* Efficient numerical methods in non-uniform sampling theory // Numerische Mathematik, 1995. No 69. P. 423–440.
9. *Senay S.* Signal reconstruction from nonuniform samples using prolate spheroidal wave functions: theory and application. Doctoral Dissertation, Pittsburgh. 2011. P. 117.
10. *Selva. J.* Functionally weighted Lagrange interpolation of band-limited signals from nonuniform samples // IEEE Transactions on Signal Processing. 2009. V. 57, №1. P.168-181.
11. *Browning J.* A method of finding unknown continuous-time nonuniform sample locations of band-limited functions // Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures, and Implementations XIV. Edited by Luk, Franklin T. Proceedings of the SPIE. 2004. Vol. 5559. P. 289-296.
12. *Browning J.* Approximating Signals From Nonuniform Continuous Time Samples at Unknown Locations // IEEE Transactions on Signal Processing. 2007. Vol. 55, no. 4. P. 1549 – 1554.
13. *Marziliano P., Vetterli M.* Irregular sampling with unknown locations // IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1999, vol. 3. P. 1657 – 1660.
14. *Marziliano P., Vetterli M.* Reconstruction of irregularly sampled discrete-time bandlimited signals with unknown sampling locations // IEEE Transactions on Signal Processing, 2000, vol. 48, Issue 12.P. 3462 – 3471.
15. *Marziliano P.* Sampling Innovations./PhD. Thesis, Swiss Federal Institute of Technology Lausanne, Switzerland, 2001. no. 2369.
16. *Половко А.М.* Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации / А.М. Половко, П.Н. Бутусов; – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 320 с.
17. *Поршнев С.В., Кусайкин Д.В.* Исследование точности методов восстановления дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке // В мире научных открытий. – 2013. – Т. 46, № 10.С. 261–279.

*Статья поступила в редакцию 29.07.2014;
переработанный вариант — 10.12.2014.*

Поршнеv Сергей Владимирович

д.т.н., профессор, заведующий кафедрой радиоэлектроники информационных систем ИРИТ-РТФ УрФУ (620002, Екатеринбург, ул. Мира, 32), тел. (343) 375-95-57, профессор кафедры общепрофессиональных дисциплин технических специальностей УрТИСИ ФГОБУ ВПО «СибГУТИ» (620109, Екатеринбург, ул. Репина, 15),
e-mail: sergey_porshnev@mail.ru

Кусайкин Дмитрий Вячеславович

аспирант кафедры общепрофессиональных дисциплин технических специальностей УрТИСИ ФГОБУ ВПО «СибГУТИ» (620109, Екатеринбург, ул. Репина, 15),
тел. (343) 359-91-08, e-mail: kusaykin@mail.ru

Research of optimization methods for the reconstruction of irregularly sampled discrete-time signals with unknown sampling locations

S. Porshnev, D. Kusaykin

In this paper we consider investigation findings of reconstruction methods of non-uniform discrete-time signals with unknown sampling locations. In sampling applications the set on which a signal is sampled is $t_i = iT + \tau_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, T$ – sampling period; τ_i – jitter- a random number $\tau_i \in (-T/2, T/2)$, the exact value of which is not known. The present optimization methods of finding unknown non-uniform sample locations are identified. Reconstruction errors of the methods of finding unknown non-uniform sample locations are presented.

Keywords: non-uniform sampling, irregular sampling, reconstruction, unknown sampling locations.