

Стохастическая модель функционирования распределённых вычислительных систем с отказами и полным восстановлением*

К. В. Павский

В рамках теории массового обслуживания построена математическая модель функционирования вычислительных систем для расчёта показателей надёжности. Рассматривается система с полным восстановлением. Получено аналитическое решение для математического ожидания количества неисправных машин вычислительной системе и соответствующая дисперсия.

Ключевые слова: распределённые вычислительные системы, теория массового обслуживания, математическая модель, надёжность, математическое ожидание, дисперсия, аналитические решения.

1. Введение

Большемасштабные распределённые вычислительные системы (ВС) состоят из большого числа $N=10^4 \div 10^6$ элементарных машин (ЭМ) [1]. В таких системах, в силу большемасштабности, наличие отказов ЭМ становится уже не такой редкостью. Например, Sinisa Nikolic – руководитель одного из подразделений IBM (Director Competitive Sales; Business Line Responsibility for IBM's Competitive Sales Strategy across, Asia Pacific, Latin America, Central and Easter Europe, Russia, Middle East and Africa) – отметил (в 2012 году), что при текущей элементной базе в суперкомпьютерах из 10^6 ЭМ будут фиксироваться отказы машин в среднем каждые 5 минут [2]. Следовательно, с развитием вычислительных средств высокой производительности актуальность проблемы производительности, надёжности, живучести не только сохраняется, но и усиливается. Помимо повышения надёжности элементной базы необходимо проводить и развивать теоретические исследования.

Для анализа функционирования таких систем в данной работе применяется аппарат теории массового обслуживания [3].

2. Модель функционирования ВС

Имеется распределённая вычислительная система (ВС), состоящая из N элементарных машин (ЭМ) [1]. Время работы каждой ЭМ является случайной величиной, подчиненной экспоненциальному закону с параметром λ – интенсивностью выхода ЭМ из строя. Вышедшая из строя ЭМ попадает в восстанавливающую систему. Время восстановления является

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №13-07-00160, 15-37-20113).

случайной величиной, подчиненной экспоненциальному закону с параметром μ – интенсивностью восстановления. Предполагается, что независимо от числа ЭМ, находящихся в восстанавливающей системе, среднее время восстановления любого числа k , $k \leq N$ ЭМ, находящихся на восстановлении, $-t_{cp} = 1/\mu$ (рис. 1). Считаем, что в начальный момент времени было i машин на восстановлении.

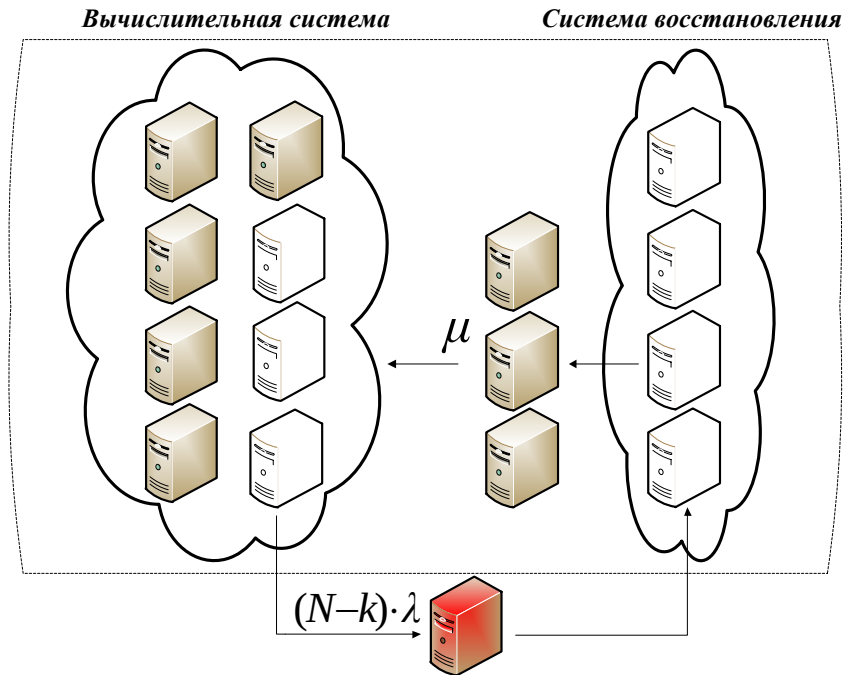


Рис. 1. Модель функционирования распределённой вычислительной системы

3. Математическая модель

На систему массового обслуживания (СМО) из бесконечного источника поступает пуассоновский поток требований интенсивностью $(N-k) \cdot \lambda$, $0 < k < N$. Требование, поступившее в СМО, вместе с другими $k-1$ требованиями ждет начала обслуживания. Через случайное время начинается обслуживание сразу всех k требований с интенсивностью μ . Пусть $P_k(t)$ – вероятность того, что в момент времени t в СМО находится k требований, $t \in [0, \infty)$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Тогда система дифференциальных уравнений для вероятностей $P_k(t)$ будет записана в виде:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -N \cdot \lambda P_0(t) + \mu \sum_{k=1}^N P_k(t), \\ P_k'(t) = -((N-k) \cdot \lambda + \mu) \cdot P_k(t) + ((N-(k-1)) \cdot \lambda \cdot P_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \\ P_N'(t) = -\mu \cdot P_N(t) + \lambda \cdot P_{N-1}(t), \end{cases} \quad (1)$$

начальные условия

$$P_i(0) = 1, \quad P_k(0) = 0, \quad k \neq i \quad (2)$$

и условие нормировки

$$\sum_{k=0}^N P_k(t) = 1, \quad t \in [0, \infty). \quad (3)$$

4. Расчет моментов

Получим аналитическое решение для математического ожидания $M(t)$ числа требований (в модели функционирования ВС – это отказавшие машины ВС) и дисперсии $D(t)$ методом, предложенным в [4, 5]. Для системы (1), с учетом (2) и (3), введем производящую функцию

$$F(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_k(t). \quad (4)$$

Умножая уравнение k системы (1) на z^k и суммируя, получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F(z, t) = & -\mu \cdot F(z, t) - N\lambda(1-z) \left(F(z, t) - P_N(t) \cdot z^N \right) + \\ & + \lambda z(1-z) \left(\frac{\partial}{\partial z} F(z, t) - NP_N(t) \cdot z^{N-1} \right) + \mu. \end{aligned} \quad (5)$$

Возьмем производную по переменной z от правой и левой частей выражения (5), тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t} F(z, t) = & -\mu \cdot \frac{\partial}{\partial z} F(z, t) + N\lambda(F(z, t) - P_N(t)z^N) - N\lambda(1-z) \left(\frac{\partial}{\partial z} F(z, t) - NP_N(t)z^{N-1} \right) - \\ & + \lambda(1-2z) \left(\frac{\partial}{\partial z} F(z, t) - NP_N(t)z^{N-1} \right) + \lambda z(1-z) \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} F(z, t) - N(N-1)P_N(t)z^{N-2} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Полагаем в (6) $z=1$, получаем

$$\frac{d}{dt} M(t) + (\mu + \lambda)M(t) = N\lambda.$$

Возьмем производную по переменной z от правой и левой частей (6), тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial}{\partial t} F(z, t) = & -\mu \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} F(z, t) + N\lambda \left(\frac{\partial}{\partial z} F(z, t) - NP_N(t)z^{N-1} \right) + \\ & + N\lambda \left(\frac{\partial}{\partial z} F(z, t) - NP_N(t)z^{N-1} \right) - N\lambda(1-z) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} F(z, t) - N(N-1)P_N(t)z^{N-2} \right) - \\ & - 2\lambda \left(\frac{\partial}{\partial z} F(z, t) - NP_N(t)z^{N-1} \right) + \lambda(1-2z) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} F(z, t) - N(N-1)P_N(t)z^{N-2} \right) - \\ & - \lambda z \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} F(z, t) - N(N-1)P_N(t)z^{N-2} \right) + \lambda z(1-z) \left(\frac{\partial^3}{\partial z^3} F(z, t) - N(N-1)(N-2)P_N(t)z^{N-3} \right) + \\ & + \lambda z(1-z) \left(\frac{\partial^3}{\partial z^3} F(z, t) - N(N-1)(N-2)P_N(t)z^{N-3} \right). \end{aligned}$$

Полагаем $z=1$ в последнем равенстве, тогда

$$\frac{d}{dt} Q(t) + (\mu + 2\lambda) \cdot Q(t) = 2\lambda(N-1)(M(t) - NP_N(t)) + 2\lambda N(N-1)P_N(t),$$

где $Q(t) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} F(z, t) \Big|_{z=1}$.

Итак, после необходимых преобразований получаем

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} M(t) + (\mu + \lambda)M(t) = N\lambda, \\ \frac{d}{dt} Q(t) + (\mu + 2\lambda) \cdot Q(t) = 2\lambda(N-1) \cdot M(t), \\ Q(t) = D(t) - M(t) + M^2(t), \end{cases} \quad (7)$$

начальные условия определяем из (2)

$$M(0) = i, \quad D(0) = 0. \quad (8)$$

С учетом начальных условий (8) решением для (7) будет

$$\begin{cases} M(t) = \frac{N\lambda}{\mu + \lambda} + \frac{\mu \cdot i - \lambda(N-i)}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda) \cdot t}, \\ D(t) = \frac{2N(N-1)\lambda^2}{(\mu + \lambda)(\mu + 2\lambda)} + C \cdot e^{-(\mu + 2\lambda) \cdot t} + \\ + 2(N-1) \cdot \frac{\mu \cdot i - \lambda(N-i)}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda) \cdot t} + M(t) - M^2(t), \end{cases} \quad (9)$$

где $C = i^2 - i - \frac{2N(N-1)\lambda^2}{(\mu + \lambda)(\mu + 2\lambda)} - 2(N-1) \frac{\mu \cdot i - \lambda(N-i)}{\mu + \lambda}$.

На рис. 2–4 представлен расчёт среднего числа отказавших машин, находящихся в восстанавливающей системе, и дисперсии (9) при $\lambda = 10^{-4}$ 1/ч, $N = 2 \cdot 10^4$ ЭМ, $i = 0$ ЭМ.

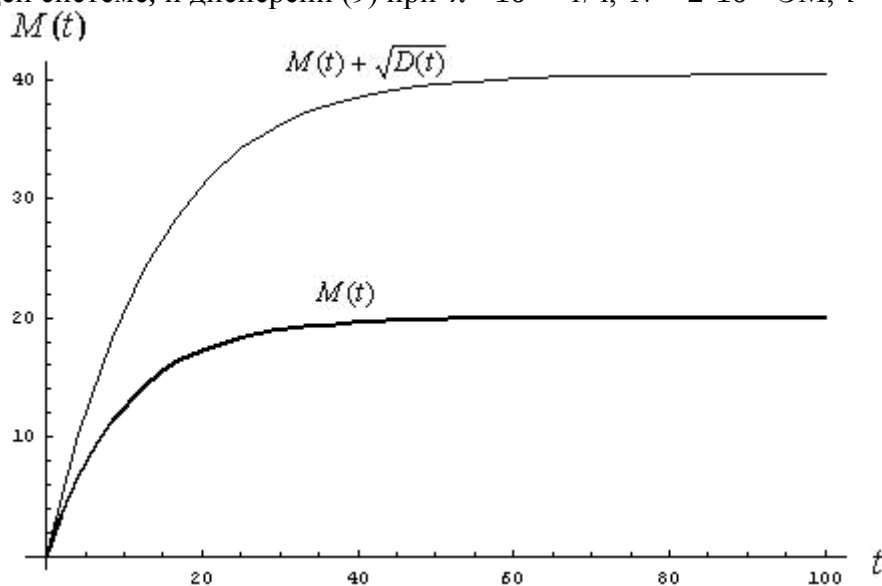


Рис. 2. Зависимость среднего числа отказавших машин в восстанавливающей системе от времени t при $\lambda = 10^{-4}$ 1/ч, $N = 2 \cdot 10^4$, $i = 0$, $\mu = 0.1$ 1/ч

Из рисунков видно, что при отсутствии резерва в среднем ожидает восстановления до 40, 9 и 5 ЭМ при суммарном восстановлении отказавших машин в течение 10, 2.0 и 1.0 ч, соответственно. Стабилизация числа ЭМ, ожидающих восстановления, происходит в течение 153 ч, 32 ч и 6 ч, соответственно.

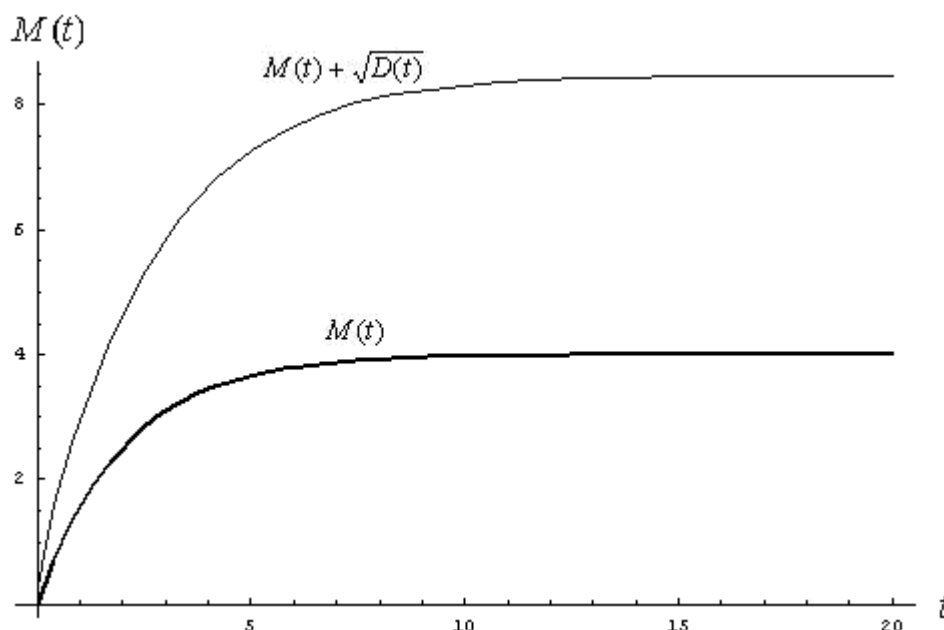


Рис. 3. Зависимость среднего числа отказавших машин в восстанавливающей системе от времени t при $\lambda = 10^{-4} 1/\text{ч}$, $N = 2 \cdot 10^4$, $i = 0$, $\mu = 0.5 1/\text{ч}$

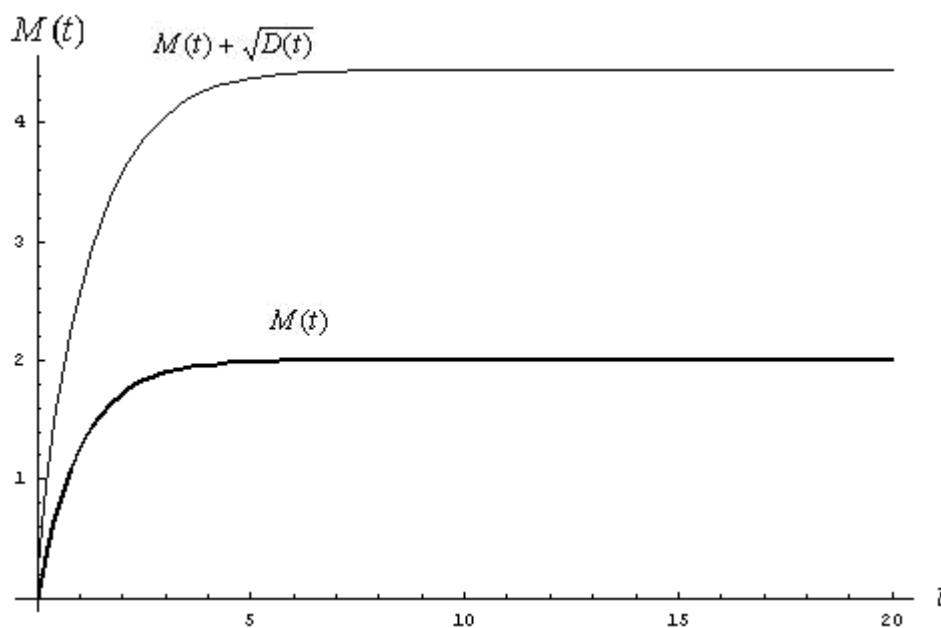


Рис. 4. Зависимость среднего числа отказавших машин в восстанавливающей системе от времени t при $\lambda = 10^{-4} 1/\text{ч}$, $N = 2 \cdot 10^4$, $i = 0$, $\mu = 1.0 1/\text{ч}$

Таким образом, для данного режима функционирования распределённой вычислительной системы возможно оценить требуемый объём избыточности по машинам для поддержания требуемой производительности системы. С другой стороны, уменьшение продолжительности восстановления вышедших из строя ЭМ позволяет уменьшить объём избыточности без потери качества функционирования вычислительной системы.

5. Заключение

В работах [6, 7] показывается, что предположение о выходе из строя вычислительных модулей (ЭМ) по экспоненциальному закону не всегда даёт хорошее приближение. Хорошее приближение даёт распределение Вейбулла либо логарифмически нормальное (т.е. нормальное распределение от логарифма случайной величины). В то же время исследование функционирования ВС в предположении справедливости экспоненциального закона выхода из строя ЭМ позволяет благодаря хорошо развитой теории получать глубокие результаты, в отличие от использования других законов распределения [8].

Литература

1. *Хорошевский В.Г.* Архитектура вычислительных систем. М.: МГТУ им. Баумана, 2008. – 520 с.
2. *Nikolic, S.* High Performance Computing Directions: The Drive to ExaScale Computing. / S. Nikolic // Труды международной научной конференции “Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ’2012). – Новосибирск, 2012, [Электронный ресурс] // URL: <http://pavt.susu.ru/2012/talks/Nikolic.pdf> (дата обращения 16.03.2015).
3. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
4. *Павский В.А., Павский К.В., Хорошевский В.Г.* Вычисление показателей живучести распределенных вычислительных систем и осуществимости решения задач // Искусственный интеллект. – 2006. – №4. – С. 28-34.
5. *Хорошевский В.Г., Павский В.А., Павский К.В.* Расчет показателей живучести распределенных вычислительных систем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2011. – №2 – С. 81-88.
6. *Schroeder B. A, Gibson Garth A.* large-scale study of failures in high-performance computing systems // Dependable Systems and Networks (DSN2006): proceedings of the International Conference. – USA: Philadelphia, PA, 2006. – P. 10.
7. *Gibson Garth A.* [Электронный ресурс] // Analyzing failure data: [сайт]. URL: <http://www.pdl.cmu.edu/FailureData/> (дата обращения 27.02.2015 г.).
8. *Pavskii V.A., Pavskii K.V.* Stochastic simulation and analysis of the operation of computing systems with structural redundancy // Optoelectronics, instrumentation and data processing, Allerton Press, Inc., 2014. Vol.50, No 4, pp. 363 - 369.

Статья поступила в редакцию 12.03.2015

Павский Кирилл Валерьевич

д.т.н., доцент, доцент кафедры ВС ФГБОУ ВПО «СибГУТИ», научный сотрудник Лаборатории ВС ИФП СО РАН (630090, Новосибирск, Лаврентьева, 13),
тел. (383) 3332171, e-mail: pkv@isp.nsc.ru.

Calculation of random variates for Erlang distribution of service time

Kirill V. Pavsky

In this paper, a mathematical model of computer systems operation for calculating reliability indices is constructed. The model is based on the queuing theory. The system with the total restoration is considered. The analytical solutions for mathematical expectation of the number of failed machines and appropriate dispersions are obtained.

Keywords: distributed computer systems, queuing theory, reliability, mathematical model, mathematical expectation, dispersions, analytical solutions.