

Матричные модели функционирования оборудования систем связи

Б. П. Зеленцов

Приведен подход к аналитическому моделированию функционирования телекоммуникационного оборудования на основе теории процессов Маркова с использованием матричных методов при выполнении математических операций. Процессы в дискретном и непрерывном времени рассматриваются одновременно. Для них приведен ряд вероятностных, временных, частотных характеристик: вероятности состояний в переходном и стационарном режимах, время нахождения в подмножестве состояний, вероятности переходов между подмножествами состояний, частоты переходов между состояниями и подмножествами состояний. Эти характеристики позволяют вычислять широкий класс показателей эксплуатации, функционирования и надежности телекоммуникационного оборудования с учетом его назначения и специфики.

Ключевые слова: цепь Маркова, процесс Маркова, матрица переходных вероятностей, матрица интенсивностей, предельные вероятности состояний, среднее время нахождения в подмножестве состояний, частоты переходов между состояниями и подмножествами состояний.

1. Введение

Оборудование систем связи относится к системам длительного использования и обладает всеми особенностями сложных систем, такими как большое число элементов различного назначения и высокая степень их связности, многоцелевое назначение, сложность алгоритмов управления, наличие различных видов избыточности и др. Математическое моделирование позволяет определять необходимую или оптимальную структуру при проектировании новых и модернизации существующих систем связи, обеспечивать их эффективное функционирование и необходимое качество обслуживания абонентов.

Одной из основных особенностей таких систем является наличие случайных факторов, ввиду чего вероятностные закономерности являются преобладающими при их моделировании. В инженерной практике используют аналитические, алгоритмические и имитационные модели, в которых реализуются разные формы зависимости между исходными и выходными характеристиками системы. К аналитическим моделям относятся модели, основанные на логико-вероятностных методах, методах теории графов, на составлении и решении систем дифференциальных уравнений, методах математического программирования, марковских и полумарковских процессах, матричных методах. С усложнением систем аналитические зависимости между исходными и выходными характеристиками систем становятся сложными и неудобными для практического применения. В этом случае целесообразно переходить к алгоритмическому и имитационному моделированию, которые реализуются в виде программного алгоритма, когда соответствие между исходными и выходными характеристиками системы устанавливаются в числовом виде [2, 12]. Этот подход может найти применение также при моделировании процессов в телекоммуникационных сетях и в их оборудовании [1, 6].

В данной статье приведены соображения по аналитическому моделированию на основе марковских процессов, для описания которых применяются матричные методы с учетом опыта, накопленного в области надежности [5, 10]. Матричные методы привлекательны ввиду их компактности, простоты матричных преобразований и возможности реализации с помощью современных средств [4]. Рассмотрены возможные варианты матричных методов, которые могут найти применение в инженерной практике для моделирования функционирования систем.

В математической модели целесообразно выделить три типа характеристик: исходные, промежуточные и выходные. Промежуточные характеристики получают на основе исходных характеристик путем использования различных математических методов. Такими промежуточными характеристиками могут быть вероятности состояний и подмножеств состояний в переходном и установившемся режимах, средние времена нахождения системы в состояниях и подмножествах состояний, частоты переходов между состояниями и подмножествами состояний и др. Выходные характеристики технических систем, получаемые на основе промежуточных характеристик, определяются их назначением и спецификой. Выходные характеристики систем получают на основе промежуточных характеристик. В частности, надежность оборудования систем связи может быть описана такими характеристиками, как коэффициент готовности, вероятность безотказной работы, частота отказов, среднее время безотказной работы и среднее время восстановления и др.

2. Исходные характеристики

Основой модели является дискретное множество W состояний системы. Процесс переходов от состояния к состоянию может быть в дискретном или непрерывном времени. Возможен также комбинированный случай: переходы между состояниями могут происходить совместно в дискретном и непрерывном времени. Формирование множества состояний системы может быть проведено как вручную, так и программным способом.

Если условия функционирования системы не изменяются во времени, то переходы между состояниями представляют собой однородный процесс, в котором характеристики переходов между состояниями не изменяются во времени. В дискретном времени эти переходы описываются однородной цепью Маркова, характеристиками переходов между состояниями являются переходные вероятности (вероятности переходов между состояниями) [13]. В непрерывном времени переходы описываются однородным марковским процессом (или цепью с непрерывным временем [8]), характеристиками которого являются интенсивности переходов между состояниями [3, 7, 14].

Дальнейшие рассуждения и результаты приводятся одновременно для процесса в дискретном и непрерывном времени.

Как переходные вероятности, так и интенсивности переходов записываются в виде исходной матрицы переходных вероятностей P [7, 10, 11, 13] и исходной матрицы интенсивностей Λ [3, 14] (последнюю называют еще инфинитезимальной, консервативной [8], дифференциальной [14] матрицей):

$$\text{а) } P = \|p_{ij}\|; \quad \text{б) } \Lambda = \|\lambda_{ij}\|, \quad (1)$$

где p_{ij} – вероятность непосредственного перехода $w_i \rightarrow w_j$ на одном шаге; элемент λ_{ij} ($i \neq j$) равен интенсивности непосредственного перехода $w_i \rightarrow w_j$ в непрерывном времени; $w_i \in W$, $w_j \in W$.

Следует отметить, что матрица переходных вероятностей P является стохастической [8, 11, 13, 14], а матрица интенсивностей Λ – квазистохастической [11], то есть

$$\text{а) } \sum_j p_{ij} = 1; \quad \text{б) } \sum_j \lambda_{ij} = 0. \quad (2)$$

В матричном виде эти соотношения можно представить в виде:

$$\text{а) } P \cdot \dot{e} = \dot{e}; \quad \text{б) } \Lambda \cdot \dot{e} = \dot{O}, \quad (3)$$

где $\dot{e}$ – столбец, все элементы которого равны 1; $\dot{O}$ – столбец, все элементы которого равны 0.

Из этих соотношений следует:

$$\text{а) } p_{ii} = 1 - \sum_{j, j \neq i} p_{ij}; \quad \text{б) } \lambda_{ii} = - \sum_{j, j \neq i} \lambda_{ij}. \quad (4)$$

3. Вероятности состояний в переходном режиме

Исходные матрицы P и Λ достаточны для нахождения вероятностей состояний однородного процесса в произвольный момент времени. С помощью этих матриц могут быть получены матрицы вероятностей состояний на произвольном шаге для процесса в дискретном времени и матрицы вероятностей состояний в произвольный момент времени для процесса в непрерывном времени:

$$\text{а) } P(n) = \|p_{ij}(n)\|; \quad \text{б) } P(t) = \|p_{ij}(t)\|, \quad (5)$$

где $p_{ij}(n)$ – вероятность того, что на n -м шаге процесс будет в состоянии w_j при условии, что состояние w_i было начальным; $p_{ij}(t)$ – вероятность того, что в момент времени t процесс будет в состоянии w_j при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ процесс находился в состоянии w_i .

Для однородного процесса матрицу $P(n)$ получают путем возведения в степень исходной матрицы [9], а матрицу $P(t)$ – путем решения системы дифференциальных уравнений Колмогорова в матричной форме [3, 8]:

$$\text{а) } P(n) = P^n; \quad \text{б) } P'(t) = P(t) \cdot \Lambda, \quad (6)$$

где $P'(t)$ – матрица, каждый элемент которой равен производной соответствующего элемента матрицы $P(t)$. Следует отметить, что матрицы $P(n)$ и $P(t)$ являются стохастическими.

Решение матричного дифференциального уравнения здесь не рассматривается. Отметим, что решение путем преобразования Лапласа требует обращения функциональной матрицы и перевода элементов матрицы из области функций-изображений в область функций-оригиналов.

Если известно начальное распределение вероятностей состояний, то можно найти распределение вероятностей состояний соответственно на произвольном шаге или в произвольный момент времени:

$$\text{а) } \bar{p}(n) = \|p_j(n)\| = \bar{p}(0) \cdot P^n; \quad \text{б) } \bar{p}(t) = \|p_j(t)\| = \bar{p}(0) \cdot P(t), \quad (7)$$

где $\bar{p}(0) = \|p_i(0)\|$ – распределение начальных вероятностей состояний, то есть вероятности состояний при $n = 0$ или $t = 0$; $\bar{p}(n)$ – распределение вероятностей состояний на произвольном шаге при заданном начальном распределении; $\bar{p}(t)$ – распределение вероятностей состояний в момент времени t при заданном начальном распределении, $p_j(n)$ – вероятность того, что на n -м шаге система находится в состоянии w_j ; $p_j(t)$ – вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии w_j .

Следует отметить, что распределения $\bar{p}(0)$, $\bar{p}(n)$ и $\bar{p}(t)$ являются стохастическими.

4. Предельные вероятности эргодического процесса

Известно, что для эргодической однородной цепи Маркова и эргодического однородного марковского процесса предельные вероятности существуют и не зависят от начального состояния [Фед12,Хов64]:

$$\text{а) } \pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n); \quad \text{б) } \pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t), \quad (8)$$

где π_j – предельная вероятность состояния w_j . Предельные вероятности называют также финальными [7]. Для процесса в дискретном времени π_j – это средняя доля числа шагов нахождения в состоянии w_j при бесконечном протекании процесса, а для процесса в непрерывном времени π_j – это средняя доля времени нахождения в состоянии w_j при этом же условии.

Предельные вероятности могут быть также представлены в виде стационарного распределения (строки) $\bar{\pi}$ [13]:

$$\text{а) } \bar{\pi} = \|\pi_j\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{p}(n); \quad \text{б) } \bar{\pi} = \|\pi_j\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{p}(t). \quad (9)$$

Соотношения между предельными вероятностями и исходными матричными характеристиками переходов между состояниями имеют следующий вид:

$$\text{а) } \bar{\pi} \cdot P = \bar{\pi}; \quad \text{б) } \bar{\pi} \cdot \Lambda = \bar{O}, \quad (10)$$

где $\bar{O}$ – строка, все элементы которой равны нулю.

Если процесс переходов от состояния к состоянию является эргодическим, то предельные вероятности состояний могут быть вычислены по матрицам P и Λ . Вычисления могут быть произведены по формулам двух типов, которые получены из соотношений (10). Первый тип формул основан на вычислении определителей, а второй тип – на обращении матриц [5]. Формулы приведены в табл. 1.

Таблица 1. Формулы для вычисления предельных вероятностей

Тип формулы	Формулы для процесса	
	в дискретном времени	в непрерывном времени
1. На основе определителей	а) $\pi_j = \frac{\det(E - P_j)}{\sum_{k=1}^m \det(E - P_k)}$	б) $\pi_j = \frac{\det \Lambda_j}{\sum_{k=1}^m \det \Lambda_k}$
2. На основе обращения матриц	а) $\pi_j = \frac{1}{1 + \bar{p}_j(E - P_j)^{-1} \dot{e}}$	б) $\pi_j = \frac{1}{1 - \bar{\lambda}_j \Lambda_j^{-1} \dot{e}}$

В формулах обозначено: m – число состояний системы (или порядок исходной матрицы); P_j – матрица, полученная из исходной матрицы P удалением из нее j -й строки и j -го столбца; E – единичная матрица соответствующего порядка; $\det(E - P_j)$ – определитель матрицы $E - P_j$; $\bar{p}_j$ – j -я строка матрицы P без элемента p_{jj} ; Λ_j – матрица, полученная из исходной матрицы Λ удалением j -й строки и j -го столбца; $\det \Lambda_j$ – определитель матрицы Λ_j ; $\bar{\lambda}_j$ – j -я строка матрицы Λ без элемента λ_{jj} ; $\dot{e}$ – столбец, все элементы которого равны 1.

5. Время нахождения в подмножестве состояний

Рассмотрим продолжительность нахождения в подмножестве состояний. Пусть U – некоторое подмножество несущественных состояний. После вхождения в это подмножество

система пребывает некоторое время в этом подмножестве, а затем покидает его. Рассмотрим нахождение в множестве U для марковской цепи и марковского процесса.

Исходными характеристиками переходов на подмножестве U являются матрица переходных вероятностей марковской цепи P_{UU} и матрица интенсивностей марковского процесса Λ_{UU} на подмножестве U :

$$\text{а) } P_{UU} = \|p_{ij}\|; \quad \text{б) } \Lambda_{UU} = \|\lambda_{ij}\|, \quad (11)$$

где $u_i \in U, u_j \in U$.

Матрицы P_{UU} и Λ_{UU} являются подматрицами соответственно матриц P и Λ . Они получены из матриц P и Λ , в которых оставлены строки и столбцы, соответствующие состояниям подмножества U , а остальные строки и столбцы удалены.

Характеристиками продолжительности нахождения в состояниях подмножества U при любом начальном состоянии являются матрица N_U средних чисел шагов нахождения в состояниях марковской цепи и матрица T_U средних времен нахождения в состояниях марковского процесса [5]:

$$\text{а) } N_U = \|n_U(i, j)\| = (E - P_{UU})^{-1}; \quad \text{б) } T_U = \|t_U(i, j)\| = -\Lambda_{UU}^{-1}, \quad (12)$$

где $n_U(i, j)$ – среднее число шагов нахождения в состоянии u_j до выхода из U при условии, что состояние $u_i \in U$ является начальным; $t_U(i, j)$ – среднее время нахождения в состоянии u_j до выхода из U при условии, что состояние $u_i \in U$ является начальным. Матрицу N_U называют фундаментальной матрицей марковской цепи [7, 9].

На основе матриц N_U и T_U могут быть получены промежуточные характеристики продолжительности нахождения в подмножестве U и в состояниях этого подмножества, приведенные в табл. 2.

Таблица 2. Характеристики продолжительности нахождения в подмножестве несущественных состояний U и в состояниях этого подмножества

1. Продолжительность нахождения в подмножестве U до выхода из U при данном начальном состоянии:	
а) столбец среднего числа шагов нахождения в подмножестве U , где $n_U(i)$ – среднее число шагов нахождения в подмножестве U при условии, что состояние u_i является начальным;	$\dot{n}_U = \ n_U(i)\ = N_U \cdot \dot{e}$
б) столбец среднего времени нахождения в подмножестве U , где $t_U(i)$ – среднее время нахождения в подмножестве U при условии, что состояние u_i является начальным.	$\dot{t}_U = \ t_U(i)\ = T_U \cdot \dot{e}$
2. Продолжительность нахождения в состояниях подмножества U до выхода из U при заданном начальном распределении вероятностей состояний:	
а) строка среднего числа шагов нахождения в состояниях подмножества U , где $n_U(j)$ – среднее число шагов нахождения в состоянии u_j до выхода из U при заданном начальном распределении;	$\bar{n}_U = \ n_U(j)\ = \bar{p}_U(0) \cdot N_U$
б) строка среднего времени нахождения в состояниях подмножества U , где $t_U(j)$ – среднее время нахождения в состоянии u_j до выхода из U при заданном начальном распределении.	$\bar{t}_U = \ t_U(j)\ = \bar{p}_U(0) \cdot T_U$
3. Продолжительность нахождения в подмножестве U до выхода из U при известном начальном распределении вероятностей состояний:	
а) среднее число шагов нахождения в подмножестве U	$n_U = \bar{n}_U \cdot \dot{e} = \bar{p}_U(0) \cdot N_U \cdot \dot{e}$
б) среднее время нахождения в подмножестве U	$t_U = \bar{t}_U \cdot \dot{e} = \bar{p}_U(0) \cdot T_U \cdot \dot{e}$

В таблице обозначено: $\bar{p}_U(0) = \|p_{Ui}(0)\|$ – распределение начальных вероятностей состояний подмножества U ; $p_{Ui}(0)$ – вероятность того, что состояние u_i является начальным при вхождении в подмножество U .

В частном случае, если множество U состоит из одного состояния, то

$$n_{ii} = \frac{1}{1 - p_{ii}}; \quad t_{ii} = -\frac{1}{\lambda_{ii}}, \quad (13)$$

где n_{ii} и t_{ii} – соответственно среднее число шагов и среднее время нахождения в состоянии u_i после попадания в него.

6. Переходы системы между подмножествами состояний

Матричный метод позволяет вычислять не только характеристики нахождения в множестве состояний, но и описывать переходы между подмножествами состояний. Поясним на примере разбиения эргодического множества состояний W на два подмножества U и V по некоторому признаку: $W = U + V$, $U \cdot V = \emptyset$. Матричные характеристики переходов между состояниями марковской цепи и марковского процесса разбиваются при этом на четыре блочных подматрицы в соответствии с UV -разбиением множества W :

$$P = \begin{bmatrix} P_{UU} & P_{UV} \\ P_{VU} & P_{VV} \end{bmatrix}; \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{UU} & \Lambda_{UV} \\ \Lambda_{VU} & \Lambda_{VV} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Переходы между подмножествами U и V описываются матрицами вероятностей попадания B_{UV} и B_{VU} , которые описывают пребывание системы внутри одного подмножества, а затем переход в другое подмножество. Эти матрицы вычисляются с помощью блочных подматриц [5, 9]. Формулы приведены в табл. 3.

Таблица 3. Формулы для вычисления матриц вероятностей попадания

Вариант матрицы вероятностей попадания	Формулы для процесса	
	в дискретном времени	в непрерывном времени
1. Матрица вероятностей попадания при переходе $U \rightarrow V$	а) $B_{UV} = \ b_{UV}(i, j)\ = (E - P_{UU})^{-1} \cdot P_{UV}$	б) $B_{UV} = \ b_{UV}(i, j)\ = -\Lambda_{UU}^{-1} \cdot \Lambda_{UV}$
2. Матрица вероятностей попадания при переходе $V \rightarrow U$	а) $B_{VU} = \ b_{VU}(i, j)\ = (E - P_{VV})^{-1} \cdot P_{VU}$	б) $B_{VU} = \ b_{VU}(i, j)\ = -\Lambda_{VV}^{-1} \cdot \Lambda_{VU}$

В таблице обозначено: $b_{UV}(i, j)$ – вероятность того, что при переходе $U \rightarrow V$ система попадет в состояние $v_j \in V$ при условии, что состояние $u_i \in U$ является начальным; $b_{VU}(i, j)$ – вероятность того, что при переходе $V \rightarrow U$ система попадет в состояние $u_j \in U$ при условии, что состояние $v_i \in V$ является начальным.

С помощью матриц B_{UV} и B_{VU} могут быть получены распределения начальных вероятностей состояний одного подмножества по распределениям начальных вероятностей состояний другого подмножества:

$$\bar{p}_U(0) = \bar{p}_V(0) \cdot B_{VU}; \quad \bar{p}_V(0) = \bar{p}_U(0) \cdot B_{UV}, \quad (15)$$

где $\bar{p}_U(0)$ и $\bar{p}_V(0)$ – распределения начальных вероятностей состояний соответственно подмножеств U и V , каждое из которых либо задано, либо получено из другого распределения с помощью соответствующей матрицы вероятностей попаданий.

7. Циклическое функционирование системы

При разбиении эргодического множества W на непересекающиеся подмножества U и V функционирование систем длительного использования можно представить с помощью циклов.

Нахождение системы в подмножестве U и следующее за ним нахождение в подмножестве V названо UV -циклом системы, а нахождение в подмножестве V и следующее за ним нахождение в подмножестве U – VU -циклом. Тогда время функционирования системы можно разбить на циклы, состоящие из последовательных переходов из одного подмножества состояний в другое. Переходы между двумя соседними циклами описываются матрицей A_U вероятностей возвращения в подмножество U для UV -цикла или матрицей A_V возвращения в подмножество V для VU -цикла [5, 9]:

$$A_U = \|a_U(i, j)\| = B_{UV} \cdot B_{VU}; \quad A_V = \|a_V(i, j)\| = B_{VU} \cdot B_{UV}, \quad (16)$$

где $a_U(i, j)$ – вероятность того, система попадет в состояние $u_j \in U$ при возвращении из V в U при условии, что состояние $u_i \in U$ является начальным на предыдущем цикле; аналогичный смысл имеет матрица возвращения в подмножество V .

Формально матрицы A_U и A_V являются стохастическими матрицами переходных вероятностей марковской цепи. Это позволяет рассматривать переходный и установившийся режимы при циклическом функционировании системы.

Если первый UV -цикл считать начальным с начальным распределением $\bar{r}_U(1)$ вероятностей состояний подмножества U , то начальное распределение вероятностей состояний подмножества U на c -м цикле будет

$$\bar{r}_U(c) = \bar{r}_U(1) \cdot A_U^{c-1}. \quad (17)$$

Очевидно, что с возрастанием номера цикла начальное распределение вероятностей состояний стабилизируется:

$$\bar{r}_U = \lim_{c \rightarrow \infty} \bar{r}_U(c); \quad \bar{r}_V = \lim_{c \rightarrow \infty} \bar{r}_V(c), \quad (18)$$

где $\bar{r}_U$ и $\bar{r}_V$ – распределения предельных начальных вероятностей состояний соответственно подмножеств U и V .

Таким образом, матрицы B_{UV} и B_{VU} описывают попадания при переходах между разными подмножествами, а матрицы A_U и A_V – возвращения в одноименные подмножества на соседних циклах.

Полезно отметить частный случай: если матрица A_U имеет одинаковые строки, то строка этой матрицы и будет предельным распределением $\bar{r}_U$.

Продолжительность нахождения в подмножествах состояний U и V при циклическом функционировании приведена в табл. 4.

Таблица 4. Продолжительность нахождения в подмножествах состояний при циклическом функционировании системы

1. Продолжительность нахождения в подмножествах U и V на c -м цикле:	
а) среднее число шагов	$n_U(c) = \bar{r}_U(c) \cdot N_U \cdot \dot{e}; \quad n_V(c) = \bar{r}_V(c) \cdot N_V \cdot \dot{e}$
б) среднее время	$t_U(c) = \bar{r}_U(c) \cdot T_U \cdot \dot{e}; \quad t_V(c) = \bar{r}_V(c) \cdot T_V \cdot \dot{e}$
2. Продолжительность c -го UV -цикла:	
а) среднее число шагов	$n_{UV}(c) = n_U(c) + n_V(c)$
б) среднее время	$t_{UV}(c) = t_U(c) + t_V(c)$
3. Продолжительность нахождения в состояниях подмножества U и V в установившемся режиме:	
а) среднее число шагов	$n_U = \bar{r}_U \cdot N_U \cdot \dot{e}; \quad n_V = \bar{r}_V \cdot N_V \cdot \dot{e}$
б) среднее время	$t_U = \bar{r}_U \cdot T_U \cdot \dot{e}; \quad t_V = \bar{r}_V \cdot T_V \cdot \dot{e}$
4. Продолжительность цикла в установившемся режиме:	
а) среднее число шагов	$n_{UV} = n_U + n_V$
б) среднее время	$t_{UV} = t_U + t_V$

Замечание. Обозначения n_U и t_U в табл. 2 и 4 имеют разный смысл.

8. Частоты переходов между состояниями и подмножествами состояний

Введем понятие частоты ω_i вхождения системы в состояние w_i в стационарном режиме. Для процесса в дискретном времени частота ω_i – это среднее число вхождений в состояние w_i за один шаг, а для процесса в непрерывном времени ω_i – это среднее число вхождений в состояние w_i в единицу времени. Найдем зависимость между предельной вероятностью π_i и частотой ω_i .

За достаточно большое число шагов n среднее число вхождений в состояние w_i составит $\omega_i \cdot n$. При каждом вхождении в состояние w_i процесс будет находиться в нем в среднем n_{ii} шагов. Поэтому среднее число шагов нахождения в состоянии w_i за n шагов составит $\omega_i \cdot n \cdot n_{ii}$. С другой стороны, среднее число шагов нахождения в состоянии w_i составит $\pi_i \cdot n$, поскольку предельная вероятность π_i является средней долей числа шагов нахождения системы в состоянии w_i . Из равенства этих средних чисел шагов следует, что $\pi_i = \omega_i \cdot n_{ii}$ или $\omega_i = \pi_i \cdot (1 - p_{ii})$.

Аналогично для процесса в непрерывном времени за промежуток времени t среднее число вхождений в состояние w_i составит $\omega_i \cdot t$. При каждом вхождении в состояние w_i среднее время пребывания в этом состоянии будет t_{ii} , а среднее время нахождения в состоянии w_i на промежутке времени t составит $\omega_i \cdot t \cdot t_{ii}$. Также как и для дискретного процесса, среднее время нахождения в состоянии за время t составит $\pi_i \cdot t$. Из равенства этих времен следует, что $\pi_i = \omega_i \cdot t_{ii}$, или $\omega_i = -\pi_i \cdot \lambda_{ii}$.

Частота ω_{ij} непосредственных переходов от состояния w_i к состоянию w_j определяется частотой ω_i и вероятностью того, что процесс перейдет в состояние w_j , когда он покидает состояние w_i . Эта вероятность для процесса в дискретном и непрерывном времени [5]:

$$\text{а) } \hat{p}_{ij} = p_{ij} / (1 - p_{ii}); \quad \text{б) } \hat{p}_{ij} = -\lambda_{ij} / \lambda_{ii}, \quad i \neq j. \quad (19)$$

Тогда частота непосредственных переходов $w_i \rightarrow w_j$ для процесса в дискретном и непрерывном времени примет вид:

$$\text{а) } \omega_{ij} = \omega_i \cdot \hat{p}_{ij} = \pi_i \cdot p_{ij}; \quad \text{б) } \omega_{ij} = \omega_i \cdot \hat{p}_{ij} = \pi_i \cdot \lambda_{ij}, \quad i \neq j. \quad (20)$$

Частота ω_{ij} , $i \neq j$, имеет смысл, аналогичный смыслу частоты ω_i : ω_{ij} – это среднее число переходов $w_i \rightarrow w_j$, приходящееся на один шаг для процесса в дискретном времени или в единицу времени для процесса в непрерывном времени.

Обозначим через ω_{ii} сумму частот непосредственных переходов из состояния w_i в другие состояния, взятую с обратным знаком:

$$\omega_{ii} = - \sum_{j, j \neq i} \omega_{ij} = -\omega_i. \quad (21)$$

В матричной форме зависимость между частотами, предельными вероятностями и исходными характеристиками для процесса в дискретном и непрерывном времени:

$$\text{а) } \Omega = \Pi_{\text{dg}} \cdot (P - E); \quad \text{б) } \Omega = \Pi_{\text{dg}} \cdot \Lambda, \quad (22)$$

где $\Omega = \|\omega_{ij}\|$ – матрица частот непосредственных переходов между состояниями; Π_{dg} – матрица, диагональные элементы которой равны соответствующим предельным вероятностям состояний, а остальные элементы равны нулю.

Представим матрицы Ω и Π_{dg} в виде четырех блочных подматриц в соответствии с разбиением множества W на два подмножества U и V и выполним умножение (22) в виде блочных подматриц. В результате получим соотношения, приведенные в табл. 5.

Таблица 5. Соотношения между блочными подматрицами частот, переходных вероятностей и интенсивностей переходов для процессов в дискретном и непрерывном времени

№ п/п	Формулы для процесса	
	в дискретном времени	в непрерывном времени
1	а) $\Omega_{UU} = \Pi_{\text{dg}UU} \cdot (P_{UU} - E)$	б) $\Omega_{UU} = \Pi_{\text{dg}UU} \cdot \Lambda_{UU}$
2	а) $\Omega_{VV} = \Pi_{\text{dg}VV} \cdot (P_{VV} - E)$	б) $\Omega_{VV} = \Pi_{\text{dg}VV} \cdot \Lambda_{VV}$
3	а) $\Omega_{UV} = \Pi_{\text{dg}UU} \cdot P_{UV}$	б) $\Omega_{UV} = \Pi_{\text{dg}UU} \cdot \Lambda_{UV}$
4	а) $\Omega_{VU} = \Pi_{\text{dg}VV} \cdot P_{VU}$	б) $\Omega_{VU} = \Pi_{\text{dg}VV} \cdot \Lambda_{VU}$

Частота ω_{UV} переходов из подмножества U в подмножество V , обозначаемых $U \rightarrow V$, определяется суммой частот всех возможных переходов $U \rightarrow V$:

$$\omega_{UV} = \sum_{u_i} \sum_{v_j} \omega_{ij}. \quad (23)$$

В матричном виде эта частота для процесса в дискретном и непрерывном времени:

$$\text{а) } \omega_{UV} = \bar{\pi}_U \cdot P_{UV} \cdot \dot{e}; \quad \text{б) } \omega_{UV} = \bar{\pi}_U \cdot \Lambda_{UV} \cdot \dot{e}, \quad (24)$$

где $\bar{\pi}_U$ – часть распределения $\bar{\pi}$, соответствующая подмножеству U .

Как и ранее, частота ω_{UV} имеет смысл среднего числа переходов $U \rightarrow V$, приходящегося на один шаг или в единицу времени.

Аналогичное выражение можно записать для частоты ω_{VU} переходов $V \rightarrow U$:

$$\text{а) } \omega_{VU} = \bar{\pi}_V \cdot P_{VU} \cdot \dot{e}; \quad \text{б) } \omega_{VU} = \bar{\pi}_V \cdot \Lambda_{VU} \cdot \dot{e}. \quad (25)$$

Покажем, что $\omega_{UV} = \omega_{VU}$. Для этого требуются дополнительные сведения. Разбив матрицы P и Λ на блочные подматрицы, распределение предельных вероятностей на две части $\bar{\pi}_U$ и $\bar{\pi}_V$ и выполнив умножения (3) и (10), получим соотношения, приведенные в табл. 6 и 7.

Таблица 6. Зависимость между блочными подматрицами исходных матриц

№ п/п	Формулы для процесса	
	в дискретном времени	в непрерывном времени
1	а) $P_{UV} \cdot \dot{e} = (E - P_{UU}) \cdot \dot{e}$	б) $\Lambda_{UV} \cdot \dot{e} = -\Lambda_{UU} \cdot \dot{e}$
2	а) $P_{VU} \cdot \dot{e} = (E - P_{VV}) \cdot \dot{e}$	б) $\Lambda_{VU} \cdot \dot{e} = -\Lambda_{VV} \cdot \dot{e}$

Таблица 7. Зависимость между распределениями предельных вероятностей подмножеств и блочными подматрицами

№ п/п	Формулы для процесса	
	в дискретном времени	в непрерывном времени
1	а) $\bar{\pi}_V \cdot P_{VU} = \bar{\pi}_U \cdot (E - P_{UU})$	б) $\bar{\pi}_V \cdot \Lambda_{VU} = -\bar{\pi}_U \cdot \Lambda_{UU}$
2	а) $\bar{\pi}_U \cdot P_{UV} = \bar{\pi}_V \cdot (E - P_{VV})$	б) $\bar{\pi}_U \cdot \Lambda_{UV} = -\bar{\pi}_V \cdot \Lambda_{VV}$

В табл. 6 и 7 обозначено: E – единичная матрица, $\dot{e}$ – столбец, все элементы которого равны 1. Размеры E и $\dot{e}$ согласованы с размерами других матриц.

Покажем, что $\omega_{UV} = \omega_{VU}$ для процесса в дискретном времени. Заменим в (24) $P_{UV} \cdot \dot{e}$ на другое выражение из табл. 6: $\omega_{UV} = \bar{\pi}_U \cdot (E - P_{UU}) \cdot \dot{e}$. Заменим $\bar{\pi}_U \cdot (E - P_{UU})$ на соответствующее выражение из табл. 7: $\omega_{UV} = \bar{\pi}_V \cdot P_{VU} \cdot \dot{e}$. Видно, что $\omega_{UV} = \omega_{VU}$.

Аналогично для процесса в непрерывном времени можно показать, что $\omega_{UV} = \omega_{VU}$.

Полученный результат легко интерпретируется: частота переходов $U \rightarrow V$ равна частоте обратных переходов, так как после каждого вхождения в подмножество U следует вхождение в подмножество V , и наоборот.

С учетом полученных соотношений частоту переходов между подмножествами можно вычислить по одной из четырех формул как для процессов в дискретном времени, так и для процессов в непрерывном времени (табл. 8).

Таблица 8. Формулы для вычисления частоты переходов между двумя подмножествами ω_{UV} или ω_{VU}

№ п/п	Формулы для процесса	
	в дискретном времени	в непрерывном времени
1	а) $\bar{\pi}_U \cdot P_{UV} \cdot \dot{e}$	б) $\bar{\pi}_U \cdot \Lambda_{UV} \cdot \dot{e}$
2	а) $\bar{\pi}_U \cdot (E - P_{UU}) \cdot \dot{e}$	б) $-\bar{\pi}_U \cdot \Lambda_{UU} \cdot \dot{e}$
3	а) $\bar{\pi}_V \cdot P_{VU} \cdot \dot{e}$	б) $\bar{\pi}_V \cdot \Lambda_{VU} \cdot \dot{e}$
4	а) $\bar{\pi}_V \cdot (E - P_{VV}) \cdot \dot{e}$	б) $-\bar{\pi}_V \cdot \Lambda_{VV} \cdot \dot{e}$

Частота ω_{UV} является частотой цикла, представляющего собой пребывание системы в подмножестве U и следующее за ним пребывание в подмножестве V . Среднее время цикла в стационарном режиме $t_{UV} = t_U + t_V$. В связи с этим $t_{UV} = 1/\omega_{UV}$. Отсюда следуют зависимости между предельными вероятностями подмножеств состояний, продолжительностями нахождения в подмножествах состояний и частотой цикла (табл. 9).

Таблица 9. Соотношения между предельными вероятностями подмножеств, продолжительностями нахождения в подмножествах состояний в стационарном режиме и частотой цикла

№ п/п	Соотношения для процесса	
	в дискретном времени	в непрерывном времени
1	а) $\pi_U = n_U \cdot \omega_{UV}$	б) $\pi_U = t_U \cdot \omega_{UV}$
2	а) $\pi_V = n_V \cdot \omega_{UV}$	б) $\pi_V = t_V \cdot \omega_{UV}$

В таблице обозначено: $\pi_U = \bar{\pi}_U \cdot \dot{e}$ и $\pi_V = \bar{\pi}_V \cdot \dot{e}$ – предельные вероятности нахождения соответственно в подмножествах U и V в стационарном режиме.

9. Проверочные процедуры

Следует отметить, что вычисление промежуточных характеристик системы целесообразно сопровождать проверочными процедурами для проверки правильности проведенных вычислений. Проверочные процедуры могут быть необходимыми или достаточными и применяться на разных этапах алгоритма.

Можно отметить необходимую процедуру проверки правильности сформированной матрицы переходных вероятностей и матрицы интенсивностей эргодического множества состояний, что особенно актуально при большом числе состояний:

$$\det(E - P) = 0; \quad \det \Lambda = 0. \quad (26)$$

Одни и те же промежуточные характеристики целесообразно вычислять разными методами. Вычисление предельных вероятностей по разным алгоритмам можно считать достаточной процедурой правильности их вычисления. Кроме того, в число проверочных процедур целесообразно включить условие нормированности:

$$\sum_{k=1}^m \pi_k = 1. \quad (27)$$

Частоту переходов между состояниями и подмножествами состояний можно также вычислять разными методами: частотным методом и на основе циклического функционирования системы.

10. Заключение

Аналитические модели на основе матричных методов являются эффективным средством моделирования функционирования оборудования телекоммуникационных систем. Эти методы основаны на теории марковских цепей и марковских процессов и позволяют вычислять выходные характеристики систем на основе вероятностных, временных, частотных характеристик марковских цепей и процессов. Эти характеристики находятся по исходным матрицам переходных вероятностей и интенсивностей, а также по клеточным матрицам в соответствии с разбиением множества состояний на подмножества. К ним относятся: вероятности состояний и подмножеств состояний в переходном и стационарном режимах, характеристики времени нахождения в состояниях и в подмножествах состояний, частоты переходов между состояниями и подмножествами состояний и др. В соответствии с назначением и спецификой моделируемой системы эти промежуточные характеристики переводятся в выходные характеристики функционирования системы. В качестве примера можно привести разработку аналитической модели функционирования линии связи, на основе которой вычисляются коэффициент технического использования, стационарный коэффициент готовности, средняя продолжительность работоспособных и неработоспособных состояний, приходящаяся на одно восстановление, и др. [6].

Приведенный подход основан на известных публикациях и работах автора. Он может быть заложен в основу разработки инженерных методов исследования проектируемого или модернизируемого оборудования систем связи.

Литература

1. Егунов М. М., Шувалов В. П. Резервирование и восстановление в телекоммуникационных сетях. – Вестник СибГУТИ, 2012, № 2.
2. Замятина О. М. Моделирование систем. – Томск: Изд-во ТПУ, 2009. – 204 с.

3. Зейфман А. И., Бенинг В. Е., Соколов И. А. Марковские цепи и модели с непрерывным временем. – М.: Элекс-КМ, 2008. – 167 с.
4. Зеленцов Б. П. Аналитическое моделирование сложных вероятностных систем // Моделирование информационных сетей. Труды ВЦ СО РАН. Серия: Информатика, вып. 1. – Новосибирск, 1994. – С. 144–152.
5. Зеленцов Б. П. Матричные модели надежности систем: инженерные методы расчета. – Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1991. – 112 с.
6. Зеленцов Б. П., Максимов В. П., Шувалов В. П. Модель функционирования линии связи в условиях недостоверного контроля технического состояния. – Вестник СибГУТИ, 2015, № 3.
7. Казаков В. А. Введение в теорию марковских процессов. – М.: Сов. Радио, 1973. – 232 с.
8. Кельберт М. Я., Сухов Ю. М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. II: Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов. – М.: МЦНМО, 2010. – 560 с.
9. Кемени Д., Снелл Д. Конечные цепи Маркова. – М.: Наука, 1970. – 272 с.
10. Надежность технических систем: Справочник / Под ред. И. А. Ушакова. – М.: Радио и связь, 1985. – 608 с.
11. Сарымсаков Т. А. Основы теории процессов Маркова. – Ташкент: Фан, 1988. – 242 с.
12. Советов Б. Я., Яковлев С. А. Моделирование систем. – М.: Высш. школа, 2009. – 343 с.
13. Федоткин М. А. Модели в теории вероятностей. – М.: Физматлит, 2012. – 608 с.
14. Ховард Р. А. Динамическое программирование и марковские процессы. – М.: Сов. Радио. 1964. – 189 с.

Статья поступила в редакцию 17.11.2015

Зеленцов Борис Павлович

д.т.н., профессор кафедры высшей математики СибГУТИ, e-mail: zelentsovb@mail.ru.

Matrix models of functioning of telecommunication equipment

B.P. Zelentsov

The modeling is based on the theory of Markov processes using matrix methods for mathematical operations. Discrete and continuous time stochastic processes are considered simultaneously. For these processes some characteristics are obtained, that is, transient and steady-state probabilities, mean time of being in a subset of states, transitions between subsets, transition frequencies between states, and subsets. By using these characteristics, a lot of properties with respect to functioning and reliability can be investigated taking into account the peculiarities of the equipment.

Keywords: Markov chain, Markov process, transition matrix in discrete and continuous time, steady-state probabilities, mean time of being in a subset of states, transition frequencies between states and subsets.