

Размерные и топологические эффекты при фрактально-скейлинговом обнаружении и обработке многомерных сигналов

А.А. Потапов, Е.М. Ильин, Е.П. Чигин

Современная радиотехника базируется на классической теории целочисленной меры и целочисленного исчисления. Классические обнаружители сигналов и их математическое обеспечение, по сути, достигли своего насыщения и предела. Подробно и на новых конкретных примерах рассмотрено использование теории фракталов в современных фундаментальных радиофизических направлениях. При таком фрактальном подходе описание и обработка сигналов и полей проводится исключительно в пространстве дробной меры с применением гипотез скейлинга и распределений с тяжёлыми хвостами.

Ключевые слова: фрактал, скейлинг, текстура, радиолокация, обнаружение сигналов.

1. Введение

При радиолокационном зондировании полезный сигнал от цели является частью общего волнового поля, создаваемого всеми отражающими элементами наблюдаемых фрагментов окружающего цель фона, поэтому на практике сигналы от этих элементов образуют помеховую составляющую [1]. Для создания системы автоматического распознавания реальных неоднородных изображений ландшафтов всегда целесообразно использование концепции текстуры [2 – 7]. Текстура описывает пространственные свойства участков изображений земной поверхности с локально однородными статистическими характеристиками. Идентификация цели происходит тогда, когда цель затеняет участок фона, изменяя при этом интегральные параметры текстуры. После текстуры было введено понятие фракталов, т.е. признаков, основанных на теории дробной меры, для принципиально иного подхода к решению современных радиолокационных задач [1 – 19].

В работе использовались алгоритмы моделирования, создающие одномерные процессы и двумерные сцены. По своему характеру моделируемые фракталы можно разделить на «детерминированные» и «стохастические». Первые получаются с помощью моделирования поведения некоторой динамической системы, вторые создаются на основе многократных итераций со стохастическими параметрами. В [3, 5, 7 – 13] разработаны алгоритмы построения детерминированных и стохастических фракталов, а также показана эффективность моделирования хаотичных фрактальных паттернов с помощью L -функций, итерационных процедур и фрактального морфинга. Разработанные алгоритмы используют операции конволюции и позволяют обходиться только единичными изображениями.

2. Теория и метод

Основным свойством фракталов является нецелое значение их размерности. Развитие теории размерности началось с работ Пуанкаре, Лебега, Брауэра, Урысона и Менгера [2 – 6]. В различных областях математики возникают множества, в том или ином смысле пренебрежимо малые и неразличимые в смысле меры Лебега. Для различения таких множеств с патологически сложной топологической структурой необходимо привлекать нетрадиционные характеристики малости, например, ёмкость, потенциал, меры и размерность Хаусдорфа и т.п. Наиболее плодотворным оказалось применение дробной размерности Хаусдорфа, тесно связанной с понятиями энтропии, фракталами и странными аттракторами в теории динамических систем. Понятие меры и размерность Хаусдорфа – одно из тех обязательных понятий, не усвоив которых органически, ни один исследователь не может стать специалистом по фракталам и детерминированному хаосу. Эта дробная размерность определяется p -мерной мерой с произвольным вещественным положительным числом p , которую ввёл Хаусдорф в 1919 г. В общем случае понятие меры не связано ни с метрикой, ни с топологией. Однако мера Хаусдорфа может быть построена в произвольном метрическом пространстве на основе его метрики, а сама размерность Хаусдорфа связана с топологической размерностью.

Понятия, введённые Хаусдорфом, основываются на конструкции Каратеодори (1914). Пусть (M, ρ) — метрическое пространство, F — семейство подмножеств пространства M и f — такая функция на F , что $0 \leq f(G) \leq \infty$ при $G \in F$ и $f(\emptyset) = 0$. Построим вспомогательные меры m_f^ε , а затем основную меру Λ_f следующим образом. При $E \subset M$ и $\varepsilon > 0$ значение m_f^ε определяется как точная нижняя грань множества чисел

$$m_f^\varepsilon = \inf \sum_i f(G_i) \quad (1)$$

по всевозможным счётным ε -покрытиям $\{G_i\}$, $G_i \in F$.

Из неравенства $m_f^{\varepsilon_1}(E) \geq m_f^{\varepsilon_2}(E)$ для $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ следует существование предела

$$\Lambda(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} m_f^\varepsilon(E) = \sup m_f^\varepsilon(E). \quad (2)$$

Ясно, что m_f^ε и $\Lambda(E)$ — *внешние меры* на M . Пусть $\rho(A, B) > \varepsilon > 0$. Рассмотрим произвольное ε -покрытие $\{G_i\}$ множества $A \cup B$, состоящее из некоторого числа множеств. Тогда семейства $\{A \cap G_i\}$ и $\{B \cap G_i\}$ не пересекаются и покрывают множества A и B соответственно, поэтому

$$m_f^\varepsilon(A \cup B) \geq m_f^\varepsilon(A) + m_f^\varepsilon(B) \quad (3)$$

или

$$\Lambda_f(A \cup B) = \Lambda_f(A) + \Lambda_f(B). \quad (4)$$

Класс Λ_f — измеримых множеств пространства M образуют σ -кольцо, на котором внешняя мера Λ_f регулярна. Меру Λ_f также называют результатом применения конструкции Каратеодори к функции f , а внешнюю меру m_f^ε — приближающей мерой порядка ε . Мера Λ_f довольно тонко отражает свойства функции f и семейства F , хотя обычно и не является продолжением f .

Укажем два простых утверждения, которые описывают поведение приближающих мер на убывающей последовательности $C_1 \supset C_2 \supset \dots$ компактных подмножеств пространства M . Если элементы семейства F являются открытыми подмножествами M , то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m_f^\varepsilon(C_i) = m_f^\varepsilon\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i\right). \quad (5)$$

Если $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$ и $f(S) = \inf\{f(T)\} : T \in F, S \subset \text{Int } T, d(T) \leq \varepsilon$ для всех таких $S \in F$, что $d(S) \leq \varepsilon_0$, то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m_f^\varepsilon(C_i) \leq m_f^{\varepsilon_0}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i\right), \quad (6)$$

где d — диаметр множеств, Int — множество всех внутренних точек множества T .

Пусть X — ограниченное компактное метрическое пространство, F — семейство всех непустых компактных множеств из X , функция $f: F \rightarrow [0, +\infty]$ непрерывных относительно метрики Хаусдорфа и $f(C) > 0$ для всех таких $C \in F$, что $d(C) > 0$. Если $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ образуют возрастающую последовательность подмножеств пространства X , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_f^\varepsilon(A_k) = m_f^\varepsilon\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right). \quad (7)$$

Определим h -меру Хаусдорфа. Пусть $h(r)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция от r ($r \geq 0$), для которой $h(0) = 0$. Класс таких функций обозначим через H_0 . Применив конструкцию Каратеодори к функции $f(E) = h[d(E)]$ при $E \neq \emptyset$ и $f(\emptyset) = 0$ (здесь $d(E)$ — диаметр множества E), получим Λ_h — меру Каратеодори, которую называют h -мерой Хаусдорфа. Если при этом $h(r) = \gamma(\alpha)r^\alpha$, где α — фиксированное положительное не обязательно целое число, а $\gamma(\alpha)$ — положительная константа, зависящая только от α , то h -меру Хаусдорфа называют α -мерной мерой или α -мерой Хаусдорфа H_α , которая является борелевской регулярной мерой.

Конструкцию h -меры Хаусдорфа можно представить себе следующим образом. Покроем α произвольной последовательностью кругов C_ν радиусом $r_\nu \leq \varepsilon$ ($\varepsilon > 0; \nu = 1, 2, \dots$) и обозначим через $m_h^\varepsilon(\alpha, h) \geq 0$ нижнюю грань соответствующих сумм $\sum_{\nu=1}^{\infty} h(r_\nu)$. Это число возрастает при убывании ε . По определению,

$$\Lambda_h(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m_h^\varepsilon(\alpha, h), \quad (8)$$

следовательно

$$0 \leq \Lambda_h(E) \leq +\infty. \quad (9)$$

Предел (8) является *внешней* h -мерой Хаусдорфа, которая на σ -кольце Λ_h -измеримых множеств пространства M является борелевски регулярной мерой. Выбирая в качестве $h(r)$ различные функции, мы получаем: линейную меру ($h(r) = 2\pi r$), плоскую меру ($h(r) = \pi r^2$), логарифмическую меру ($h(r) = 1/\ln r$).

Из условия $E_1 \subset E_2$ следует $\Lambda_h(E_1) \leq \Lambda_h(E_2)$, т.е. h -мера Хаусдорфа — монотонно возрастающая функция множества. С использованием h -меры размерность множества определяется следующим образом. Если $0 < \Lambda_h(A) < \infty$, то $\langle h \rangle$ называется метрической размерностью (размерностью Хаусдорфа) множества A . Если $h(r) = cr^\alpha$ и $0 = \Lambda_h(A) < \infty$, то размерность множества A обозначается через $\langle \alpha \rangle$, здесь c — константа. Множества определённой размерности имеет для каждой внешней размерности h -меру, равную 0, для каждой низшей h -меру, равную ∞ .

Дальнейшим обобщением понятия размерности является *размерность Хаусдорфа – Безиковича*, которая вводится через неотрицательные числа $\alpha_0 = \alpha_0(E)$ в виде равенства

$$\alpha_0(E) = \sup \{ \alpha : H_\alpha(E) \neq 0 \} = \inf \{ \alpha : H_\alpha(E) = 0 \} \quad (10)$$

для множества E . Размерность Хаусдорфа – Безиковича множества определяется поведением $H_\alpha(E)$ не как функции от E , а как функции от α .

Корректность определения (10) подтверждает следующее свойство H_α -меры. Если $H_\alpha(E) < \infty$, то $H_\alpha(E) = 0$ для любого $\alpha_2 > \alpha_1$. Если мера $H_{\alpha_2}(E)$ отлична от нуля, то $H_{\alpha_1}(E) = \infty$ для любого положительного $\alpha_1 < \alpha_2$. Отсюда следует, что для множества $E \subset M$ или $H_\alpha(E) = 0$ для любого $\alpha > 0$, тогда $\alpha_0(E) = 0$ по определению или существует точка «перескока» α_0 , такая, что $H_\alpha(E) = \infty$ для $\alpha < \alpha_0$ и $H_\alpha(E) = 0$ для $\alpha > \alpha_0$. Данное число α_0 и есть размерность Хаусдорфа – Безиковича.

Если при определении H_α -меры Хаусдорфа покрытия осуществляют шарами одинакового диаметра, то такую меру называют энтропийной. Тогда размерность (10) называют энтропийной или размерностью Колмогорова. Для множеств положительной k -мерной меры Лебега обе размерности совпадают и равны K . Размерность Хаусдорфа – Безиковича характеризует внешнее свойство множества. Поэтому целесообразно ввести понятие множества Хаусдорфа–Безиковича в точке, которая характеризовала бы его внутреннюю структуру.

В этом случае число

$$\alpha_E(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_0(E \cap O_n(x_0)) \quad (11)$$

называют локальной размерностью Хаусдорфа – Безиковича множества E в точке x_0 . Здесь $\{O_n(x_0)\}$ — произвольная последовательность стягивающих окрестностей точки $x_0 \in M$.

Каждое ограниченное замкнутое множество E m -мерного евклидова пространства содержит точку $x_0 \in E$, такую, что

$$\alpha_E(x_0) = \alpha_0(E). \quad (12)$$

Функцию $\alpha_E(x)$ называют функцией локальной размерности Хаусдорфа – Безиковича, если

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha_E(x) \leq \alpha_0(E) \text{ для любого } x \in M, \\ \alpha_E(x) &= 0, \text{ если множество } E \text{ — замкнутое и } x \notin E, \\ \alpha_E(x) &= 0 \text{ для всех изолированных точек множества } E. \end{aligned} \quad (13)$$

Размерность Хаусдорфа – Безиковича является метрическим понятием, но существует её фундаментальная связь с топологической размерностью $\dim E$, которую установили

Л.С. Понтрягин и Л.Г. Шнирельман, введя в 1932 г. понятие метрического порядка, а именно: нижняя грань размерности Хаусдорфа – Безиковича для всех метрик компакта E равна его топологической размерности: $\dim E \leq \alpha(E)$.

Один из широко используемых методов для оценки хаусдорфовой размерности множеств, известный как принцип распределения масс, предложил Фростман в 1935 г.

Множества, размерность Хаусдорфа – Безиковича которых является дробным числом, называют фрактальными множествами или фракталами. Более строго, множество E называется фрактальным (фракталом) в широком смысле (в смысле Б. Мандельброта), если его топологическая размерность не совпадает с размерностью Хаусдорфа – Безиковича, а именно $\alpha_0(E) > \dim E$. Например, множество E всех иррациональных точек $[0; 1]$ является фрактальным в широком смысле, так как $\alpha_0(E) = 1$, $\dim E = 0$. Множество E называется фрактальным (фракталом) в узком смысле, если $\alpha_0(E)$ не является целым. Фрактальное множество в узком смысле является таким и в широком смысле.

Как впервые было показано А.С. Безиковичем в 1929 г., существуют глубокие различия между лебеговскими множествами и фракталами. В первую очередь, эти особенности касаются плотностей. Геометрические свойства фрактального множества E определяются поведением функции

$$D(x, \varepsilon) = \frac{H_\alpha(E \cap O(x, \varepsilon))}{\varepsilon^\alpha} \quad (14)$$

для малых ε , где x — произвольная точка множества E . Верхней α -плотностью множества E в точке x называется

$$\bar{D}_\alpha(E, x) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} D(x, \varepsilon), \quad (15)$$

соответственно нижняя α -плотность множества E в точке x записывается в виде

$$\underline{D}_\alpha(E, x) = \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} D(x, \varepsilon). \quad (16)$$

Когда $\bar{D}_\alpha(E, x) = \underline{D}_\alpha(E, x)$, то их общее значение называют α -плотностью множества E в точке x и обозначают $D_\alpha(E, x)$. Если $\varepsilon \rightarrow 0+$, то $\bar{D}_\alpha(E, x)$ и $\underline{D}_\alpha(E, x)$ называют правосторонней, при $\varepsilon \rightarrow 0-$ — левосторонней, при $\varepsilon \rightarrow 0$ — двусторонней верхней и нижней α -плотностью соответственно.

Можно отметить, что для почти всех (в смысле H_α -Хаусдорфа) точек α -множества на прямой односторонняя верхняя (правая и левая) α -плотность равна 1, односторонняя нижняя α -плотность равна 0 ($0 < \alpha < 1$). Для двухсторонних плотностей почти во всех точках α -множества на прямой двухсторонняя α -плотность не существует, т.е. верхняя α -плотность отличается от нижней.

При фрактальном подходе естественно сосредоточить внимание на описании, а также на обработке радиофизических сигналов (полей) исключительно в пространстве дробной меры с применением гипотезы скейлинга и распределений с тяжёлыми хвостами или устойчивых распределений. Фрактально-скейлинговые методы обработки сигналов, волновых полей и изображений в широком смысле основаны на той части информации, которая при классических методах обработки безвозвратно терялась. Иначе говоря, классические методы обработки сигналов принципиально выделяют только ту составляющую информации, которая описывается целой мерой. Фрактальные методы могут функционировать на всех уровнях сигнала: амплитудном, частотном, фазовом и поляризованном.

3. Математическое моделирование и результаты

В настоящей статье из-за её краткости нет возможности остановиться на вопросе о том, как конкретно обрабатываются сигналы и изображения оригинальным фрактальным методом. Этот вопрос рассмотрен очень подробно на примере многочисленных данных в [2 – 18]. Остановимся лишь на некоторых размерных и топологических эффектах при фрактально-скейлинговом обнаружении и обработке многомерных сигналов.

Безусловной ценностью размерности Хаусдорфа – Безиковича является возможность её экспериментального определения. Некоторое множество может быть измерено d -мерными (d -целое) образцами со стороной l_1 . Тогда, количество образцов N_1 , покрывающих множе-

ство, будет: $N_1 = \frac{A}{l_1^d}$. Значение d должно быть основано на предварительных сведениях о размерности множества; теоретически, если d будет меньше топологической размерности, то $N_1 \rightarrow \infty$, а если $d > R^n$, где R^n – евклидово пространство, то $N_1 \rightarrow 0$. Образец с размером l_2 даст оценку $N_2 = \frac{A}{l_2^d}$, тогда размерностью подобия будет:

$$D = -\log_{l_2/l_1} \frac{N_2}{N_1}. \quad (17)$$

Например, линия длиной $A = 100$ единиц может быть покрыта $N = 10$ отрезками l_2 длиной 10 единиц, или 100 отрезками l_1 длиной в 1 единицу длины. Тогда, размерность линии, согласно (17), будет: $D = -\log_{10/1} \frac{10}{100} = 1$. Соответственно, размерность прямоугольника бу-

дет $D = -\log_{2/1} \frac{16}{64} = 2$.

Определим размерность по Хаусдорфу следующим образом. Рассмотрим в d -мерном пространстве некоторое множество точек N_0 . Если для того, чтобы покрыть это множество, необходимо $N(\varepsilon)$ -мерных пробных тел (куб, сфера) с характерным размером ε , причём

$$N(\varepsilon) \approx 1/\varepsilon^D \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0$$

определяется законом подобия.

Фрактальную размерность

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \quad (18)$$

называют хаусдорфовой размерностью этого множества. В этом определении неявно содержится требование, чтобы число точек в множестве было большим N_0 .

Следует отметить, что использование размерности подобия удобно в случае объектов, имеющих явное масштабное подобие. Такими объектами, прежде всего, являются самоподобные фракталы – кривая Коха, множество Мандельброта, Жюлиа и др. [2 – 4, 18]. В тех же случаях, когда подобие трудно установить даже при его наличии, удобно применять приближённое вычисление размерности Хаусдорфа – Безиковича. Здесь в качестве примеров обычно рассматривают стохастические самоаффинные фракталы, динамические отображения – странные аттракторы и т.д.

Практическая реализация описанного метода наталкивается на трудности, вызванные большим объёмом вычислений. Связано это с тем, что для вычисления размерности Хаусдорфа – Безиковича нужно измерять не просто соотношение, а верхнюю грань этого соотношения. Действительно, выбрав конечный масштаб, большим двух дискретов временного ряда или одного элемента изображения, мы создаём возможность «промахнуться» мимо некоторых особенностей фрактала.

Во многих случаях решить эту проблему помогает построение *фрактальной сигнатуры* [2 – 4, 11] или же зависимости оценок типа (17) и (18) от масштаба наблюдения. Фрактальная сигнатура, как впервые показано в [8], характеризует пространственный *фрактальный кепстр* изображения. Помимо классической корреляционной размерности в ИРЭ РАН были разработаны различные оригинальные методы измерения фрактальной размерности, в том числе: дисперсионный, учёт сингулярностей, по функционалам, триадный, на основе метрики Хаусдорфа, вычитания выборок, на основе операции «Исключающее ИЛИ» и т.п. [5, 9, 12, 13].

При радиолокационном и оптическом зондировании полезный двумерный сигнал от цели или её образ $S(x, y)$ является частью общего изображения, создаваемого всеми отражающими элементами наблюдаемых фрагментов окружающего цель фона, поэтому на практике сигналы от этих элементов образуют помеховую составляющую. Для реальных неоднородных изображений ландшафтов целесообразна концепция текстуры. Согласно [2, 3], текстура описывает пространственные свойства участков изображений земной поверхности с локально однородными статистическими характеристиками. Искомая цель затеняет участок фона, поэтому предположение об аддитивности полезного сигнала $S(x, y)$ и фона оправдано только тогда, когда цель занимает незначительную часть изображения.

На анализируемое изображение оказывают влияние случайные шумы приёмника $n(x, y)$. Случайный шум обычно считается стационарным гауссовским шумом с нулевым средним и спектральной плотностью мощности N_0 . Кроме того, изображение должно описываться неотрицательной функцией, в отличие от входного знакопеременного сигнала. Поэтому модель реальных изображений должна быть сложнее простой радиотехнической модели аддитивного сложения сигнала и шума вида

$$f(x, y) = S(x, y) + n(x, y). \quad (19)$$

Считаем, что в области анализа A заданы функции: $f(x, y)$ – функция анализируемого изображения ($x, y \in A$), $S(x, y)$ – функция цели ($x, y \in A_s, A_s \subset A$), $g(x, y)$ – текстурная функция вокруг цели ($x, y \in A - A_s$), $n(x, y)$ – функция случайного шума ($x, y \in A$).

Реальная нестационарная помеха $\rho(x, y)$ имеет вид

$$\rho(x, y) = g(x, y)n(x, y) \quad (20)$$

при

$$g(x, y) \rightarrow \begin{cases} \geq 0, \text{ при } x, y \in A - A_s \\ = 0, \text{ при } x, y \in A_s \end{cases}, \quad (21)$$

где $g(x, y) = \sum_i g_i(x, y)$, i – число текстур, $g_i(x, y)$ – реализация случайного поля, описывающего i -ю текстуру.

Тогда модель анализируемого изображения с учётом среды формально сводится к виду

$$f(x, y) = \varepsilon[g_0 + S(x, y)] + g(x, y)n(x, y), \quad (22)$$

где ε – уровень мультипликативных помех, g_0 – постоянная составляющая, определяемая средним уровнем контраста и обеспечивающая условие $f(x, y) \geq 0$.

Как правило, практическая реализация непрерывной по пространству A обработки функции $f(x, y)$ затруднительна. Цифровая обработка требует перевода непрерывных функций в дискретный массив чисел. Процесс дискретизации описывается произведением исходной функции $f(x, y)$ на пространственно дискретизирующую функцию. В идеальном случае пространственно дискретизирующая функция является пространственной решёткой с расположенными в узлах дельта-функциями.

$$H(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(x - k\Delta x, y - l\Delta y), \quad (23)$$

где δx и δy – шаги решётки по координатам x и y соответственно.

Тогда дискретизированное изображение $f_H(x, y) = f(x, y)H(x, y)$ можно рассматривать как проекцию непрерывной реализации $f(x, y)$ на линейную оболочку системы функций пространственных координат:

$$f_H = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(k\Delta x, l\Delta y) \delta(x - k\Delta x, y - l\Delta y). \quad (24)$$

При обработке алгоритмов использовались данные аэрофотосъёмки (АФС) и радиолокационные изображения (РЛИ) на миллиметровых волнах [19]. Продолжительные сезонные измерения рассеивающих характеристик земных покровов на длине волны 8.6 мм в натурных условиях проводились в 80-е гг. XX века Потаповым А.А. совместно с представителям ЦКБ «Алмаз» с борта лётной лаборатории, расположенной на вертолёте МИ-8 [19].

Также для моделирования и решения задач, связанных с определением параметров обнаружителей, основанных на разрабатываемых фрактально-скейлинговых алгоритмах, необходимо иметь инструментарий, позволяющий создавать искусственные фрактальные объекты, максимально похожие на реальные. В качестве примера на рис. 1 представлены паттерны искусственных фрактальных сцен [5, 7 – 14].

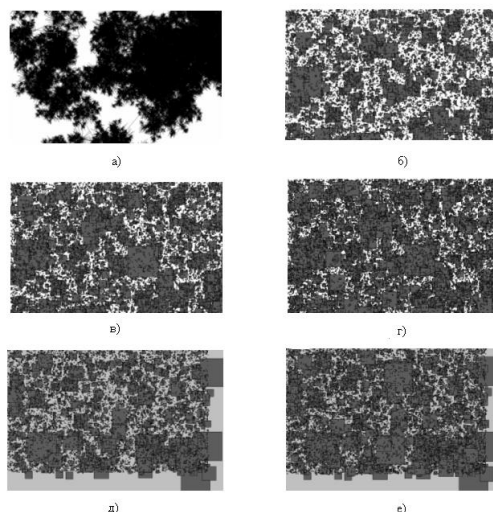


Рис. 1. Синтезированные двумерные фрактальные сцены (паттерны), имитирующие участки земной поверхности

Один из возможных подходов к формализации задачи фрактального обнаружения состоит в следующем. Любая детерминированная цель в физически охватываемых масштабах наблюдения остаётся неизменной, и оценка её характерных размеров или площади стремится к определённому пределу, а в идеальном случае является постоянной величиной. Одновременно при изменении масштаба изображения местности площадь фрактальных образований также изменяется. Поэтому появление на любом изображении некоторой искусственной цели изменит величину фрактальной размерности D изображения в целом. Относительная яркость I/I_0 прямоугольников, имитирующих цель, изменялась от белой ($I/I_0 = 0$) до чёрной ($I/I_0 = 100\%$). Площадь прямоугольника в первом эксперименте (кривая 1 на рис. 2) равнялась 20^{-1} общей площади изображения, а во втором эксперименте (кривая 2 рис. 2) площадь объекта составляла $1/5$ общей площади.

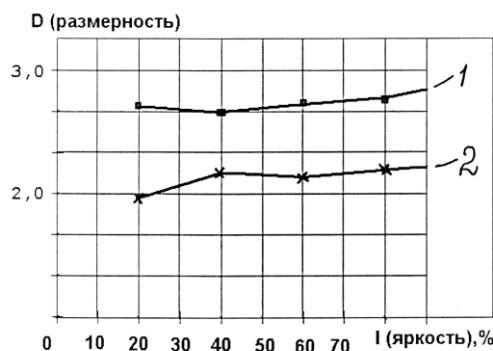


Рис. 2. Зависимость фрактальной размерности сложного изображения от яркости/интенсивности цели

Поведение кривых подтверждает слабую зависимость ($\approx$ полную инвариантность) фрактальной размерности изображения от яркости объекта. Именно это свойство очень полезно при обнаружении малоконтрастных объектов. Дополнительные эксперименты показали достаточно уверенное фрактальное обнаружение протяжённых объектов при отношении сигнал/фон $q_0^2 = -10$ дБ и ниже. Наибольшее влияние на величину фрактальной размерности оказывает доля площади цели на АФС и РЛИ. Для увеличения чувствительности алгоритма целесообразно разбивать первоначальное изображение на части или фрагменты, что приведёт к резкому изменению значений размерности D при появлении нефрактальной искусственной цели. При проведении компьютерных экспериментов размеры цели лежали в диапазоне $1/3 \dots 1/64$ от общей площади изображений. По результатам проведённых исследований были построены зависимости фрактальных размерностей от контраста цели относительно фона по интенсивности (рис. 3,а) и от отношения площади протяжённой цели $S_{ц}$ к площади всего изображения S (рис. 3,б).

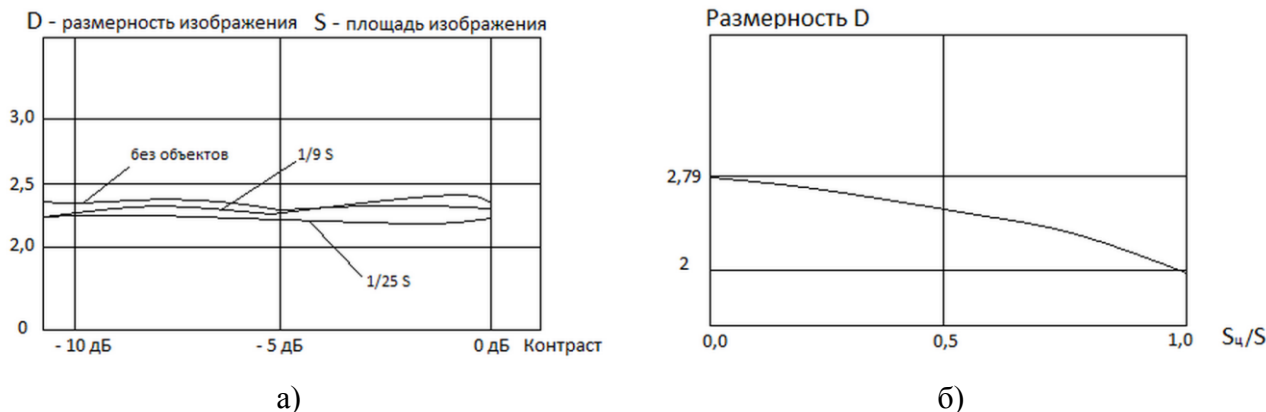


Рис. 3. Зависимости фрактальной размерности синтезированных изображений от относительной яркости (а) и относительной площади цели (б).

Данные на рис.2.2,а позволяют говорить об уверенном обнаружении цели при отношении сигнал/фон, меньшим -10 дБ. В дальнейших экспериментах наблюдалось устойчивое обнаружение цели при отношении сигнал/фон в районе -20 дБ. Наибольшее влияние на вероятность обнаружения цели оказывают её размеры (рис. 2.2,б). Поэтому при обработке изображений вместо отношения сигнал/фон целесообразно использовать отношение площади цели к площади всего изображения.

Зависимости фрактальной размерности РЛИ от контраста цели и отношения $S_{ц}/S$ имеют вид, приведённый на рис. 4. Однако, в отличие от данных рис. 3, для РЛИ наблюдается переход от более крутого участка кривой $D = D(S_{ц}/S)$ к более пологому при значении параметра $S_{ц}/S = 0,5$. Данное значение параметра $S_{ц}/S = 0,5$ аналогично ранее полученному в [19] при исследовании предложенного дисперсионного метода обнаружения малоконтрастных детерминированных целей на РЛИ.

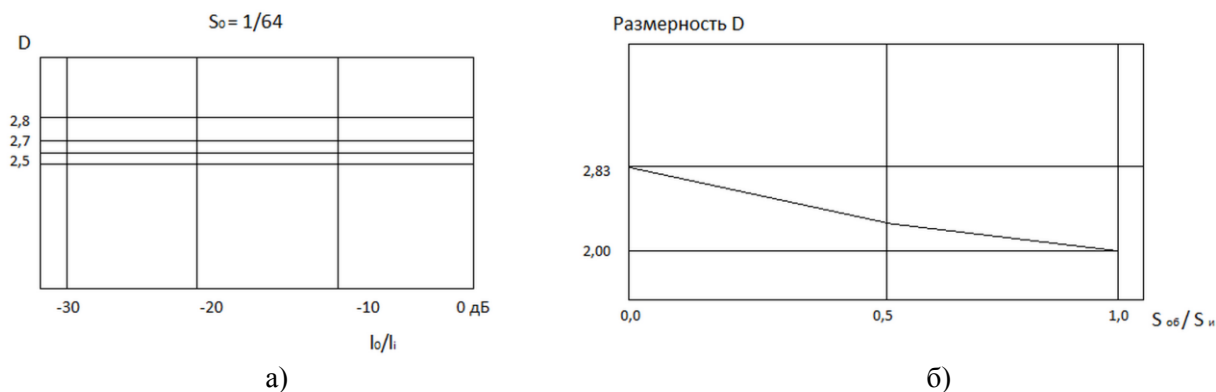


Рис. 4. Зависимости фрактальной размерности РЛИ от относительной яркости (а) и относительной площади цели (б)

В задачах обнаружения полезный объект (цель) всегда имеет некоторую случайную составляющую в любом из его параметров. В рассматриваемом случае таким меняющимся параметром мы считали площадь цели. Была проведена серия предварительных экспериментов, при которых стохастическая площадь, покрытая нефрактальным объектом, имела гауссовское распределение со средним 10^{-1} от общей площади изображения и среднеквадратичным отклонением порядка 30%. Примеры таких изображений представлены на рис. 5, а – г, а изменения фрактальной размерности показаны на рис. 5, д. Фрактальные размерности для рис. 5, б – г равны $D = 2.5476$; 2.5502 ; 2.5502 соответственно. Кривые 1 – 4 на рис. 5, д соответствуют рис. 5, а – г.

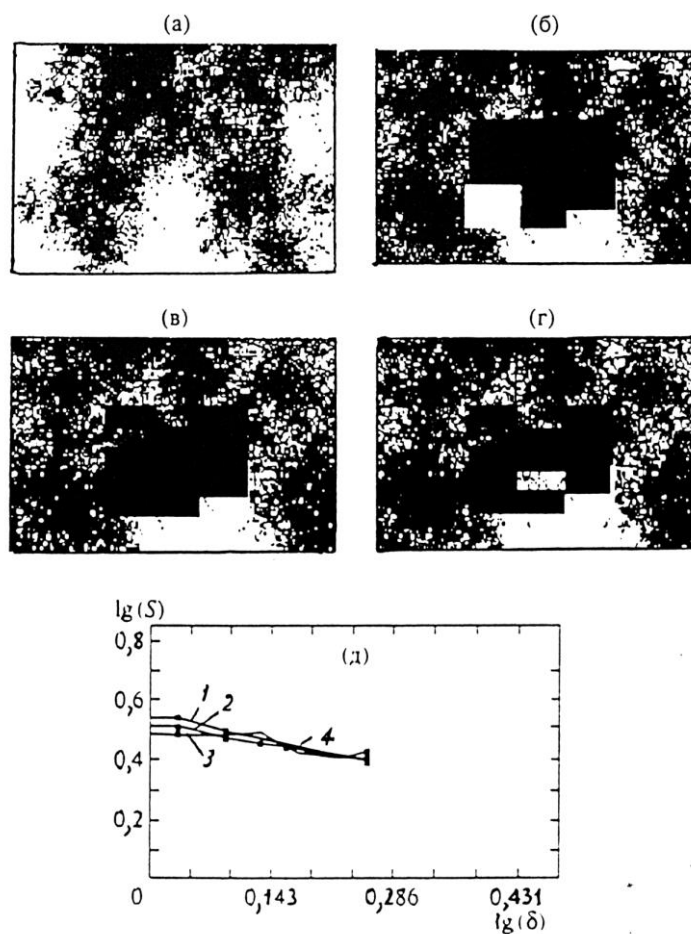


Рис. 5. Примеры изображений для случая обнаружения цели при флуктуации её площади (мерцание цели и её топология) и вариации фрактальных сигнатур (δ): а) – исходный фон, б – г) – различные флуктуации размеров цели

Для получения статистических данных о значениях фрактальных размерностей изображений поверхности были проведены измерения размерностей D участков изображения. По полученным значениям строили эмпирические распределения размерности. В ходе компьютерных экспериментов синтезированное фрактальное изображение, имеющее размер 1600×1200 точек разбивали на ряд элементарных изображений размером 200×100 точек. Затем в центр каждого элемента помещали объект – прямоугольник размером от 20×20 до 60×60 пикселей. На рис. 6 показан пример разбиения исходного изображения на блоки.

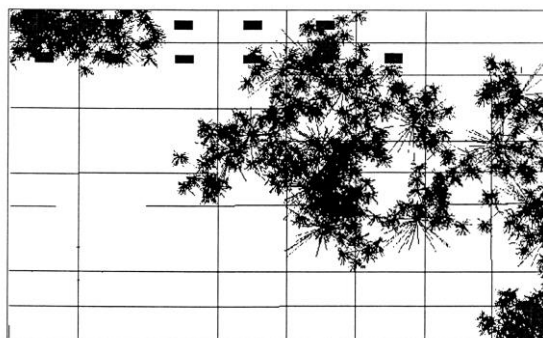


Рис. 6. Пример флуктуирующего фрактального фона с расположенными на нём детерминированными целями в виде прямоугольников

Зависимость фрактальной размерности D сложного изображения любой природы, как показано выше, зависит от площади искусственного объекта, расположенного на нём. Следующим логическим шагом является проверка зависимости фрактальной размерности изображения от количества искусственных объектов в этом изображении. Результаты компьютерных экспериментов для АФС и РЛИ представлены на рис. 7 соответственно.

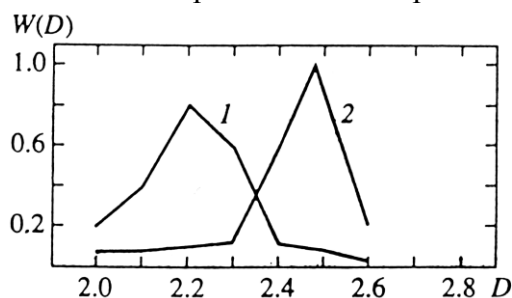


Рис. 7. Эмпирические распределения вероятностей фрактальной размерности:
1 – фрактальное изображение + цель, 2 – фрактальный фон

Видно, что при появлении одной цели или нескольких целей эмпирическое распределение итоговой фрактальной размерности начинает «скользить» по шкале D . Это даёт оператору возможность дать оценку числа однотипных целей на поле наблюдения контролируемой обстановки.

Из полученных данных также следует, что острые кромки объектов всегда увеличивают величину фрактальной размерности. Сглаженность форм цели в нашем случае способствует снижению фрактальной размерности, что улучшает степень маскировки цели на фоне окружающей местности.

Для подтверждения влияния контуров целей на значения размерности изображения была проведена серия экспериментов, в которых измерялась *локальная размерность* D – т.е., размерность малого участка изображения. Так как изображение разбивалось более чем на 1000 малых с размерами от 5×5 до 30×30 точек, то использовался алгоритм измерения фрактальной размерности, основанный на определении дисперсии в различных масштабах. Дисперсия измерялась сначала в элементе исходного изображения, а затем в элементе изображения при сглаживании в 10 раз. Выбранные значения для плоских фигур серий прямоугольников

(1) и кругов (2) соответствуют «периодам» кепстра, т.е. изменению зависимости $\log S = f(\log \delta)$, полученной в предыдущем эксперименте.

Можно сразу отметить некоторые особенности, полученные при измерении локальной фрактальной размерности. Первая из них – отсутствие монотонного роста размерности при увеличении числа объектов (рис. 8). Однако данная особенность имеет простое объяснение, а именно, в данном эксперименте измерялась не общая размерность изображения, а средняя размерность по всему набору малых изображений. При незначительном числе объектов, области резкого изменения яркости сливаются, что вызывает уменьшение средней оценки размерности. Вторым отличием является уменьшение дисперсии, которое отчётливо видно на гистограммах рис. 8. Это явление имеет тоже объяснение. Круг, как более сложно связанная топологическая фигура имеет большее значение дисперсии, чем квадрат.

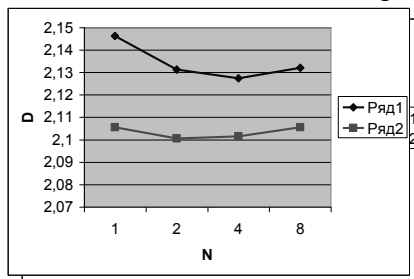


Рис. 8. Зависимость фрактальной размерности D от количества объектов N

Далее приведём результаты исследования влияния размеров целей на фрактальную размерность D – рис. 9. Количество прямоугольников было различным, а общая их площадь оставалась одинаковой во всех экспериментах. Были сделаны оценки фрактальной размерности всего изображения по наклону зависимости $\log S = f(\log \delta)$, а также построены спектры локальных фрактальных размерностей.

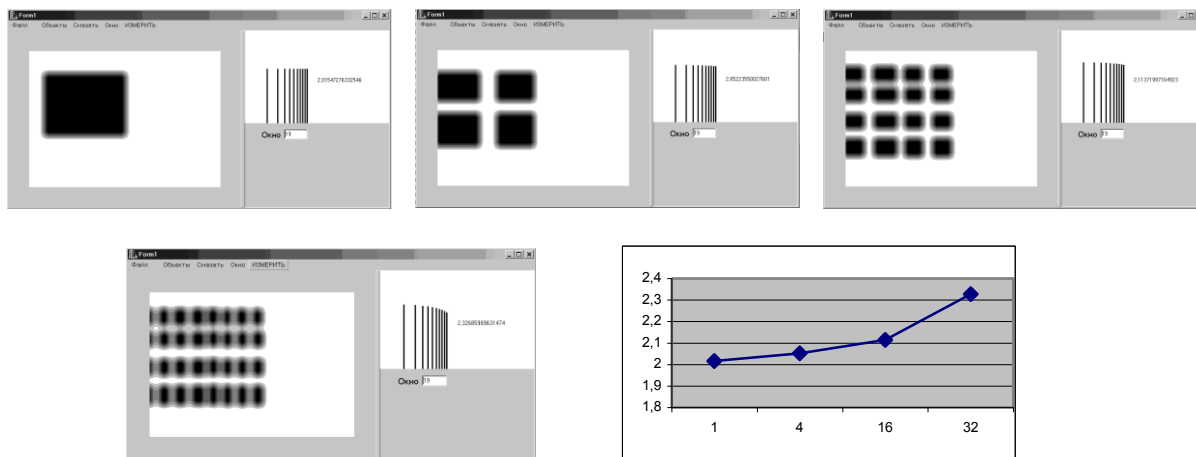


Рис. 9. Вид экрана компьютера с объектами, имеющими отличающиеся размеры, и зависимость D от числа целей N

Видно, что средний наклон кривой $\log S = f(\log \delta)$ растёт почти прямо пропорционально количеству целей. В обычных координатах эта зависимость стремится к строго пропорциональной числу целей. Далее рассмотрим спектры локальных фрактальных размерностей. Оказывается, что средние значения D остаются приблизительно на одном уровне, в то время как дисперсии σ^2 оценок D возрастают пропорционально увеличению количества объектов. Поэтому по дисперсии оценок локальной фрактальной размерности участков изображений можно приблизительно судить о количестве интересующих нас целей в зоне наблюдения, при условии априорной информации о типе фона и классе объектов.

Для демонстрации практически неограниченных возможностей фрактальной обработки на рис. 10 представлены результаты обработки изображений процесса стыковки космическо-

го корабля «Shuttle» с международной космической станцией «Мир», полученных при дальности 400 километров на оптическом наземном телескопе. Атмосферное разрешение примерно 1 – 2 секунды. Ни одни из существующих современных методов обработки изображений не позволяют добиться такого качества.

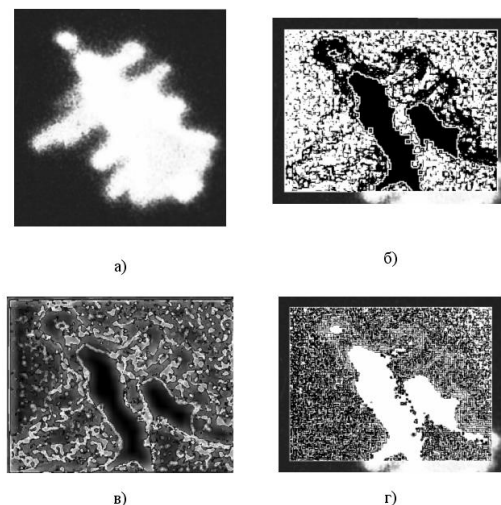


Рис. 10. Исходное изображение комплекса «Shuttle» – «Мир» (а) и результат применения (б – г) фрактально-скейлинговой обработки (фрактальная кластеризация целей)

4. Заключение

В ходе проведения теоретических исследований и экспериментов были получены следующие результаты:

1. Показано, что такие понятия, как «фрактал» и «фрактальный анализ» могут служить новым математическим аппаратом в исследованиях многих природных явлений, включая важные прикладные задачи радиолокации. Объективное наличие у фракталов дробной размерности и масштабной инвариантности (самоподобие или скейлинг) позволяет рассмотреть вопросы радиолокационного обнаружения и распознавания целей с совершенно новой точки зрения, особенно при малых и сверхмалых отношениях сигнал/фон, когда действующие радиолокаторы практически перестают функционировать.

2. Теоретически рассмотрены меры фрактальной размерности. Показана эффективность моделирования фракталов с помощью L -функций, итерационных процедур и фрактального морфинга.

3. В работах ИРЭ РАН, в отличие от зарубежных, с самого начала была заложена определяющая идея обработки малококонтрастных изображений.

4. Разработана модель анализируемых изображений с учётом аддитивных и мультипликативных фоновых помех при обработке сложных (наличие объектов и целей) двумерных сцен. Применение фрактальной обработки обычно требует большого числа изображений местности в различных масштабах. Предложенные в ИРЭ РАН алгоритмы используют операции конволюции и позволяют обходиться только единичными изображениями.

5. Исследованы фрактальные характеристики как синтезированных, так и реальных изображений местности. Доказано, что фрактальная обработка оптических и радиолокационных (в миллиметровом диапазоне радиоволн) изображений даёт практически одни и те же результаты.

6. Проведено компьютерное моделирование фрактального обнаружения целей в виде множества геометрических фигур. Впервые установлена инвариантность фрактальной размерности изображения от относительной яркости цели.

7. Впервые показано, что плотность изображения нефрактальной цели влияет на изменение размерности слабее, чем отношение площадей, покрываемых целью и фрактальным изображением. Данное свойство особенно ценно в задачах обнаружения малококонтрастных целей и выявления подозрительных областей. Зависимости фрактальной размерности синтезированных и реальных радиолокационных изображений от относительной площади цели имеют схожий характер.

8. Впервые разработанный алгоритм обнаружения малококонтрастных целей, использующий фрактальные признаки, стабильно функционирует при низких значениях сигнал/фон. Для целей в виде прямоугольников различных размеров на изображениях в оптическом и радиодиапазоне получено достаточно уверенное обнаружение при отношении сигнал/фон -10 дБ ... -20 дБ и ниже. Наличие пространственных гауссовских флуктуаций площади прямоугольных целей со среднеквадратичным отклонением порядка 30% показало практически их одинаковую степень обнаружения (вариации фрактальной размерности были замечены во вторых знаках после запятой). Это даёт основание в первом приближении утверждать, что реальные малококонтрастные цели так же эффективно будут обнаруживаться в указанных диапазонах сигнал/фон.

9. Проведён анализ распределений фрактальных размерностей D различных типов простых и сложных изображений. Впервые построенные в ходе компьютерного моделирования эмпирические распределения вероятностей фрактальной размерности реализаций «изображение + фон» и «изображение» имеют одномодовый характер с резко различающимися средними значениями. Это позволяет производить синтез различных обнаружителей, в том числе и непараметрических.

10. Определение одномерных фрактальных сигнатур по площади исследуемых изображений в различных направлениях даёт новый метод измерения анизотропии изображений поверхности или протяжённой цели.

Таким образом, мы располагаем в настоящее время достаточно стройными концепциями, объясняющими явление устойчивого обнаружения сверхслабых сигналов в интенсивных помехах на основе фрактально-скейлинговых методов, и даже умеем управлять этими явлениями. Основой для теории фрактального обнаружения являются результаты фрактального исследования сущности процессов, происходящих при использовании теории дробной меры и физического скейлинга в радиолокации. На наш взгляд, полученные исследования новых экспериментальных данных в совокупности с прежними дают достаточно материала для доказательства основных положений выдвинутой ещё в конце XX века теории и методов [2 – 19]. Данное утверждение подтверждается и всеми позднейшими исследованиями.

Литература

1. Вопросы перспективной радиолокации: Коллективная монография / Бункин Б.В., Реутов А.П., Потапов А.А. и др. М.: Радиотехника, 2003. 512 с.
2. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Логос, 2002. 664 с.
3. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Университетская книга, 2005. 848 с.
4. Потапов А.А. Фракталы и хаос как основа новых прорывных технологий в современных радиосистемах: Дополнение к кн.: Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах / Пер. с англ.; под ред. Т.Э. Кренкеля. М.: Техносфера, 2006. С. 374–479.
5. Новейшие методы обработки изображений / Потапов А.А., Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Пахомов А.А., Герман В.А. / под ред. А.А. Потапова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 496 с. (монография - по гранту РФФИ № 07 – 07 - 07005).
6. Неголономные, фрактальные и связанные структуры в релятивистских сплошных средах, электродинамике, квантовой механике и космологии: В 3-х тт. / Подосенов С.А., Потапов А.А., Фоукзон Дж., Менькова Е.Р. / под ред. А.А. Потапова.- М.: ЛЕНАНД, 2015.- 1200 с.

7. *Потапов А.А.* Новые информационные технологии на основе вероятностных текстурных и фрактальных признаков в радиолокационном обнаружении малоконтрастных целей // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 9. С. 1101-1119.
8. *Potapov A.A., German V.A.* Detection of Artificial Objects with Fractal Signatures // Pattern Recognition and Image Analysis. 1998. V. 8, № 2. P. 226-229.
9. *Потапов А.А., Герман В.А.* Применение фрактальных методов для обработки оптических и радиолокационных изображений земной поверхности // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45, № 8. С. 946-953.
10. *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации. Фрактальный анализ сигналов // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 3. С. 261-270.
11. *Потапов А.А.* Топология выборки // Нелинейный мир. 2004. Т. 2. № 1. С. 4 - 13.
12. *Потапов А.А., Герман В.А.* О методах измерения фрактальной размерности и фрактальных сигнатур многомерных стохастических сигналов // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 12. С. 1468-1491.
13. *Потапов А.А., Герман В.А.* Методы фрактальной обработки слабых сигналов и малоконтрастных изображений // Автометрия. 2006. Т. 42, № 5. С. 3 - 25.
14. *Потапов А.А.* К теории функционалов стохастических полей обратного рассеяния // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 3. С. 261-310.
15. *Потапов А.А.* Применение теории фракталов и эффектов скейлинга при обработке малоконтрастных изображений и сверхслабых сигналов в интенсивных помехах // XI Международная конференция «Забабахинские научные чтения», посв. 95-летию Е.И. Забабахина. Снежинск, 16 - 20 апреля 2012 г., РФЯЦ-ВНИИТФ, 2012. С. 311-312.
16. *Потапов А.А.* Фракталы, скейлинг и дробные операторы в современной физике и радиотехнике // Международная конференция XIV Харитоновские тематические научные чтения «Мощная импульсная электрофизика», посв. 110-летию со дня рождения академика Ю.Б. Харитона. Саров, 21 - 25 апреля 2014 г., РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2014. С. 80-81.
17. *Potapov A.A.* The Global Fractal Method and the Fractal Paradigm in Fundamental Radar Problems // International Conference «Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors» Dedicated to the Memory of L.P. Shil'nikov (1934 - 2011). Nizhni Novgorod, Russia, July 1-5, 2013, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, 2013. P. 98.
18. *Потапов А.А.* Фрактальный метод и фрактальная парадигма в современном естествознании. Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2012. 108 с.
19. *Потапов А.А.* Спецтема: автореф. диссертации ... канд. техн. наук (01.04.03) / МФТИ.- М., 1989. 28 с.; *Потапов А.А.* Синтез изображений земных покровов в оптическом и миллиметровом диапазонах волн: дис. ... докт. физ.-мат. наук (01.04.03) / ИРЭ РАН. М., 1994. 436 с.

Статья поступила в редакцию 16.03.2015

Потапов Александр Алексеевич

д.ф.-м.н., профессор, академик Российской академии инженерных наук им. А.М. Прохорова и Российской академии естественных наук, главный научный сотрудник, ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, главный редактор международного журнала «Нелинейный мир», (125009, Москва, ул. Моховая, 11, корп. 7), Президент совместной китайско-российской лаборатории информационных технологий и фрактальной обработки сигналов (Китай, Гуанджоу), тел. 8(495) 629-34-06, e-mail: potapov@cplire.ru

Ильин Евгений Михайлович

д.ф.-м.н., профессор, ведущий аналитик инновационного технологического центра комплекса научной политики МГТУ им. Н.Э. Баумана, e-mail: evgil45@mail.ru

Чигин Евгений Павлович

к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник ИРЭ РАН, учёный секретарь Научного совета РАН по проблеме «Физическая электроника», телефон: 8(495) 629-33-68,
e-mail: ire@cplire.ru

Dimensional and Topological Effects in Fractal-Scaling Detection and Processing of Many-Dimensional Signals

Alexander A. Potapov, Eugene M. Il'yin, Eugene P. Chigin

The modern radio engineering is based on the classical theory of an integer-valued measure and integer-valued calculus. Classical detectors and their mathematical supply have virtually reached its saturation and limit. Use of the Theory of Fractals is amply considered on new concrete examples in modern fundamental radio physical directions. With this fractal approach signals and fields description and processing are carried exclusively in the space of fractional measure by using scaling hypothesizes and distributions with heavy tails.

Keywords: fractal, scaling, texture, radar, signal detection.