УДК 51-77
DOI: 10.55648/1998-6920-2022-16-4-27-42

Математическое моделирование конкуренции двух идеологий с внутренними конфликтами

Е. С. Антипова

При изучении социальных процессов большой интерес представляет прогнозирование поведения общества или отдельных его составляющих. В настоящее время для этого активно разрабатываются методы математического моделирования и соответствующие математические модели. Создание таких моделей сопряжено с определенными трудностями – большая размерность модели, плохая формализуемость рассматриваемых объектов, многокритериальность, слабая структурированность рассматриваемой предметной области и т.п. *Цель* работы – построить математическую модель конкурентной борьбы двух идеологий с учетом спонтанных и вынужденных переходов индивидов между идеологиями, провести анализ полученной модели для определения сценариев развития идеологий, а также найти условия, при которых реализуется тот или иной сценарий. *Методы.* В данной работе проводятся параметрические исследования развития идеологий во времени при различных значениях параметров модели. Для определения условий существования разных сценариев развития идеологий исследуется устойчивость модели. *Результаты.* Предложена модель конкурентной борьбы двух идеологий с учетом спонтанных и вынужденных переходов индивидов между идеологиями. В рассмотренной модели все идеологии с течением времени приходят в устойчивые стационарные состояния. Показано, что развитие идеологий может происходить только по трем сценариям: (A) обе идеологии выживают и сосуществуют; (B) обе идеологии вымирают; и (C) одна из идеологий выживает, а другая вымирает. Определены условия существования каждого из сценариев развития идеологий. *Заключение.* Несмотря на то, что реальная рассматриваемая система является дискретной, при большом числе элементов (приверженцев идеологий) возможен переход к непрерывной модели. Уравнения, полученные в рассматриваемой модели, являются модифицированными уравнениями Лотки–Вольтерры. Анализ модели позволил вывести критерии существования различных сценариев поведения идеологий, определить границы по параметрам модели, разделяющие сценарии развития идеологий. В отличие от аналогичных работ, в данной работе учитываются спонтанные и вынужденные переходы между идеологиями, в том числе за счет внутренних конфликтов. Построенная модель может быть использована для анализа электоральных процессов, прогнозирования возникновения и развития террористических группировок, различных религиозных сообществ и т.д.

Ключевые слова: конкурентная борьба идеологий, внутренние конфликты, математическое моделирование, уравнения Лотки–Вольтерры, устойчивость.

1. Введение

В настоящее время большой интерес представляют исследования различных подходов к моделированию социальных процессов, которые отражают развитие общества и его самоорганизацию. Социальными процессами, как известно, является серия явлений взаимодействия людей друг с другом или серия явлений, происходящих в организации и структуре групп, изменяющих отношения между людьми или отношения между составными элементами общности [1]. К такими явлениям относятся, например, политика, религия и т.п. Известно, что все процессы, изменяющие общество, сводятся либо к сближению людей, либо к их отдалению, в результате чего происходят изменения в обществе (развитие общества), предельными случаями которых являются прогресс и регресс [2].

В основе моделирования социальных процессов лежит анализ социальных механизмов, одним из которых является идеология.

В данной работе понятие «идеология» рассматривается в более широком смысле, нежели политологическая трактовка. Под идеологией здесь понимается система взглядов, концепций и идей, разделяющих общество на социальные группы по политическим, религиозным, научным (различные научные концепции, теории, взгляды и т.п.), культурным (направления моды, музыки, субкультуры и т.п.) и другим интересам [3–5].

История показывает, что общество (даже примитивное) не может существовать без идеологий. Идеологии играют одновременно объединяющую и разделяющую роль: они объединяют своих приверженцев (сторонников) и в то же время разделяют людей, придерживающихся других идеологий. Это разделение не всегда является антагонистическим.

Как правило, в обществе существует не одна, а несколько идеологий, среди которых могут быть как неконкурирующие, так и конкурирующие между собой, в том числе непримиримые. Каждая идеологий имеет определенное количество адептов и ведет конкурентную борьбу с аналогичными идеологиями с целью привлечения новых приверженцев, что играет большую роль в развитии общества. Примерами непримиримых идеологий могут служить фашизм и коммунизм, коммунизм и капитализм, теория Дарвина и религия и т.д.

Большое распространение получили математические модели различного вида конкуренций, основанные на моделях Лотки–Вольтерры. Так, в работе [6] рассмотрено моделирование классовой борьбы для малых городских ареалов, где в качестве «жертвы» выступает площадь землепользования, а в качестве «хищника» – земельная рента.

В работе [7] рассмотрена конкурентная борьба между рабочим классом и капиталистами, используя допущения, что рабочие тратят весь свой доход на потребление, а капиталисты накапливают доход. Модель учитывает взаимодействие между уровнем занятости, который играет роль «жертвы», и установленной государством долей затрат на оплату труда, которая играет роль «хищника».

В работе [8] рассмотрена математическая модель стратификации общества для систем с одной и двумя партиями, которая сводится к системам двух и трех дифференциальных уравнений соответственно.

В работе [9] рассматривается модель мутуализма – взаимовыгодного взаимодействия различных систем. В социально-экономических системах эта модель также сводится к моделям внутривидовой и межвидовой конкуренции и является модификацией модели Лотки–Вольтерры для n-мерных популяционных систем.

Другой класс работ, посвященных применению математического моделирования в социальных науках, основан на математических моделях эпидемиологического типа [10, 11]. Моделирование с помощью эпидемиологической математической модели позволяет анализировать динамику отношений между различными идеологическими группами, влияние идеологий друг на друга. В работе [10] рассмотрена борьба с терроризмом с помощью построенной математической модели эпидемиологического типа. В работе [12] проанализирована дискретная модель населения для прогнозирования в краткосрочном периоде электоральной поддержки истеблишмента и экстремистских партий, а также уровня воздержавшихся и незарегистрированных избирателей.

В [13] построена агентная математическая модель для исследования формирования общественного мнения с учетом деления общества на идеологии. Предполагалось, что общество состоит из агентов двух психологических типов: с ограниченной уверенностью и относительным согласием.

Еще одним направлением исследования социальных систем является динамическая теория информации [14]. Модель борьбы условных информаций используется для описания взаимодействия однотипных видов, прогноза исторических событий, для исследования взаимодействия валют в международной торговле и т.п. Так, в работе [15] построена и проанализирована модель динамики денежных средств в зонах действия нескольких валют. В работах [16–19] рассмотрены логико-математические модели социально-политической дестабилизации социальных систем. В работах [20] рассмотрены модели «борьбы условных информаций», отражающие соперничество цивилизаций и других глобальных акторов.

В настоящей работе рассматривается конкурентная борьба двух непримиримых идеологий и анализируются различные сценарии их развития.

2. Математическая модель конкуренции идеологий

В работе [21] предложена модель конкурентной борьбы двух непримиримых идеологий. В основе модели лежат следующие допущения:

(1) приверженцы одной идеологии не могут быть одновременно приверженцами другой;

(2) кроме двух рассматриваемых идеологий существует континуум – бесконечное множество людей, не являющихся приверженцами ни одной из существующих идеологий;

(3) спонтанно или под действием пропаганды люди могут переходить из одной идеологии в другую, а также переходить в континуум или из континуума в одну из идеологий.

Необходимо отметить, что в данной работе рассматриваются две доминирующие идеологии в обществе. Все остальные субъекты, не относящиеся к рассматриваемым идеологиям, объединены в множество, названное «континуум». В действительности континуум (резервуар воззрений) может содержать в себе представителей множества мелких идеологий, а также субъектов, не поддерживающих никакую идеологию. Предполагается, что размеры континуума существенно больше размеров двух рассматриваемых идеологий, и переходы субъектов из континуума в рассматриваемые идеологии и обратно не изменяют континуум. Считается, что субъекты, входящие в континуум, под действием агитации/пропаганды со стороны двух рассматриваемых идеологий могут изменять свое мнение и перейти в одну из доминирующих идеологий. В том числе такие переходы могут совершать субъекты из континуума, которые ранее не поддерживали ни одну из идеологий. Например, в государстве имеются две доминирующие политические партии. Между выборами численность активных членов этих партий обычно небольшая (много меньше общего числа избирателей). Остальные члены общества либо не определились с выбором партии, либо отдают предпочтение мелким политическим партиям или объединениям. Поэтому их можно отнести к континууму. В результате агитации со стороны представителей двух доминирующих партий или иного влияния сторонники партий могут переходить из одной партии в другую или уходить в континуум, а субъекты из континуума – переходить в одну из доминирующих партий. Другим примером являются субкультуры. Например, не так давно доминирующими субкультурами в обществе были «металлисты» и «панки», однако большинство населения (континуум) не поддерживали ни одну из этих субкультур.

Хотя реальная рассматриваемая система является дискретной, при большом числе приверженцев идеологий возможен переход к непрерывной модели.

В результате были получены уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = \left(\mu_x - \alpha_x - \nu\right)x + \lambda y - \left(\beta_x - \beta_y + \sigma_x\right)xy, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = \nu x + \left(\mu_y - \alpha_y - \lambda\right)y + \left(\beta_x - \beta_y - \sigma_y\right)xy, \tag{2}$$

где x и y – количество приверженцев идеологий X и Y соответственно; $\mu_x x$ и $\mu_y y$ – скорости спонтанных переходов людей из континуума в идеологии X и Y соответственно; $\alpha_x x$ и $\alpha_y y$ – скорости спонтанных переходов в континуум представителей соответствующих идеологий; νx и λy – скорости спонтанных переходов из X в Y и из Y в X соответственно; $\beta_x xy$ и $\beta_y xy$ – скорости переходов соответственно из X в Y и из Y в X под действием пропаганды со стороны приверженцев противоположных идеологий; $\sigma_x xy$ и $\sigma_y xy$ – скорости переходов соответственно в континуум из X и Y под действием пропаганды.

По своему смыслу все параметры $\mu_x, \mu_y, \alpha_x, \alpha_y, \nu, \lambda, \beta_x, \beta_y, \sigma_x, \sigma_y$ неотрицательные, т.к. они характеризуют вероятности соответствующих переходов.

Обозначая

$$a = \mu_x - \alpha_x - \nu,\ b = \beta_x - \beta_y + \sigma_x,\ g = \mu_y - \alpha_y - \lambda,\ r = \beta_y - \beta_x + \sigma_y, \tag{3}$$

получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + \lambda y - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= \nu x + gy - rxy \end{aligned}, \tag{4}$$

где $\lambda, \nu \geq 0$, а параметры a, b, g и r могут принимать любые значения.

3. Моделирование конкуренции двух идеологий с учетом внутренней напряженности

Модель, описываемая уравнениями (4), не учитывает наличие разногласий внутри каждой идеологии, которые также могут приводить к переходам людей из одной идеологии в другую. Рассмотрим модель конкурентной борьбы n идеологий с учетом внутренних конфликтов в каждой из идеологий, обобщающую модель (1), (2):

$$\frac{dx_i}{dt} = \mu_i x_i - \sum_{j\neq i}^{n} \gamma_{ij} x_i - \alpha_i x_i + \sum_{j\neq i}^{n} \gamma_{ji} x_j - \left(\sum_{j\neq i}^{n} \beta_{ij} x_j\right) x_i + \left(\sum_{j\neq i}^{n} \beta_{ji} x_j\right) x_i - \sum_{j\neq i}^{n} \sigma_{ij} x_i x_j - C_i x_i^2 + \sum_{j\neq i}^{n} M_{ji} x_j^2, \tag{5}$$

где $\gamma_{ij} x_i$ – скорость спонтанного перехода из идеологии i в идеологию j; $\beta_{ij} x_i x_j$ – скорость перехода из идеологии i в идеологию j под действием пропаганды со стороны представителей идеологии j; μ_i – вероятность спонтанного перехода из континуума в идеологию i; α_i – вероятность спонтанного перехода представителя идеологии i в континуум; σ_{ij} – вероятность обдуманного перехода в континуум из идеологии i в результате общения представителей попарно разных идеологий i, j; $C_i x_i^2$ – скорость, с которой представители идеологии i переходят в другие идеологии и в континуум под воздействием внутренних конфликтов в идеологии i; $M_{ji} x_j^2$ – скорость, с которой представители идеологии j переходят в идеологию i под воздействием внутренних конфликтов в идеологии j.

Параметры C_i и M_{ji} должны удовлетворять естественному условию

$$C_i \geq \sum_{j\neq i}^{n} M_{ij}, \tag{6}$$

так как часть людей, уходящих из идеологии i за счет внутренних конфликтов, может переходить в континуум.

Уравнение (5) можно привести к каноническому виду

$$\frac{dx_i}{dt} = \left(a_i - \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \right) x_i + \sum_{j \neq i}^{n} (\gamma_{ji} + M_{ji} x_j) x_j \,, \tag{7}$$

где $a_i = \mu_i - \alpha_i - \sum_{j \neq i}^{n} \gamma_{ij}$; $b_{ij} = \left(\beta_{ij} - \beta_{ji} + \sigma_{ij} \right)$ при $i \neq j$ и $b_{ii} = C_i$.

Уравнения (7) являются модификацией уравнений, описывающих детерминированную модель Лотки – Вольтерры. Подобные уравнения были рассмотрены в работах [22–26] применительно к биологическим системам: популяциям видов [22]: микробиомам [23], пищевым цепочкам [24], мозговой активности [25]; экологическим системам [26]; прогнозированию развития технологий [27]; социальным системам [28, 29].

В отличие от работ [6–9, 28, 29], модель (7) рассмотрена в более общем виде, в ней учитываются спонтанные и вынужденные переходы между идеологиями, в том числе за счет внутренних конфликтов.

Рассмотрим частный случай для $n = 2$.

Введем обозначения $C_1 = c; C_2 = d$; $M_{21} = m; M_{12} = l$; $a_1 = a; a_2 = g; b_{12} = r; b_{21} = b;$ $\gamma_{12} = \nu;\ \gamma_{21} = \lambda$.

Параметры $c, d, \lambda, \nu, m, l \geq 0$, a, b, g, r – любые. Из условия (6) следует, что

$$c \geq l,\ d \geq m. \tag{8}$$

В результате уравнения (5) для двух идеологий принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + \lambda y - bxy - cx^2 + my^2 \\ \frac{dy}{dt} &= \nu x + gy - rxy - dy^2 + lx^2 \end{aligned}. \tag{9}$$

Значимую роль в уравнениях (9) играют члены $\lambda y + my^2$ и $\nu x + lx^2$, $\lambda, \nu, m, l > 0$. Отличительной особенностью любой идеологии является постоянная внутренняя борьбы между ее сторонниками, которая приводит к возникновению течений и ответвлений внутри идеологии и, как результат, к зарождению новой конкурирующей идеологии. Таких примеров в истории известно великое множество, начиная от зарождения христианства в недрах иудаизма, разделения христианства на католиков и православных, зарождения протестантизма в недрах католической религии и т.д. и заканчивая возникновением различных музыкальных направлений в результате ответвления от ранее существовавших. Ни одна идеология не может возникнуть на пустом месте: для ее возникновения необходимо, чтобы субъекты, ранее придерживавшиеся других идеологий, по каким-либо причинам начали отказываться от них и формировать новую идеологию. Именно это отражают члены $\lambda y + my^2$ и $\nu x + lx^2$ в уравнениях (9), описывающие в том числе и зарождение новой идеологии.

Полученные уравнения (9) при $\lambda, \nu, m, l = 0$ переходят в уравнения в форме Ферхюльста для моделей с учетом самоограничений роста численности популяций и с учетом скоростей размножения отдельных видов [30].

Из (3) получим условия для a, b, g, r:

$$b + r = \sigma_x + \sigma_y \geq 0. \tag{10}$$

$$a + \nu = \mu_x - \alpha_x \,. \tag{11}$$

$$g + \lambda = \mu_y - \alpha_y. \tag{12}$$

С учетом условий (8) и (10) были проведены параметрические исследования системы (9) и установлено, что идеологии могут развиваться по следующим сценариям (см. Приложение).

(А) Идеологии одновременно сосуществуют (рис. 1), причем в начале своего существования в каждой из идеологий может происходить рост числа приверженцев, что показывает интерес к вновь возникшей идеологии. С течением времени в каждой из идеологий происходит стабилизация числа приверженцев. Примером такой ситуации служат политические партии, существующие длительное время.

(B) Асимптотическое вымирание идеологий. В этом случае наблюдается асимптотический спад числа приверженцев обеих идеологий с течением времени, хотя в начальный период возможен рост числа адептов (рис. 2). Примерами могут служить исчезнувшие субкультуры – эмо, панки, хиппи. В данной статье не рассматривается, куда переходят приверженцы распавшихся идеологий, считается, что они уходят в континуум, который сам по себя тоже можно рассматривать как отдельную третью идеологию, но с очень большим числом приверженцев.

(C) Одна идеология выживает, причем число ее приверженцев стабилизируется с течением времени, а другая – вымирает (рис. 3). Примерами могут служить исчезнувшие политические партии, направления в моде, субкультуры, виды спорта и т.п.

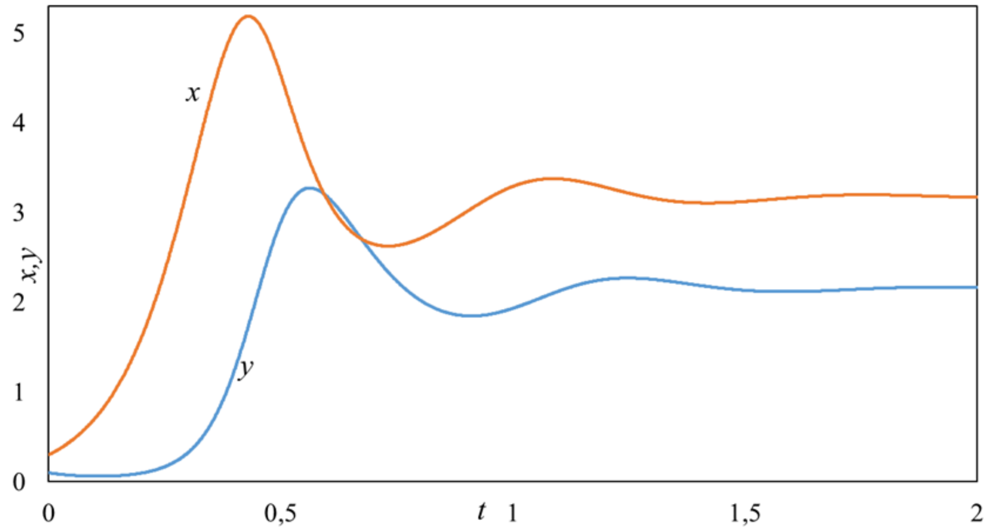

Рис. 1. Сценарий А. Поведение идеологий при $a = 9$; $g = -10$; $r = -3$; $\nu = 0.4$; $b = 4$; $\lambda = 0.7$; $c = 0.5$; $m = 0.5$; $d = 0.7$; $l = 0.3$

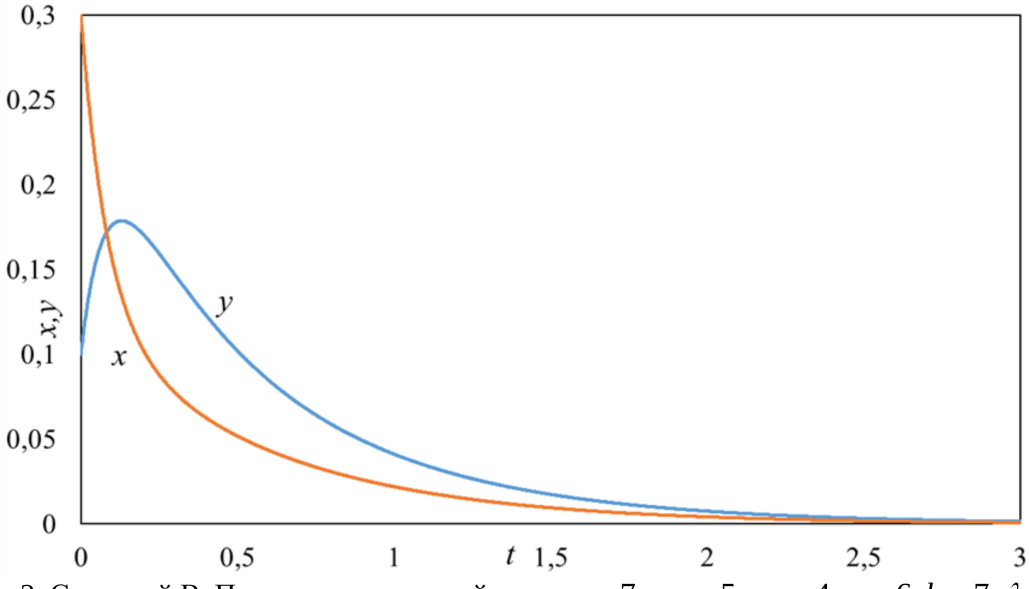

Рис. 2. Сценарий B. Поведение идеологий при $a = -7$; $g = -5$; $r = -4$; $\nu = 6$; $b = 7$; $\lambda = 3$; $c = 4$; $m = 1$; $d = 2$; $l = 3$

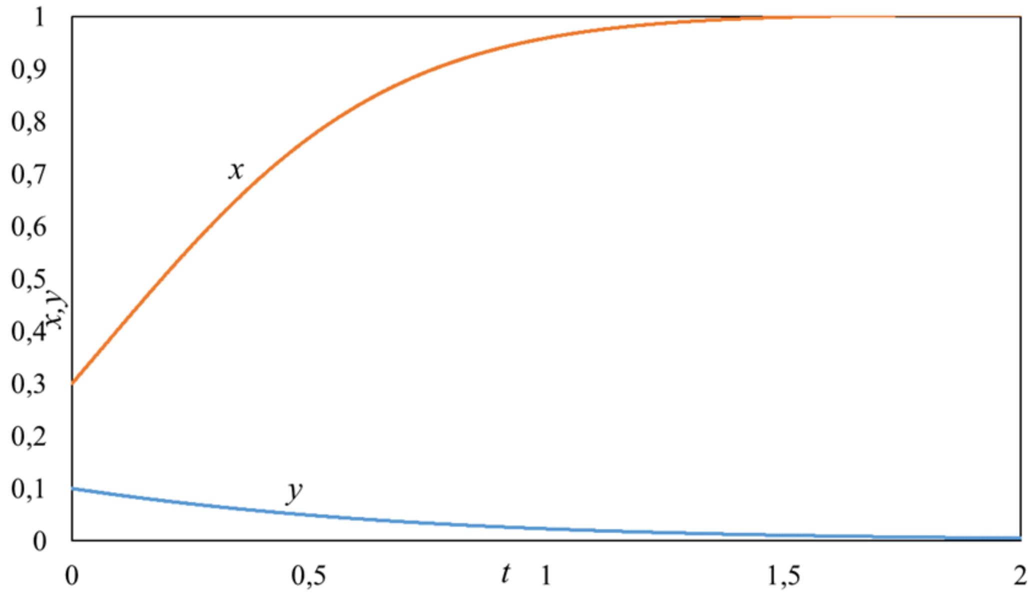

Рис. 3. Сценарий C. Поведение идеологий при $a=3;\ g=-1;\ r=0.5;\ \nu=0;\ b=3;\ \lambda=5;\ c=3;$ $m=1;\ d=2;\ l=0$

Параметрические исследования показали, что при различных значениях параметров системы идеологии всегда приходят в устойчивое стационарное состояние, т.е. число приверженцев идеологий со временем стабилизируется. Это, однако, не означает, что идеологии становятся дружественными, т.к. борьба за адептов продолжается на протяжении всей жизни идеологии.

Представляет интерес рассмотреть влияние параметров системы на сценарий, по которому будут развиваться идеологии. Рассмотрим пары однотипных параметров системы (9), которые имеют одинаковый смысл: $(a,\ g)$, (λ,ν), (b,r), (c,d), (m,l). Будем изменять лишь одну пару параметров при фиксированных других парах. На рис. 4 в координатах (a,g) показано, по какому сценарию будут развиваться идеологии. Расчеты показывают, что в этом случае существуют только два сценария: сосуществования идеологий (сценарий A) и асимптотическое вымирание обеих идеологий (сценарий B). Сценарий B реализуется, только когда оба параметра a и g отрицательные. Сценарий A может быть реализован как при отрицательных, так и при положительных значениях параметров a и g.

Реализация сценария B означает, что стационарное состояние $x=0,\ y=0$ является устойчивым.

Поэтому исследуем на устойчивость к малым возмущениям стационарное состояние $x=0,\ y=0$. В линейном приближении уравнения (9) принимают вид:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=ax+\lambda y\\ \frac{dy}{dt}&=\nu x+gy\end{aligned}. \qquad (13)$$

Решения уравнений (13) имеют вид $x,y\sim\exp(\gamma t)$.

В результате получим характеристическое уравнение

$$\gamma^2-(a+g)\gamma+ag-\lambda\nu=0, \qquad (14)$$

имеющее решение

$$\gamma_{1,2}=\frac{1}{2}(a+g)\pm\sqrt{\frac{1}{4}(a+g)^2-ag+\lambda\nu}. \qquad (15)$$

Стационарное состояние $x=0,\ y=0$ будет устойчивым при $\mathrm{Re}\gamma_1<0$ и $\mathrm{Re}\gamma_2<0$, т.е. при

$$a+g<0 \text{ и } \frac{1}{4}(a-g)^2+\lambda\nu<0 \tag{16}$$

или при

$$a+g<0 \text{ и } ag>\lambda\nu. \tag{17}$$

Учитывая, что по условию всегда $\lambda,\nu>0$, приходим к выводу, что условие (16) никогда не выполняется. Тогда условием устойчивости стационарного состояния $x=0, y=0$, а значит, и условием реализации сценария В будет условие (17). При невыполнении условия (17) будет реализовываться сценарий А. Таким образом, граница, разделяющая сценарий В от сценария А, имеет вид:

$$a+g<0 \text{ и } ag=\lambda\nu. \tag{18}$$

Учитывая, что $\lambda,\nu>0$, приходим к выводу, что $ag>0$, т.е. параметры a и g должны быть одного знака. Тогда первое из условий (18) будет выполняться только при отрицательных значениях параметров a и g. Таким образом, граница, разделяющая сценарии А и В, имеет вид:

$$a<0,\ g<0 \text{ и } ag=\lambda\nu. \tag{19}$$

На рис. 4 линией показана граница раздела (19) сценариев А и В развития идеологий в координатах (a,g), а на рис. 5 – та же граница в координатах λ,ν.

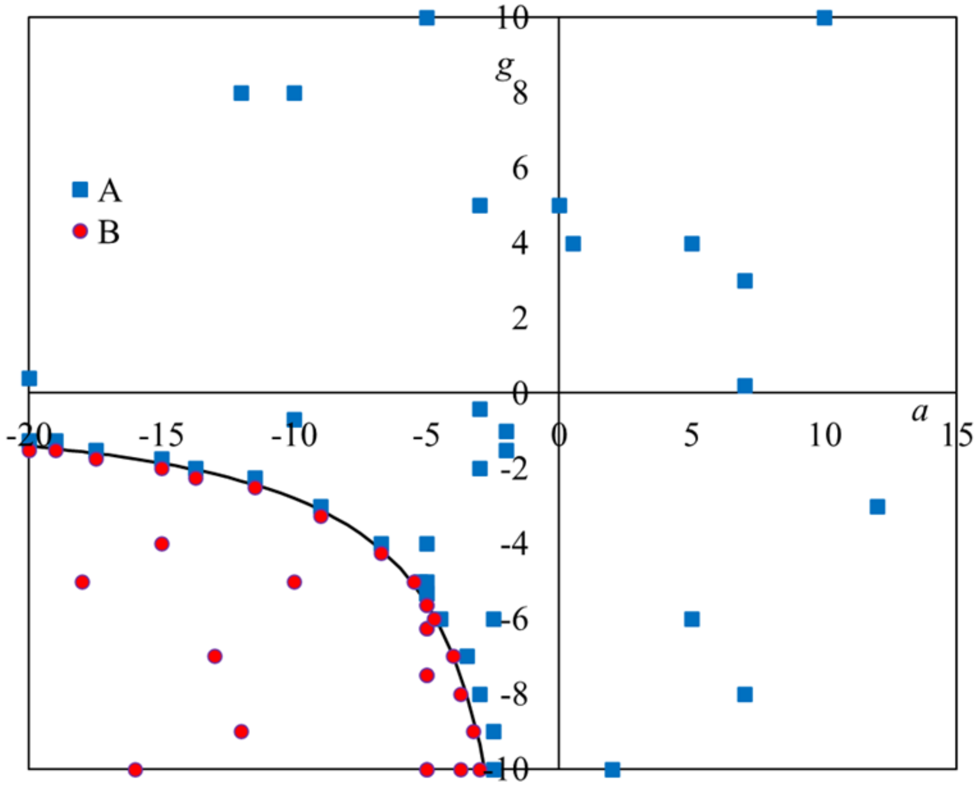

Рис. 4. Сценарии развития идеологий в координатах $(a,\ g)$
при $r=-3;\ \nu=7;\ b=5;\ \lambda=4;\ c=6;\ m=1;\ d=2;\ l=3$.
Значки – результаты решения системы уравнений (9), линия – граница раздела сценариев А и В (19)

При фиксированных значениях параметров $a,\ g,\ \lambda,\nu$ изменение остальных параметров системы не приводит к изменению сценариев развития идеологий.

Если значения параметров $a,\ g,\ \lambda,\nu$ соответствуют сценарию А поведения идеологий, то остальные параметры влияют на стационарные уровни $x(t=\infty)$ и $y(t=\infty)$, на которые выходят идеологии, и на время их достижения. Если значения параметров $(a,\ g)$ и (λ,ν)

соответствуют сценарию B, то остальные параметры отвечают за скорость вымирания обеих идеологий.

Интересным представляется случай, когда выживает только одна из идеологий, а другая перестает существовать (сценарий C). Исследования показали, что необходимыми условиями для реализации сценария C являются (см. Приложение):

$$\nu = 0,\ l = 0 \tag{20}$$

либо

$$\lambda = 0,\ m = 0\,. \tag{21}$$

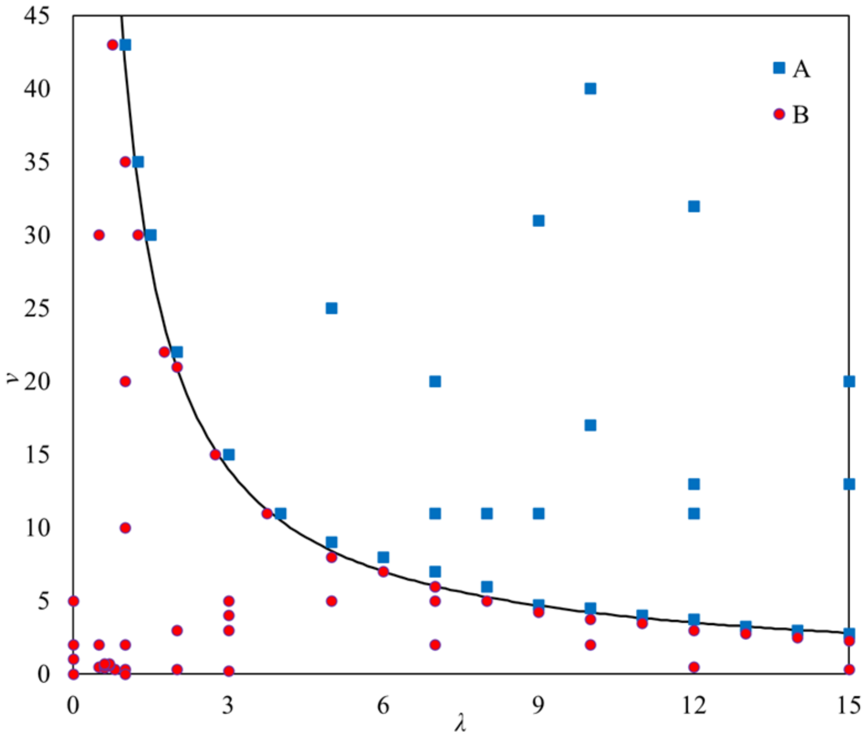

Рис. 5. Сценарии развития идеологий в координатах (λ, ν) при $a = -7,\ g = -6,\ r = -3;\ b = 5;\ c = 6;\ m = 1;\ d = 2;\ l = 3$.
Значки – результаты решения системы уравнений (9), линия – граница раздела сценариев A и B (19)

Условия (20) или (21) означают, что в системе отсутствуют односторонние переходы между идеологиями – как спонтанные, так и из-за внутренних конфликтов. Так, при выполнении условия (20), но при $\lambda \neq 0$ и $m \neq 0$ отсутствуют спонтанные переходы и переходы, связанные с внутренними конфликтами, из идеологии X в идеологию Y, но возможны такие переходы из Y в X. В этом случае идеология Y исчезает, а идеология X выживает и стабилизируется, становясь единственной (господствующей) идеологией (отметим, что континуум не рассматривается в качестве идеологии, т.к. он содержит множество индивидуумов, не связанных никакими идеологиями). При выполнении условий (21) и невыполнении условий (20), наоборот, идеология X вымирает, а поведение идеологии Y стабилизируется.

Для того, чтобы найти условие существования сценария C, исследуем на устойчивость к малым возмущениям стационарное состояние $y = 0$, $x \neq 0$. Пренебрегая всеми членами с y в первом уравнении (9) и квадратами y во втором уравнении (9), приведем уравнения (9) к виду

$$\frac{dx}{dt} = ax - cx^2\,, \tag{22}$$

$$\frac{dy}{dt} = y\left(g - rx\right). \tag{23}$$

Решение уравнения (22) имеет вид:

$$x = \frac{a}{c + \left(\dfrac{a}{x_0} - c\right)\exp(-at)}. \tag{24}$$

Подставляем решение (24) в уравнение (23), после интегрирования получим:

$$\frac{y}{y_0} = \exp\left(gt - \frac{r}{c}\ln\left(\frac{\left|\exp(at) + \left(\dfrac{a}{x_0 c} - 1\right)\right|}{\dfrac{|a|}{x_0 c}}\right)\right). \tag{25}$$

При $a > 0$ и $t \to \infty$ получим:

$$x \to \frac{a}{c}$$

$$\frac{y}{y_0} = \exp\left(\left(g - \frac{ra}{c}\right)t + \frac{r}{c}\ln\left(\frac{x_0 c}{|a|}\right)\right). \tag{26}$$

Состояние $y = 0$ устойчиво только при $g < \dfrac{ra}{c}$.

При $a < 0$ и $t \to \infty$ получим

$$x \to 0$$

$$\frac{y}{y_0} = \exp\left(gt - \frac{r}{c}\ln\left(\frac{\left|\left(\dfrac{a}{x_0 c} - 1\right)\right|}{\dfrac{|a|}{x_0 c}}\right)\right) \tag{27}$$

Состояние $y = 0$ устойчиво только при $g < 0$. Однако в этом случае реализуется сценарий B.

Таким образом, при выполнении условий (20) достаточным условием реализации сценария C является:

$$a > 0 \text{ и } g < \frac{ra}{c}. \tag{28}$$

По аналогии при выполнении условий (21) достаточным условием реализации сценария C является:

$$g > 0 \text{ и } a < \frac{bg}{d}. \tag{29}$$

Отметим, что рассмотренная модель не приводит к колебательным процессам, что соответствует реальному развитию идеологий в обществе. Это обусловлено тем, что, как правило, интересы общественных классов и социальных групп являются относительно постоянными, что обеспечивает размеренное существование и функционирование идеологий [31]. На начальном этапе развития идеологий могут наблюдаться колебания численности их сторонников, что отражает волнообразный интерес общества к новым идеям: циклы «отрицание – принятие», заканчивающиеся привыканием.

4. Заключение

Необходимо отметить, что похожая модель была рассмотрена в работах [28, 29], где предложена базовая модель конкурентной борьбы в социальных и биологических системах, записанная в общем виде. Однако для применения этой модели к конкретной системе (будь то биологическая или социальная система) необходимо четко установить смысл различных составляющих применительно именно к этой системе и указать диапазоны параметров, входящих в уравнения. В данной работе получена конкретная система уравнений, описывающих конкурентную борьбу двух идеологий при наличии континуума с учетом спонтанных и вынужденных (под действием пропаганды и внутренних конфликтов) переходов субъектов между идеологиями, дано обоснование каждого слагаемого с указанием его физического смысла и ограничений, накладываемых на параметры, характеризующие различные процессы. Для этой конкретной системы рассмотрены различные сценарии развития идеологий и определены диапазоны параметров, соответствующих разным сценариям.

Таким образом, показано, что существует три сценария, по которым могут развиваться идеологии: сценарий А – сосуществование идеологий, когда с течением времени число приверженцев в каждой идеологии стабилизируется; сценарий В – асимптотическое вымирание обеих идеологий; сценарий С – вымирание одной идеологии и стабилизация числа приверженцев другой. Определена граница по параметрам системы, разделяющая сценарии А и В, при переходе через которую один сценарий развития идеологий меняется на другой. Получены условия реализации сценария С.

Данная модель может быть применена для анализа поведения различных идеологических групп: политических партий, экстремистских группировок, религиозных сообществ и т.п.

Приложение

Найдем стационарные решения системы (9), которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} &ax+\lambda y-bxy-cx^2+my^2=0\\ &\nu x+gy-rxy-dy^2+lx^2=0 \end{aligned}. \qquad (30)$$

Рассмотрим возможные решения уравнений (30).

1. Решение при $x=0$.

В этом случае уравнения (30) примут вид:

$$\begin{cases} \lambda y+my^2=0\\ gy-dy^2=0 \end{cases}. \qquad (31)$$

Уравнения (31) имеют два решения: $y=0$ или $y\neq 0$. В последнем случае возможны три варианта, зависящие от параметров системы, а именно:

1.1. при $m=0, \lambda=0$ имеем решение $y=\dfrac{g}{d}$; т.к. $y>0$ и $d>0$ по условию задачи, то это решение существует только при $g>0$;

1.2. при $d=0, g=0$ получим $y=-\dfrac{\lambda}{m}<0$, что не имеет физического смысла (по условию задачи $m>0, \lambda>0$);

1.3. при $m\neq 0, \lambda\neq 0$, $d\neq 0, g\neq 0$ должно быть $\lambda d+mg=0$, откуда следует, что $g=-\dfrac{\lambda d}{m}<0$; при этом решение $y=\dfrac{g}{d}>0$ возможно только при $g>0$, что приводит к противоречию.

1.4. Таким образом, для рассматриваемого случая возможны только два стационарных состояния системы: $(0;0)$ и $\left(0;\dfrac{g}{d}\right)$ при $g>0$.

2. Решение при $y=0$.

В этом случае уравнения (30) примут вид:

$$\begin{cases} ax-cx^2=0 \\ \nu x+lx^2=0 \end{cases}. \tag{32}$$

Уравнения (32) имеют два решения: $x=0$ или $x\neq 0$. В последнем случае возможны три варианта, зависящие от параметров системы, а именно:

2.1. при $\nu=0, l=0$ имеем решение $x=\dfrac{a}{c}$; т.к. $x>0$ и $c>0$ по условию задачи, то это решение существует только при $a>0$;

2.2. при $a=0, c=0$ получим $x=-\dfrac{\nu}{l}<0$, что не имеет физического смысла (по условию задачи $l>0, \nu>0$);

2.3. при $a\neq 0, c\neq 0, \nu\neq 0, l\neq 0$ должно быть $al+\nu c=0$, откуда следует, что $a=-\dfrac{\nu c}{l}<0$; при этом решение $x=\dfrac{a}{c}>0$ возможно только при $a>0$, что приводит к противоречию.

Таким образом, для рассматриваемого случая возможны только два стационарных состояния системы: $(0;0)$ и $\left(\dfrac{a}{c};0\right)$ при $a>0$.

3. Решение при $x\neq 0,\ y\neq 0$.

В этом случае при любых допустимых значениях параметров системы (исключая те, что соответствуют пп. 1.1. и 2.1) имеем систему двух уравнений второй степени относительно двух неизвестных (x, y).

Как легко проверить, с геометрической точки зрения каждое уравнение системы (30) описывает гиперболу. Таким образом, решением системы уравнений (30) будут точки пересечения двух гипербол.

Формальное решение системы уравнений в виде каких-то формул не имеет смысла, т.к. кроме сложного вида оно будет содержать в себе 10 параметров системы в разных комбинациях, и ценность такого решения будет невелика.

Тем более не имеет смысла исследовать каждое из этих решений на устойчивость, т.к. в общем случае не удается из этого анализа получить какую-либо полезную информацию. Такой анализ малоинформативен еще и по той причине, что конкретные значения параметров для реальной системы, как правило, не известны.

Вместе с тем с практической точки зрения не играет роли, какие конкретно состояния ($x\neq 0,\ y\neq 0$) рассматриваемой системы существуют и какие из них являются устойчивыми. Гораздо больший интерес представляет выяснить, при каких условиях выживут одновременно обе идеологии, независимо от того, сколько при этом у каждой из них будет сторонников, т.е. независимо от того, в каком конкретном состоянии ($x\neq 0,\ y\neq 0$) они окажутся.

Таким образом, рассматриваемая система может иметь только три типа стационарных состояний: (i) состояние без идеологий – состояние $(0,0)$, (ii) состояние с одной идеологией – состояние $\left(\dfrac{a}{c};0\right)$, которое возможно только при $\nu=0, l=0$ и $a>0$ или состояние $\left(0;\dfrac{g}{d}\right)$, которое возможно только при $m = 0, \lambda = 0$ и $g > 0$, а также (iii) состояние с двумя сосуществующими идеологиями (x_A, y_A) с $x_A \neq 0$ и $y_A \neq 0$.

Если в результате эволюции рассматриваемой системы двух идеологий она приходит в состояние $(0,0)$, то мы говорим, что реализуется сценарий B. Если система приходит в состояние $\left(\frac{a}{c}; 0\right)$ или в состояние $\left(0; \frac{g}{d}\right)$, то мы говорим, что реализуется сценарий C. Если система приходит в любое состояние (x_A, y_A) с $x_A \neq 0$ и $y_A \neq 0$, то считается, что реализуется сценарий A.

Параметрические исследования показали, что всегда реализуется только один из этих сценариев. Поэтому в работе исследуется, при каких условиях реализуется тот или иной сценарий развития идеологий.

Литература

1. *Щепаньский Я.* Элементарные понятия социологии. / под общей ред. и посл. ак. А. М. Румянцева, пер. с польского М. М. Гуренко. М.: Прогресс, 1969. 237 с.
2. *Park R. E., and Burgess E. W.* Introduction to the Science of Sociology. Good Press, 2019. 1152 p.
3. *Hamilton M. B.* The elements of the concept of ideology // Political studies. 1987. V. 35, № 1. P. 18–38.
4. *Матц У.* Идеологии как детерминанта политики в эпоху модерна // Полис. Политические исследования. 1992. № 1–2. С. 130–142.
5. *Мусихин Г. И.* Идеология и культура // Полис. Политические исследования. 2012. № 1. С. 53–62.
6. *Трубецков Д. И.* Феномен математической модели Лотки-Вольтерры и сходных с ней // Известия вузов «Прикладная нелинейная динамика». 2011. Т. 19, № 2. С. 69–88.
7. *Goodwin R. M.* A Growth Model. Socialism and Growth. Cambridge: University Press, 1967.
8. *Цибулин В. Г., Хосаева З. Х.* Математическая модель дифференциации общества с социальной напряженностью // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11, № 5, С. 999–1012. DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-5-999-1012.
9. *Журавка А. В.* Моделирование конкурентно-кооперационных взаимодействий. Социально-экономические системы // Бизнес информ. 2002. № 1–2. С. 49–51.
10. *Santonja F. J., Tarazona A. C., and Villanueva R. J.* A mathematical model of the pressure of an extreme ideology on a society // Computers and Mathematics with Applications, 2008. V. 56, № 3. P. 836–846.
11. *Wang Y., and Bu F.* Modeling radicalization of terrorism under the influence of multiple ideologies // AIMS Mathematics, 2021. V. 7, № 3. P. 4833–4850. DOI: 10.3934/math.2022269.
12. *De la Poza E., Jódar L., and Pricop A.* Mathematical Modeling of the Propagation of Democratic Support of Extreme Ideologies in Spain: Causes, Effects, and Recommendations for Its Stop // Abstract and Applied Analysis, Hindawi. 2013. V. 2013, 729814.
13. *Abrica-Jacinto N. L., Kurmyshev E., and Juárez H. A.* Effects of the interaction between ideological affinity and psychological reaction of agents on the opinion dynamics in a relative agreement model // Journal of Artificial Societies and Social Simulation. 2017. V. 20, № 3. DOI: 10.18564/jasss.3377.
14. *Чернавский Д. С.* Синергетика и информатика. Динамическая теория информации // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2003. Т. 11, №. 6. С. 156–159.

15. *Полищук Р. Ф., Чернавский Д. С., Старков Н. И.* Борьба валют и синергетика. Россия в глобальном мире: вызовы и перспективы развития: синергетический аспект: сборник научных трудов. 2011. С. 102–109.
16. *Малков С. Ю., Коротаев А. В.* О моделировании и прогнозировании региональных и глобальных социально-политических кризисов // Системный мониторинг глобальных и региональных рисков. 2019. С. 155–173.
17. *Бухарин С. Н., Малков С. Ю.* К вопросу о математическом моделировании информационных взаимодействий // Информационные войны. 2010. Т. 2, № 14. С. 14.
18. *Малков С. Ю., Билюга С. Э.* Модель устойчивости/дестабилизации политических систем // Информационные войны. 2015. Т. 1, № 33. С. 7.
19. *Малков С. Ю., Ковалев В. И., Коссе Ю. В.* Моделирование эскалации/деэскалации межгосударственных конфликтов // Стратегическая стабильность. 2017. № 3. С. 53–63.
20. *Чернавский Д. С., Чернавская Н. М., Малков С. Ю., Малков А. С.* Математическое моделирование геополитических процессов // Стратегическая стабильность. 2002. Т. 1. С. 60–66.
21. *Закутняя Л. А., Антипова Е. С.* Модель конкурентной борьбы двух идеологий // Сборник трудов XXIII Всероссийской студенческой научно-практической конференции Нижневартовского государственного университета, 2021. С. 135–142.
22. *Ризниченко Г. Ю.* Лекции по математическим моделям в биологии. 2002.
23. *Remien C. H., Eckwright M. J., and Ridenhour B. J.* Structural identifiability of the generalized Lotka–Volterra model for microbiome studies // Royal Society Open Science, 2021. V. 8, № 7. 201378.
24. *Farhan A. G.* Lotka–Volterra Model with Prey-Predators Food Chain // Iraqi Journal of Science, Special Issue. 2020. P. 56–63.
25. *Рабинович М. И., Мюезинолу М. К.* Нелинейная динамика мозга: эмоции и интеллектуальная деятельность // Успехи физических наук. 2010. Т. 180, № 4. С. 371–387.
26. *AlAdwani M., and Saavedra S.* Is the addition of higher-order interactions in ecological models increasing the understanding of ecological dynamics? // Mathematical Biosciences. 2019. V. 315, 108222.
27. *Zhang G., McAdams D. A., Shankar V., and Mohammadi Darani M.* Technology evolution prediction using Lotka–Volterra equations // Journal of Mechanical Design. 2018. V. 140, № 6. 061101.
28. *Акаев А. А., Малков С. Ю.* Геополитическая динамика: возможности логико-математического моделирования // Геополитика и безопасность. 2009. Т. 4, № 8. С. 39–55.
29. *Чернавский Д. С., Щербаков А. В., Зульпукаров М. Г. М.* Модель конкуренции // Препринты Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН. 2006. № 064. 20 с.
30. *Ризниченко Г. Ю.* Базовые модели Дмитрия Сергеевича Чернавского // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. Т. 9, № 3. С. 389–395.
31. *Фельдман В. Р.* Идеология в социально-исторической динамике // Вестник Томского государственного университета. Философия. Социология. Политология, 2012. Т. 4, № 20 (1). С. 107–113.

Статья поступила в редакцию 22.07.2022.

Антипова Екатерина Сергеевна

старший преподаватель кафедры математических методов в экономике и управлении ФГБОУ ВО «Государственный университет управления» (109542, Москва, Рязанский проспект, 99) e-mail: antipovaes@live.ru.

Mathematical modeling of the competition of two ideologies with internal conflicts

Ekaterina S. Antipova
Senior Lecturer, Department of Mathematical Methods in Economics and Management, State University of Management (109542, Moscow, Ryazansky prospekt, 99) e-mail: antipovaes@live.ru.

When studying social processes, it is of great interest to predict the behavior of society or its individual components. At present, methods of mathematical modeling and corresponding mathematical models are being actively developed for this purpose. The purpose of the work is to build a mathematical model of the competitive struggle of two ideologies taking into account the spontaneous and forced transitions of individuals between ideologies, to analyze the resulting model to determine the scenarios for the development of ideologies, and also to find the conditions under which this or that scenario is realized. Methods. In this paper, parametric studies of the development of ideologies over time are carried out for various values of the model parameters. To determine the conditions for the existence of different scenarios for the development of ideologies the stability of the model is studied. Results. A model of the competitive struggle of two ideologies is proposed taking into account spontaneous and forced transitions of individuals between ideologies. In the considered model all ideologies eventually come to stable stationary states. It is shown that the development of ideologies can occur only according to three scenarios: (A) both ideologies survive and coexist; (B) both ideologies die out, and (C) one of the ideologies survives while the other dies out. The conditions for the existence of each of the scenarios for the development of ideologies are determined. Conclusion. Despite the fact that the real system under consideration is discrete with a large number of elements (adherents of ideologies) a transition to a continuous model is possible. The equations obtained in the considered model are the modified Lotka-Volterra equations. The analysis of the model made it possible to derive criteria for the existence of various scenarios for the behavior of ideologies, to determine the boundaries by the parameters of the model that separate the scenarios for the development of ideologies. Unlike similar works this work takes into account spontaneous and forced transitions between ideologies including those due to internal conflicts. The constructed model can be used to analyze electoral processes, predict the emergence and development of terrorist groups, various religious communities, etc.

Keywords: competitive struggle of ideologies, internal conflicts, mathematical modeling, Lotka-Volterra equations, stability.

References

1. Shchepan'skij Ya. *Elementarnye ponyatiya sociologii. Pod obshchej red. i posl. ak. A.M. Rumyanceva, per. s pol'skogo M.M. Gurenko* [Elementary concepts of sociology]. ed. and post. ak. A.M. Rumyantsev, translated from Polish by M.M. Gurenko, Moscow, Progress Publ., 1969, 237 p.
2. Park R. E., and Burgess E. W. *Introduction to the Science of Sociology*. Good Press, 2019. 1152 p.
3. Hamilton M.B. The elements of the concept of ideology. Political studies, 1987, vol. 35, no. 1, pp. 18-38.
4. Matcz U. Ideologii kak determinanta politiki v e`poxu moderna [Ideologies as a determinant of politics in the era of modernity]. *Polis. Politicheskie issledovaniya*, 1992, no. 1-2, pp. 130-142.
5. Musixin G.I. Ideologiya i kul`tura [Ideology and culture] *Polis. Politicheskie issledovaniya*, 2012, no 1, pp. 53-62.
6. Trubeckov D.I. Fenomen matematicheskoj modeli Lotki-Vol'terry i skhodnyh s nej [The phenomenon of the Lotka-Volterra mathematical model and similar ones]. *Izvestiya vuzov «Prikladnaya nelinejnaya dinamika»*, 2011, vol. 19, no. 2, pp. 69-88.
7. Goodwin R.M. A Growth Model. Socialism and Growth. Cambridge: University Press, 1967.
8. Cibulin V.G., Hosaeva Z.H. Mathematical model of differentiation of society with social tension [Mathematical model of differentiation of society with social tension]. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie*, 2019, vol. 11, no 5, pp. 999-1012.
9. Zhuravka A.V. Modelirovanie konkurentno-kooperacionnyh vzaimodejstvij [Modeling of competitive and cooperative interactions]. *Social'no-ekonomicheskie sistemy. Biznes inform*, 2002, no. 1-2, pp. 49-51.
10. Santonja F.J., Tarazona A.C., and Villanueva R.J. A mathematical model of the pressure of an extreme ideology on a society. Computers and Mathematics with Applications, 2008. vol. 56, no. 3, pp. 836–846.
11. Wang Y., and Bu F. Modeling radicalization of terrorism under the influence of multiple ideologies. AIMS Mathematics, 2021. vol. 7, no. 3. pp. 4833-4850. DOI: 10.3934/math.2022269.

12. De la Poza E., Jódar L., and Pricop *A.* Mathematical Modeling of the Propagation of Democratic Support of Extreme Ideologies in Spain: Causes, Effects, and Recommendations for Its Stop. Abstract and Applied Analysis, Hindawi. 2013. vol. 2013, 729814.
13. Abrica-Jacinto N.L., Kurmyshev E., and Juárez H.A. Effects of the interaction between ideological affinity and psychological reaction of agents on the opinion dynamics in a relative agreement model. Journal of Artificial Societies and Social Simulation. 2017. vol. 20, no. 3. DOI: 10.18564/jasss.3377.
14. Chernavskij D.S. Sinergetika i informatika. Dinamicheskaya teoriya informacii [Synergetics and informatics. Dynamic Information Theory] *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Prikladnaya nelinejnaya dinamika*, 2003, vol. 11, no. 6, pp. 156-159.
15. Polishchuk R.F., Chernavskij D.S., Starkov N.I. Bor'ba valyut i sinergetika. Rossiya v global'nom mire: vyzovy i perspektivy razvitiya: sinergeticheskij aspekt: sbornik nauchnyh trudov. [The struggle of currencies and synergy. Russia in the Global World: Challenges and Prospects for Development: Synergetic Aspect: Collection of Scientific Papers]. 2011, pp. 102-109.
16. Malkov S.Yu., Korotaev A.V. O modelirovanii i prognozirovanii regional'nyh i glo-bal'nyh social'no-politicheskih krizisov [On modeling and forecasting regional and global socio-political crises] *Sistemnyj monitoring global'nyh i regional'nyh riskov*, 2019, pp. 155-173.
17. Bukharin S.N., Malkov S.YU. K voprosu o matematicheskom modelirovanii informatsionnykh vzaimodeystviy [On the issue of mathematical modeling of information interactions.] *Informacionnye vojny*, 2010, vol. 2, no. 14, 14 p.
18. Malkov S.YU., Bilyuga S.E. Model' ustoychivosti/destabilizatsii politicheskikh system [Model of stability/destabilization of political systems] *Informacionnye vojny*, 2015, vol. 1, no 33, 7 p.
19. Malkov S.YU., Kovalev V.I., Kosse YU.V. Modelirovaniye eskalatsii/deeskalatsii mezhgosu-darstvennykh konfliktov [Modeling the escalation/de-escalation of interstate conflicts] *Strategicheskaya stabil'nost'*, 2017, no. 3. pp. 53-63.
20. Chernavskiy D.S., Chernavskaya N.M., Malkov S.YU., Malkov A.S. Matematicheskoye modeli-rovaniye geopoliticheskikh protsessov [Mathematical modeling of geopolitical processes] *Strategicheskaya stabil'nost'*, 2002, vol. 1, pp. 60-66.
21. Zakutnyaya L.A., Antipova E.S. Model' konkurentnoy bor'by dvukh ideologiy [A model of competition between two ideologies] *Trudy XXIII Vserosijskoj studencheskoj nauchno-prakticheskoj konferencii nizhnevartovskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2021, pp. 135-142.
22. Riznichenko G.YU. Lektsii po matematicheskim modelyam v biologii [Lectures on mathematical models in biology] 2002.
23. Remien C.H., Eckwright M.J., and Ridenhour B.J. Structural identifiability of the generalized Lotka–Volterra model for microbiome studies. Royal Society Open Science, 2021, vol. 8, no. 7, 201378, 2021.
24. Farhan A.G. Lotka–Volterra Model with Prey-Predators Food Chain. Iraqi Journal of Science, Special Issue, 2020, pp. 56-63.
25. Rabinovich M. I., Myuyezinolu M. K. Nelineynaya dinamika mozga: emotsii i intellektual'naya deyatel'nost' [Nonlinear brain dynamics: emotions and intellectual activity] *Uspekhi fizicheskih nauk*, 2010, vol. 180, no. 4, pp. 371-387.
26. AlAdwani M., and Saavedra S. Is the addition of higher-order interactions in ecological models increasing the understanding of ecological dynamics?. Mathematical Biosciences, 2019, vol. 315, 108222.
27. Zhang G., McAdams D.A., Shankar V., and Mohammadi Darani M. Technology evolution prediction using Lotka–Volterra equations. Journal of Mechanical Design, 2018, vol. 140, no. 6, 061101.
28. Akayev A.A., Malkov S.YU. Geopoliticheskaya dinamika: vozmozhnosti logiko-matematicheskogo modelirovaniya. [Geopolitical Dynamics: Possibilities of Logic and Mathematical Modeling] *Geopolitika i bezopasnost'*, 2009, vol. 4, no. 8, pp. 39-55.
29. Chernavskiy D.S., Shcherbakov A.V., Zul'pukarov M.G.M. Model' konkurentsii. [Competition model] *Preprinty Instituta prikladnoj matematiki im. M.V. Keldysha*, 2006, no. 0, pp. 64-20.
30. Riznichenko G. YU. Bazovyye modeli Dmitriya Sergeyevicha Chernavskogo [Basic models of Dmitry Sergeevich Chernavsky] *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie*, 2017, vol. 9, no. 3. pp. 389-395.
31. Fel'dman V.R. Ideologiya v sotsial'no-istoricheskoy dinamike [Ideology in socio-historical dynamics] *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Filosofiya. Sociologiya. Politologiya*, 2012, vol. 4, no. 20 (1), pp. 107-113.