УДК 621.833.3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КОНТАКТА ПРИ ЛИНЕЙНОМ КАСАНИИ ВЗАИМООГИБАЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

А. Б. Виноградов

Излагается дифференциальный метод определения скорости контакта по огибаемой поверхности. Предложенным методом произведено исследование скорости перемещения контакта по поверхности зуба колеса в ортогональной глобоидной передаче с исходным цилиндрическим эвольвентным колесом.

1. Введение

Для оценки условий смазки и износа контактирующих поверхностей деталей машин наряду с характеристиками геометрии контакта (приведенная кривизна, длина контактной линии) важно иметь данные о скорости перемещения контакта по этим поверхностям. Теория гидродинамической смазки предписывает определять эту скорость в направлении, перпендикулярном касательной к контактной линии. При исследовании износостойкости скорость перемещения контакта по рабочей поверхности рассчитывают в направлении относительной скорости скольжения. В общем случае линейного касания взаимоогибаемых поверхностей расчёт скорости контакта по огибаемой поверхности нетрудно произвести, если иметь уравнение контактных линий на этой поверхности. Однако если требуются данные о скорости контакта по огибающей поверхности, задача оказывается сложной из-за обычно громоздких уравнений этой поверхности.

В статье рассматривается дифференциальный метод, с одинаковой простотой пригодный для определения скорости контакта как по огибаемой, так и огибающей поверхности.

2. Аналитическое исследование

Существо метода заключается в том, что элемент перемещения контакта по огибающей или огибаемой поверхности рассчитывается в неподвижной системе координат.

Предположим, имеются две взаимоогибаемые поверхности $П_1$ и $П_2$, контактирующие между собой по пространственной кривой $M-M$. Выберем три ортогональные системы координат:

x_1, y_1, z_1, жёстко связанную с поверхностью $П_1$;

систему x_2, y_2, z_2, жёстко связанную с поверхностью $П_2$;

неподвижную систему x, y, z, (рис. 1).

Пусть движение поверхности $П_1$ относительно неподвижной системы координат характеризуется уравнением

$$S_1 = S_1(x, y, z, \phi_1) \quad (1)$$

и уравнением обратного перехода

$$S = S(x_1, y_1, z_1, \phi_1) \quad (2)$$

Здесь S_1 и S – радиус-векторы точки соответственно в системе x_1, y_1, z_1 и системе x, y, z; ϕ_1 – параметр, характеризующий относительное движение.

Движение поверхности $П_2$ относительно неподвижной системы координат будем характеризовать уравнением

$$S_2 = S_2(x, y, z, \phi_2) \quad (3)$$

и уравнением обратного перехода

$$S = S(x_2, y_2, z_2, \phi_2). \quad (4)$$

Здесь S_2 – радиус-вектор точки в системе x_2, y_2, z_2; ϕ_2 – параметр, характеризующий относительное движение.

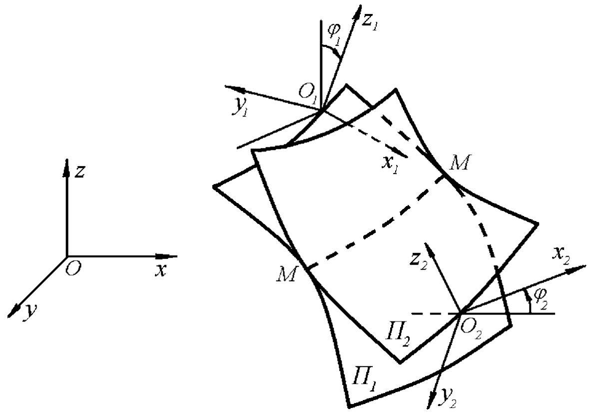


Таблица 1. Расчётная схема

Важной характеристикой относительного движения подвижных систем здесь является связь между

Статья поступила в редакцию 02.10.2007

параметрами ϕ_1 и ϕ_2. При наиболее простой линейной зависимости между ними выражения для первой и второй дифференциальных характеристик [1] имеют вид:

$$\frac{d\phi_2}{d\phi_1} = \frac{\frac{d\phi_2}{dt}}{\frac{d\phi_1}{dt}} = u\,;$$

$$\frac{d^2\phi_2}{d\phi_1^2} = \frac{du}{d\phi_1} = 0\,,$$

где u носит название передаточного отношения.

В этом случае интегральной характеристикой будет

$$\frac{\phi_2}{\phi_1} = u \qquad (5)$$

Для простоты дальнейшего изложения принимаем $u = const$.

Выражения (1) – (5) дают возможность установить связь между дифференциальными элементами взаимоогибаемых поверхностей. Пусть далее $F_1(x,\ y,\ z) = 0$ – уравнение огибаемой поверхности $П_1$. Выражение для контактной линии на этой поверхности можно представить в виде:

$$\left.\begin{aligned} &F_1(x, y, z) = 0,\\ &f_{1x}(x_1, y_1, z_1, u, \phi_1)\frac{\partial z_1}{\partial x_1} +\\ &+ f_{1y}(x_1, y_1, z_1, u, \phi_1)\frac{\partial z_1}{\partial x_1} =\\ &= f_{1z}(x_1, y_1, z_1, u, \phi_1), \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

где второе уравнение – уравнение связи между координатами точки и параметром относительного движения ϕ_1. Функции f_{1x}, f_{1y} и f_{1z} представляют множители так называемого дифференциального комплекса [2].

Переписывая уравнение (6) при помощи формулы (1), получаем уравнение контактных линий в неподвижной системе координат, называемое уравнением поверхности зацепления:

$$\left.\begin{aligned} &F(x, y, z) = 0,\\ &f(x, y, z, u, \phi_1) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Дифференцируем это уравнение по координатам и параметру ϕ_1. Исключая $d\phi_1$, записываем выражение для элемента поверхности зацепления:

$$Adx + Bdy + Cdz = 0. \qquad (8)$$

Предположим, необходимо определить скорость точки контактной линии по огибающей поверхности в направлении, перпендикулярном касательной к контактной линии. Для этого дифференцируем по координатам и параметру ϕ_2 уравнение (4):

$$dS = dS(dx_2, dy_2, dz_2, d\phi_2, x_2, y_2, z_2, \phi_2). \qquad (9)$$

В выражении (9) координаты x_2, y_2 и z_2 заменяем соответствующими значениями этих координат из уравнения (3), а проекции дифференциального элемента поверхности $П_2$: dx_2, dy_2 и dz_2 заменяем их значениями из дифференцированного по координатам уравнения (3):

$$dS_2 = dS_2(dx_{П2}, dy_{П2}, dz_{П2}, \phi_2).$$

Здесь дифференциалам dx, dy, dz придан индекс $П_2$, поскольку они выражают элементарное перемещение точки по поверхности $П_2$ в неподвижной системе координат.

В результате подстановки уравнение (9) приводится к виду

$$dS = dS(dx_{П2}, dy_{П2}, dz_{П2}, d\phi_2, x, y, z, \phi_2). \qquad (10)$$

Если объединить уравнения (8) и (10) в систему

$$\left.\begin{aligned} &Adx + Bdy + Cdz = 0,\\ &dS = dS(dx_{П2}, dy_{П2}, dz_{П2}, d\phi_2, x, y, z, \phi_2), \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

то получим выражение для элементарного перемещения по поверхности $П_2$, записанное в неподвижной системе координат.

Чтобы выразить элементарное перемещение в направлении, перпендикулярном контактной линии, необходимо и достаточно на зависимость (11) наложить условие в виде дифференциального элемента линии (в точке контакта), представляющего пересечение элементов касательной плоскости и плоскости, нормальной касательной к линии контакта:

$$\left.\begin{aligned} &dz_{П2} = \frac{\partial z_П}{\partial x_П}dx_{П2} + \frac{\partial z_П}{\partial y_П}dy_{П2},\\ &T_x dx_{П2} + T_y dy_{П2} + T_z dz_{П2} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Здесь

$$\frac{\partial z_П}{\partial x_П} = \frac{\partial z_{П1}}{\partial x_{П1}} = \frac{\partial z_{П2}}{\partial x_{П2}}$$

и

$$\frac{\partial z_П}{\partial y_П} = \frac{\partial z_{П1}}{\partial y_{П1}} = \frac{\partial z_{П2}}{\partial y_{П2}}\,,$$

поскольку в точке касания взаимоогибаемых поверхностей имеет место общая касательная плоскость; T_x, T_y и T_z – величины, пропорциональные косинусам углов, составленных касательной к контактной линии и осями координат.

Итак, совместное решение уравнений системы

$$\left.\begin{aligned} &Adx + Bdy + Cdz = 0,\\ &dS = dS(dx_{П2}, dy_{П2}, dz_{П2}, d\phi_2, x, y, z, \phi_2),\\ &dz_{П2} = \frac{\partial z_П}{\partial x_П}dx_{П2} + \frac{\partial z_П}{\partial y_П}dy_{П2},\\ &T_x dx_{П2} + T_y dy_{П2} + T_z dz_{П2} = 0 \end{aligned}\right\}$$

относительно $dx_{П2}$, $dy_{П2}$ и $dz_{П2}$ позволяет выразить интересующее нас перемещение:

$$dS_{П2} = \sqrt{dx_{П2}^2 + dy_{П2}^2 + dz_{П2}^2}\,.$$

При этом если вынести дифференциал $d\phi_2$, то это перемещение можно представить в виде:

$$dS_{П2} = r_{П2} d\phi_2\,, \qquad (12)$$

где $r_{П2}$ – множитель, являющийся функцией координат точки, передаточного отношения u и параметра ϕ_2.

Но $d\phi_2 = \omega_2 dt$,

где $\omega_2 = \dfrac{d\phi_2}{dt}$ – угловая скорость.

Подставляя зависимость (13) в выражение (12), получаем формулу для определения мгновенной скорости точки контактной линии в заданном направлении:

$$V_{П2} = r_{П2}\omega_2\,.$$

Аналогичным образом можно получить выражение для скорости контактной точки в заданном направлении по огибаемой поверхности:

$$V_{П1} = r_{П1}\omega_1 \qquad (13)$$

где ω_1 – угловая скорость звена с поверхностью $П_1$.

Данным методом произведено исследование скорости перемещения контакта по поверхности зуба колеса в ортогональной глобоидной передаче с исходным цилиндрическим эвольвентным колесом.

При выбранной системе координат (рис. 2) и однопараметрическом задании эвольвентной винтовой поверхности (огибаемой) зуба колеса уравнение поверхности зацепления можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} &x\cos\theta - y\sin\theta = r_{b1},\\ &-y + z\cos\theta\, tg\delta = r_{w1}. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Здесь $\theta = \phi_1 + \vartheta$;

ϑ – угловой параметр эвольвентного геликоида;

r_{b1} – радиус основного цилиндра колеса;

δ – угол наклона образующей эвольвентного геликоида;

r_{w1} – радиус начальной окружности.

Продифференцировав уравнение (15) по координатам и параметру θ и исключив $d\theta$, получим дифференциальное уравнение поверхности зацепления:

$$dx + ady + bdz = 0\,, \qquad (15)$$

где $a = \dfrac{y\cos^2\theta + r_{b1}\sin\theta - r_{w1}\sin^2\theta}{\sin\delta\cos\theta\left(\cos\theta - a\sin^2\theta\right)^2}$,

$$b = -\mathrm{tg}\delta\left(\sin\theta + a\cos\theta\right).$$

Для перехода от системы x_1, y_1, z_1 к системе x, y, z имеем

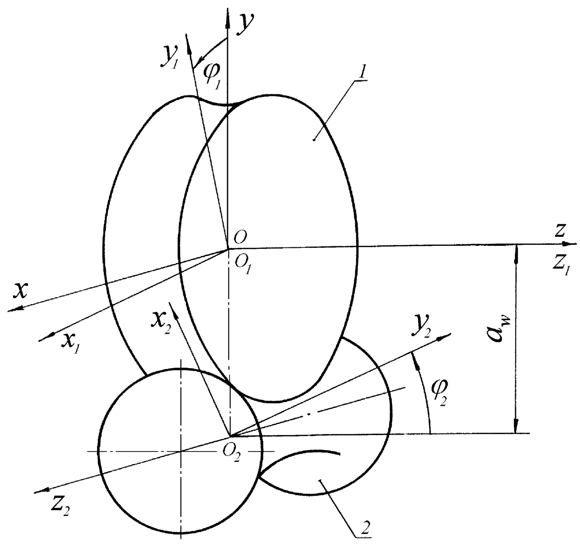


Таблица 2. Система координат передачи

$$\left.\begin{aligned} &x = x_1\cos\phi_1 + y_1\sin\phi_1,\\ &y = -x_1\sin\phi_1 + y_1\cos\phi_1,\\ &z = z_1, \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

и обратно

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = x\cos\phi_1 - y\sin\phi_1,\\ &y_1 = x\sin\phi_1 + y\cos\phi_1,\\ &z_1 = z, \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

где ϕ_1 – угол поворота колеса.

Путем дифференцирования уравнений (17) и (18) согласно изложенной методике получаем выражение, связывающее элементарное перемещение в неподвижной системе координат с возможным элементарным перемещением точки в системе колеса:

$$\left.\begin{aligned} &dx = dx_K + yd\phi_1,\\ &dy = dy_K - xd\phi_1,\\ &dz = dz_K. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Здесь dx_K, dy_K, dz_K – проекции возможного элементарного перемещения (в системе колеса), переписанного в неподвижную систему.

Система уравнений (16) и (19) выражает возможное элементарное перемещение по зубу колеса в неподвижной системе координат.

Дифференцирование уравнения поверхности зацепления при фиксированном угле поворота ϕ_1 позволяет найти значения для коэффициентов

$$\left.\begin{aligned} &T_x = \frac{T_y\sin\theta\cos\theta + y + r_{b1}\sin\theta}{\cos^2\theta},\\ &T_y = -r_{b1}\sin^2\delta\sin\theta,\\ &T_z = \frac{T_y\cos\theta + \left(y + r_{w1}\right)\sin\theta}{\mathrm{tg}\delta\cos^2\theta}, \end{aligned}\right\}$$

представляющие величины, пропорциональные косинусам углов между касательной линии и осями координат.

Следовательно,

$$T_x dx_K + T_y dy_K + T_z dz_K = 0$$

является уравнением элемента плоскости, перпендикулярной касательной к контактной линии.

Поэтому выражение элемента линии в точке контакта имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} & dz_K = r_{b1} dx_K + q dy_K, \\ & T_x dx + T_y dy + T_z dz = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

где в первом уравнении элемента касательной плоскости в точке контакта

$$p = -\mathrm{tg}\delta \sin\theta,$$
$$q = -\mathrm{tg}\delta \cos\theta.$$

Итак, система, составленная из уравнений (16), (19), (20)

$$\left.\begin{aligned} & dx + a dy + b dz = 0, \\ & dx = dx_K + y d\phi_1, \\ & dy = dy_K - x d\phi_1, \\ & dz = dz_K, \\ & dz_K = r_{b1} dx_K + q dy_K, \\ & T_x dx + T_y dy + T_z dz = 0, \end{aligned}\right\}$$

выражает перемещение точки линии контакта по зубу колеса в заданном направлении. Решением этой системы уравнений получим формулу для множителя $r_{П1}$, входящего в зависимость (14):

$$r_{П1} = r_K = \frac{ax - y}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \qquad (20)$$

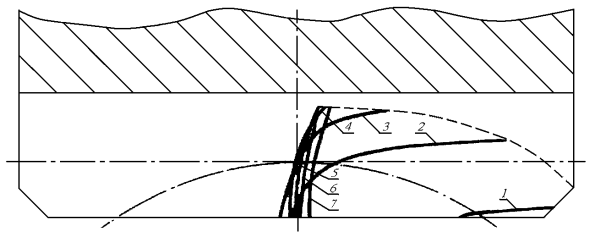
Заметим, что при $\omega_1 = const$ скорость контакта пропорциональна множителю $r_{П1}$ и, следовательно, достаточно исследовать функцию (21), чтобы получить картину изменения самой скорости.

Нами был исследован вариант глобоидной пары с параметрами $u = 41$; $a_w = 80$ мм и радиусом r_{w1}, совпадающим с радиусом r_1 делительной окружности колеса. Контактные линии на зубе колеса, построенные через равные интервалы угла ϕ_1 поворота колеса, изображены на рис. 3, а.

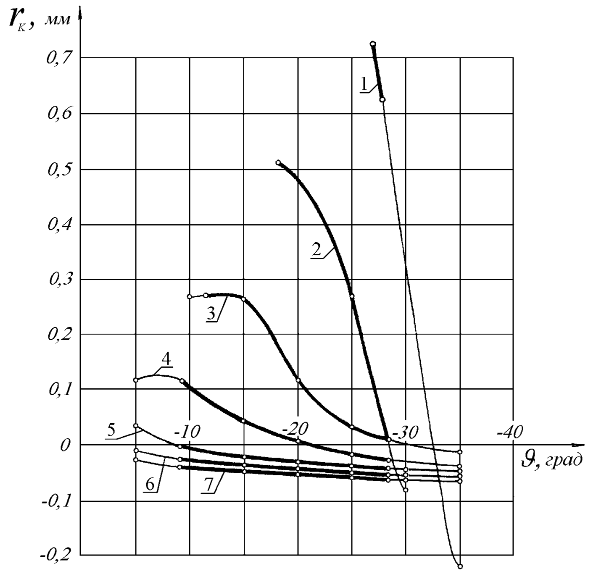
Углы $\varphi_1 = 107^\circ$ и $\varphi_1 = 116^\circ$ соответствуют входу витков червяка в зацепление: углы $\varphi_1 = 63^\circ$ и $\varphi_1 = 72^\circ$ – выходу.

На рис. 3, б показан характер изменения множителя r_K в масштабе 1: ω_1 скорости перемещения контакта V_K. Можно видеть, что действительно скорости точек контактных линий на входе максимальны, а на выходе минимальны и даже противоположны по направлению. Последнее означает, что данный вариант имеет неблагоприятную зону зацепления на выходе, где наблюдается двукратное воздействие контакта на поверхности зуба колеса.

Таким образом, если изображение контактных линий позволяет представить характер скорости перемещения точек по поверхности, то изложенный метод дает возможность оценить эту скорость численно с высокой степенью точности.



а)



б)

Таблица 3. Картина изменения r_K в зависимости от положения контактной точки на зубе колеса: 1 соответствует $\varphi_1 = 116°$, 2 – 107°, 3 – 98°, 4 – 90°, 5 – 81°, 6 – 72°, 7 – 63°

ЛИТЕРАТУРА

1. Колчин Н.И. Аналитические основы дифференциального исследования зубчатых зацеплений // Ин-т машиноведения АН СССР. Тр./ Семинара по теории машин и механизмов. – 1957. – Т. 16. Вып. 64. – С. 26–53.
2. Колчин Н.И. Обработка винтовых поверхностей эллиптическими и круговыми цилиндрами //Тр./ Ленингр. механ. ин-т. – 1962. – № 23. – С. 39–47.

Виноградов Алексей Борисович:

д.т.н., профессор кафедры линии связи СибГУТИ, (630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86) тел. (383) 269-82-53, e-mail: abvinogradov@yandex.ru.