

Приём сигналов при воздействии коррелированных помех

А. И. Фалько, М. С. Шуинов, А. В. Гюнтер

В работе [1] синтезированы алгоритмы приёма в каналах с квазидетерминированными помехами. В [2] синтезированы алгоритмы приёма в условиях стохастических помех.

Цели работы: синтез алгоритмов приёма сигналов при воздействии стохастических помех, заданных своей корреляционной функцией; установление связи между стохастическими и квазидетерминированными помехами; анализ помехоустойчивости приёма.

Представим принятую смесь сигнала с помехами на входе приёмника в комплексной форме

$$\underline{Z}'(t) = \underline{\mu} \underline{Z}_r(t) + \underline{\mu}_\Pi \underline{Z}_\Pi(t) + \underline{\xi}(t), \quad t \in T. \quad (1)$$

Здесь $\underline{\xi}(t) = \xi(t) + j\tilde{\xi}(t)$ – флуктуационная помеха, аппроксимируемая комплексным гауссовым процессом с нулевым средним и спектральной плотностью мощности ν^2 ;

$\tilde{\xi}(t)$ – функция, сопряжённая $\xi(t)$ по Гильберту;

T – интервал наблюдения;

$\underline{\mu} \underline{Z}_r(t)$ – принятый полезный сигнал ($r = 1, \dots, m$) с комплексной огибающей

$$\begin{aligned} \underline{\mu} &= \mu_c - j\mu_s = |\underline{\mu}| e^{j\varphi}; \\ \underline{Z}_r(t) &= Z_r(t) + j\tilde{Z}_r(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $Z_r(t)$ – детерминированная интегрируемая в квадрате функция, определяющая переданный сигнал; $\tilde{Z}_r(t)$ – функция, сопряжённая $Z_r(t)$ по Гильберту;

$\underline{\mu}_\Pi \underline{Z}_\Pi(t)$ – коррелированная помеха (КП), заданная корреляционной функцией $B_\Pi(t)$, у которой комплексная огибающая

$$\underline{\mu}_\Pi = \mu_{c\Pi}(t) - j\mu_{s\Pi}(t); \quad (3)$$

$$\underline{Z}_\Pi(t) = Z_\Pi(t) + j\tilde{Z}_\Pi(t), \quad (4)$$

где $\underline{Z}_\Pi(t)$ – произвольная интегрируемая в квадрате функция, в частности, $Z_\Pi(t) = \exp(j\omega_\Pi t)$, ω_Π – средняя частота коррелированной помехи.

Принятый сигнал и КП имеют ограниченную энергию, что всегда выполняется на практике.

Оптимальное решающее правило по критерию максимального правдоподобия определяется неравенством

$$\ln \Lambda_{re} > 0, \quad r \neq e, \quad (5)$$

в котором Λ_{re} представляет собой отношение правдоподобия для r -го сигнала относительно e -го. Его можно записать в форме

$$\Lambda_{re} = \frac{\mathcal{F}(\underline{Z}' / \underline{Z}_r)}{\mathcal{F}(\underline{Z}' / \underline{Z}_e)}. \quad (6)$$

Здесь $\mathcal{F}(\underline{Z}' / \underline{Z}_r)$ – функционал отношения правдоподобия принятой реализации $\underline{Z}'(t)$ при передаче сигнала $\underline{Z}_r(t)$.

Для определения $\mathcal{F}(\underline{Z}' / \underline{Z}_r)$ воспользуемся концепцией порождающего (обновляющего) процесса [3, 4]. Порождающий процесс определяется выражением

$$\zeta_r(t) = \operatorname{Re} [\underline{Z}'(t) - \hat{\underline{Y}}_r(t)], \quad (7)$$

где $\hat{\underline{Y}}_r(t)$ – оценка сигнала и КП по критерию минимума среднего квадрата ошибки, полученная из наблюдений $\underline{Z}'(t)$ до текущего момента времени. В общем случае оценка $\hat{\underline{Y}}_r(t)$ нелинейна. Для гауссовых процессов оценивание линейно. Остановимся более подробно на этом случае. Будем полагать

$$\hat{\underline{Y}}_r(t) = \hat{\underline{Z}}_\Pi^{(E)}(t) + \hat{\underline{Z}}_r(t). \quad (8)$$

Если сигнал детерминированный, то $\hat{\underline{Z}}_r(t) = \underline{\mu} \underline{Z}_r(t)$.

Эквивалентная оценка КП

$$\begin{aligned} \hat{\underline{Z}}_\Pi^{(E)}(t) &= \int_{t_0}^t [\underline{Z}'(\tau) - \underline{\mu} \underline{Z}_r(\tau)] \underline{\Upsilon}_\Pi(t, \tau) d\tau = \\ &= \hat{\underline{Z}}_\Pi(t) - \underline{\mu} \underline{Z}_r^\Pi(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\underline{\Upsilon}_\Pi(t, \tau)$ – комплексная импульсная характеристика фильтра оценки коррелированной помехи;

$$\hat{\underline{Z}}_\Pi(t) = \int_{t_0}^t \underline{Z}'(\tau) \underline{\Upsilon}_\Pi(t, \tau) d\tau = \hat{\underline{\mu}}_\Pi \underline{Z}_\Pi(t) \quad (10)$$

– собственно оценка КП (в отсутствие сигнала);

$$\underline{Z}_r^\Pi(t) = \int_{t_0}^t \underline{Z}_r(\tau) \underline{\Upsilon}_\Pi(t, \tau) d\tau \quad (11)$$

– сигнальная функция $\underline{Z}_r(t)$ на выходе фильтра оценки КП.

С учётом (8) – (11) выражение (7) примет вид

$$\begin{aligned} \zeta_r(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \underline{Z}'(t) - \hat{\underline{Z}}_{\Pi}(t) - \underline{\mu} \left[\underline{Z}_r(t) - \underline{Z}_r^{\Pi}(t) \right] \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left[\underline{Z}'(t) - \hat{\underline{Z}}_{\Pi}(t) - \underline{\mu} \underline{Z}_r^{(E)}(t) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\underline{Z}_r^{(E)}(t) = \underline{Z}_r(t) - \underline{Z}_r^{\Pi}(t) \quad (13)$$

– эквивалентная сигнальная функция с учётом влияния фильтра оценивания КП.

Рассуждая аналогично [3], можно показать, что порождающий процесс (12) представляет собой белый гауссов шум с нулевым средним и спектральной плотностью мощности ν^2 . Поэтому

$$\underline{Z}'(t) = \underline{\mu} \underline{Z}_r^{(E)}(t) + \hat{\underline{Z}}_{\Pi}(t) + \underline{\zeta}_r(t) \quad (14)$$

и функционал отношения правдоподобия принятой реализации при передаче будет определяться выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\underline{Z}' / \underline{Z}_r) &= \exp \left\{ \operatorname{Re} \left(\frac{\underline{\mu}}{\nu^2} \int_T \left[\underline{Z}'(t) - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \hat{\underline{Z}}_{\Pi}(t) \right] \underline{Z}_r^{(E)*}(t) dt \right) - \frac{|\underline{\mu}|^2}{2\nu^2} \int_T \left| \underline{Z}_r^{(E)}(t) \right|^2 dt \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь * – знак комплексно-сопряжённой функции.

Из (5), (6), (15) следует алгоритм приёма полностью известного сигнала

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \left\{ \frac{\underline{\mu}}{T} \int \left[\underline{Z}'(t) - \hat{\underline{Z}}_{\Pi}(t) \right] \underline{Z}_r^{(E)*}(t) dt \right\} - \\ &- \frac{|\underline{\mu}|^2}{2} \int_T \left| \underline{Z}_r^{(E)}(t) \right|^2 dt > \\ &> \operatorname{Re} \left\{ \frac{\underline{\mu}}{T} \int \left[\underline{Z}'(t) - \hat{\underline{Z}}_{\Pi}(t) \right] \underline{Z}_e^{(E)*}(t) dt \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) видно, что при когерентном приёме из принятой смеси вычитается оценка КП $\hat{\underline{Z}}_{\Pi}(t)$, оптимальная по критерию минимума среднего квадрата ошибки (что эквивалентно процедуре «обеливания»); после этого происходит перемножение полученной разности на образец сигнала $\underline{Z}_r^{(E)}(t)$ с учётом влияния на него фильтра оценки КП.

Введём обозначения:

$$\underline{V}_r = \int_T \left[\underline{Z}'(t) - \hat{\underline{Z}}_{\Pi}(t) \right] \underline{Z}_r^{(E)*}(t) dt, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_r &= 0,5 \left\{ 1 - \frac{1}{E_c} \left[\int_T \underline{Z}_r^*(t) \underline{Z}_r^{\Pi}(t) dt - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \int_T \left| \underline{Z}_r^{\Pi}(t) \right|^2 dt \right] \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$E_c = \frac{1}{2} \int_T \left| \underline{Z}_r(t) \right|^2 dt.$$

С учётом этих обозначений алгоритм (16) примет вид

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \left(\frac{\underline{\mu} \underline{V}_r^*}{E_c} \right) - 0,5 \left| \underline{\mu} \right|^2 E_c \Gamma_r > \\ &> \operatorname{Re} \left(\frac{\underline{\mu} \underline{V}_e^*}{E_c} \right) - 0,5 \left| \underline{\mu} \right|^2 E_c \Gamma_e, \quad r \neq e \end{aligned} \quad (19)$$

Для сигналов с одинаковыми энергиями ($E_r = E_e = E_c$) и симметричном воздействии КП ($\Gamma_r = \Gamma_e$), то есть при условии

$$E_c = \operatorname{const}(r), \quad \Gamma_r = \operatorname{const}(r), \quad (20)$$

что характерно для широкополосных сигналов, из (19) следует существенно более простой алгоритм:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\underline{\mu} \underline{V}_r^*}{E_c} \right) > \operatorname{Re} \left(\frac{\underline{\mu} \underline{V}_e^*}{E_c} \right), \quad r \neq e. \quad (21)$$

Алгоритм некогерентного приёма сигналов (с неизвестной фазой) можно получить в результате максимизации в (6) по фазе. При условии (20) этот алгоритм можно записать в виде

$$|\underline{V}_r| > |\underline{V}_e|, \quad r \neq e, \quad (22)$$

или эквивалентно

$$|\underline{V}_r|^2 > |\underline{V}_e|^2, \quad r \neq e. \quad (23)$$

Для замирающих сигналов, например релеевских, правило решения при условии (20) определится неравенством (23).

Из (21) – (23) видно, что для решения поставленной задачи приёма сигналов в условиях действия коррелированных помех необходимо вычисление $\underline{V}_r$ (17).

Представим (17) в эквивалентной форме:

$$\frac{\underline{V}_r}{\nu^2} = \frac{1}{2} \int_T dt \int_T \underline{H}(t, \tau) \underline{Z}'(\tau) d\tau \int_T \underline{H}^*(t, x) \underline{Z}_r^*(x) dx, \quad (24)$$

где

$$\underline{H}(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\nu^2}} \left[\delta(t - \tau) - \underline{\Upsilon}_{\Pi}(t - \tau) \right]. \quad (25)$$

Здесь $\underline{\Upsilon}_{\Pi}(t - \tau)$ – импульсная характеристика фильтра оценки КП.

В (25) $[\delta(t - \tau) - \underline{\Upsilon}_{\Pi}(t - \tau)]$ – импульсная характеристика «обеливающего» фильтра. Интервал оценивания T в (24) принят совпадающим с интервалом решения (в общем случае они могут отличаться).

Введём в рассмотрение обратное ядро

$$B^{-1}(\tau, x) = \int_T \underline{H}(t, \tau) \underline{H}^*(t, x) dt, \quad (26)$$

связанное с корреляционной функцией смеси коррелированной и флуктуационной помех соотношением

$$\int_T B^{-1}(\tau, x) B(x, u) dx = \delta(\tau - u), \quad (27)$$

где

$$B(x, u) = v^2 \delta(x - u) + B_{\Pi}(x, u). \quad (28)$$

В (28)

$$\begin{aligned} B_{\Pi}(x, u) &= E \left[\underline{Z}_{\Pi}(x) \underline{\mu}_{\Pi}(x) \underline{\mu}_{\Pi}^+(u) \underline{Z}_{\Pi}^+(u) \right] = \\ &= \underline{Z}_{\Pi}(x) \underline{B}_{\mu_{\Pi}}(x, u) \underline{Z}_{\Pi}^+(u). \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь E – знак математического ожидания.

Из (24) с учётом (26) получим

$$\frac{\underline{V}_r}{v^2} = \frac{1}{2} \int_T \int_T \underline{Z}'(\tau) B^{-1}(\tau, x) \underline{Z}_r^*(x) d\tau dx, \quad (30)$$

или, вводя обозначения

$$\underline{Y}_r(\tau) = \int_T B^{-1}(\tau, x) \underline{Z}_r(x) dx, \quad (31)$$

имеем

$$\frac{\underline{V}_r}{v^2} = \frac{1}{2} \int_T \underline{Z}'(\tau) \underline{Y}_r^*(\tau) d\tau. \quad (32)$$

Здесь функция $\underline{Y}_r(\tau)$ в соответствии с (27), (28), (31) определяется неоднородным уравнением Фредгольма:

$$\underline{Z}_r(t) = \int_T B_{\Pi}(t, u) \underline{Y}_r(u) du + v^2 \underline{Y}_r(t), \quad (33)$$

или с учётом (29)

$$\underline{Z}_r(t) = \underline{Z}_{\Pi}(t) \int_T B_{\mu_{\Pi}}(t, u) \underline{Z}_{\Pi}^+(u) \underline{Y}_r(u) du + v^2 \underline{Y}_r(t). \quad (34)$$

Решение таких уравнений методами переменных состояния приведено в [5, т.2]. Оно связано с переходом от интегральных уравнений к дифференциальным, что значительно упрощает как решение, так и моделирование их компьютерными методами. Для этого комплексная огибающая коррелированной помехи $\mu_{\Pi}(t)$ (3) представляется как вектор состояния, который генерируется динамической системой, описываемой комплексным векторным дифференциальным уравнением [5, т.1]

$$\frac{d\mu_{\Pi}(t)}{dt} = \underline{F}_{\Pi}[\mu_{\Pi}(t), t] + \underline{G}_{\Pi}(t) \underline{v}_{\Pi}(t), \quad (35)$$

где $\underline{F}_{\Pi}[\mu_{\Pi}(t), t]$ – в общем случае нелинейная матричная функция. В частном случае гауссовой УП она может быть линейной, тогда уравнение (35) можно представить в виде

$$\frac{d\mu_{\Pi}(t)}{dt} = \underline{F}_{\Pi}(t) \mu_{\Pi}(t) + \underline{G}_{\Pi}(t) \underline{v}_{\Pi}(t). \quad (36)$$

Здесь $\underline{F}_{\Pi}(t)$ и $\underline{G}_{\Pi}(t)$ – матрицы, описывающие динамику системы. Их элементы в общем случае являются не-

прерывными функциями времени. В частном случае $\underline{F}_{\Pi}(t)$ и $\underline{G}_{\Pi}(t)$ могут быть инвариантными во времени. $\underline{v}_{\Pi}(t)$ – комплексный гауссов случайный процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $E[\underline{v}_{\Pi}(t) \underline{v}_{\Pi}^+(\tau)] = \theta_{\Pi} \delta(t - \tau)$, где E – знак математического ожидания; «+» – знак комплексно-сопряжённой операции транспонирования.

Для перехода от (34) к дифференциальным уравнениям вводится функция

$$\underline{S}_r(t) = \int_T B_{\mu_{\Pi}}(t, u) \underline{Z}_{\Pi}^+(u) \underline{Y}_r(u) du, \quad (37)$$

которая определяется уравнениями

$$\frac{d\underline{S}_r(t)}{dt} = \underline{F}_{\Pi}(t) \underline{S}_r(t) + \underline{G}_{\Pi}(t) \theta_{\Pi} \underline{Z}_{\Pi}^+(t) \underline{\eta}(t), \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{\eta}(t)}{dt} &= \frac{1}{v^2} \underline{Z}_{\Pi}^+(t) \underline{Z}_{\Pi}(t) \underline{S}_r(t) - \\ &- \underline{F}_{\Pi}^+(t) \underline{\eta}(t) - \frac{1}{v^2} \underline{Z}_{\Pi}^+(t) \underline{Z}_r(t). \end{aligned} \quad (39)$$

С учётом (37) уравнение (34) можно записать в виде

$$\underline{Z}_r(t) = \underline{Z}_{\Pi}(t) \underline{S}_r(t) + v^2 \underline{Y}_r(t), \quad (40)$$

откуда следует выражение для $\underline{Y}_r(t)$:

$$\underline{Y}_r(t) = \frac{1}{v^2} [\underline{Z}_r(t) - \underline{Z}_{\Pi}(t) \underline{S}_r(t)]. \quad (41)$$

Используя (41), из (32) получим:

$$\underline{V}_r = \frac{1}{2} \int_T \underline{Z}'(t) [\underline{Z}_r(t) - \underline{Z}_{\Pi}(t) \underline{S}_r(t)] dt, \quad (42)$$

где $\underline{S}_r(t)$ определяется моделированием уравнений (38), (39).

В частном случае разложимого ядра корреляционной функции КП

$$B_{\Pi}(t, u) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{\varphi}_i(t) \underline{\varphi}_i^*(u), \quad (43)$$

где λ_i и $\underline{\varphi}_i(t)$ – собственные числа и собственные функции ядра. Обратное ядро $B^{-1}(t, u)$ можно представить в виде

$$B^{-1}(t, u) = \frac{1}{v^2} \left[\delta(t - u) - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda_i + v^2} \underline{\varphi}_i(t) \underline{\varphi}_i^*(u) \right]. \quad (44)$$

Подстановка (44) в (31) даёт

$$\underline{Y}_r(t) = \frac{1}{v^2} \left[\underline{Z}_r(t) - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i \underline{\varphi}_i(t)}{\lambda_i + v^2} \int_T \underline{Z}_r(u) \underline{\varphi}_i^*(u) du \right]. \quad (45)$$

Введём обозначения:

$$h_{\Pi i}^2 = \frac{\lambda_i}{\nu^2}; \underline{G}_{ri} = \int_T \underline{Z}_r(t) \underline{\varphi}_i^*(t) dt. \quad (46)$$

Здесь $h_{\Pi i}^2$ – отношение энергии i -ой составляющей КП к спектральной плотности мощности флуктуационной помехи; $\underline{G}_{ri}$ – комплексный коэффициент взаимной корреляции, определяющий различие структур r -го сигнала и i -ой составляющей КП. Его свойства подробно рассмотрены в [6, п.2.3].

После подстановки (45) в (30) с учётом обозначений (46), получим

$$\underline{V}_r = \frac{1}{2} \int_T \underline{Z}'(t) \left[\underline{Z}_r^*(t) - \sum_{i=1}^k \frac{\overline{h_{\Pi i}^2}}{1 + h_{\Pi i}^2} \underline{G}_{ri}^* \underline{\varphi}_i^*(t) \right] dt, \quad (47)$$

или при $\overline{h_i^2} \gg 1$, что обычно выполняется на практике,

$$\underline{V}_r = \frac{1}{2} \int_T \underline{Z}'(t) \left[\underline{Z}_r^*(t) - \sum_{i=1}^k \underline{G}_{ri}^* \underline{\varphi}_i^*(t) \right] dt. \quad (48)$$

Выражения (47), (48) характерны для квазидетерминированных КП. То есть квазидетерминированную помеху можно интерпретировать как помеху с разложимым ядром корреляционной функции. Для практических целей во многих случаях достаточно ограничиться учётом влияния конечного числа наиболее мощных составляющих КП.

Действительная часть первого слагаемого в правых частях (47), (48) представляет собой напряжение на выходе фильтра, согласованного с сигналом $\underline{Z}_r(t)$, то есть имеющего импульсную характеристику

$$\Upsilon_r(t) = \begin{cases} \underline{Z}_r(T-t), & t \in T, \\ 0, & t \notin T. \end{cases} \quad (49)$$

Каждое слагаемое i второго члена в (48) есть взвешенная с весом $\underline{G}_{ri}^*$ комплексная оценка КП, полученная по неклассифицированной смеси сигнала, коррелированной и флуктуационной помехи, то есть $\int_T \underline{Z}'(t) \underline{\varphi}_i^*(t) dt$. Действительная часть этого выражения является напряжением на выходе фильтра, согласованного с $\varphi_i(t)$. Импульсная характеристика этого фильтра

$$\underline{\Upsilon}_{\Pi i}(t) = \begin{cases} \underline{\varphi}_i(T-t), & t \in T, \\ 0, & t \notin T. \end{cases}$$

Согласно (48) тракт обработки сигнала можно рассматривать как единый согласованный фильтр с импульсной характеристикой

$$\underline{\Upsilon}_r(t) = \begin{cases} \underline{Z}_r^*(T-t) - \sum_{i=1}^k \underline{G}_{ri}^* \underline{\varphi}_i^*(T-t), & t \in T, \\ 0, & t \notin T. \end{cases}$$

Таким образом, в общем случае приёмник должен содержать специализированный вычислитель для моделирования уравнений (38), (39) с целью формирования $\underline{\Upsilon}_r(t)$

(41). Задача существенно упрощается в тех случаях, когда КП имеет разложимое ядро корреляционной функции.

Помехоустойчивость приёма рассмотрим на примере двоичных сигналов с одинаковыми энергиями и симметричном воздействии коррелированных помех, т.е. по правилу (21). Вероятность ошибки как вероятность невыполнения неравенства (21) при передаче первого сигнала определяется известным выражением

$$p_0 = 0,5[1 - \Phi(h_{\Pi})], \quad (50)$$

где $\Phi(h_{\Pi}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{h_{\Pi}} \exp(-x^2/2) dx$ – интеграл вероятности (функция Крампа).

Здесь при стохастических помехах

$$h_{\Sigma}^2 = \frac{h_C^2}{1 + h_{\varepsilon}^2} \frac{(1 - \rho - g_1 + g_2)^2}{1 - \rho}, \quad (51)$$

где $h_C^2 = \frac{\mu^2 E_C}{\nu^2}$ – отношение энергии элемента принятого сигнала к спектральной плотности мощности флуктуационной помехи;

$h_{\varepsilon}^2 = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{\sigma_{\Sigma}^2}$ – отношение дисперсии ошибки оценивания коррелированных помех к дисперсии флуктуационной помехи;

$\rho = \frac{1}{E_C} \int_T \underline{Z}_1(t) \underline{Z}_2(t) dt = \frac{1}{E_C} \int_T \tilde{Z}_1(t) \tilde{Z}_2(t) dt$ – коэффициент, характеризующий вид используемых сигналов ($\rho = -1$ для противоположных сигналов, $\rho = 0$ для ортогональных сигналов);

$g_r^2 = |\underline{G}_{0r}|^2 = \frac{1}{E_C E_{\Pi}} \left| \int_T \underline{Z}_r(t) \underline{Z}_{\Pi}^*(t) dt \right|^2$, $r = 1, 2$ – коэффициент взаимной корреляции r -го сигнала и КП, характеризующий различие структур r -го сигнала и КП ($0 \leq g_1 \leq 1$, $-1 \leq g_2 \leq 0$ для противоположных сигналов; $0 \leq g_1 \leq 1$, $g_2 = 0$ для ортогональных сигналов).

При разложимом ядре корреляционной функции КП (квазидетерминированная помеха)

$$h_{\Pi}^2 = h_C^2 \left(1 - \rho - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{h_{ri}^2 g_i^2}{1 + h_{\Pi i}^2} \right). \quad (52)$$

При $h_{\Pi i}^2 \gg 1$

$$h_{\Sigma}^2 = h_C^2 \left(1 - \rho - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k g_i^2 \right). \quad (53)$$

В (52), (53) введено обозначение $g_i^2 = g_{0i}^2 + g_{02i}^2 - 2g_{12}^{(i)}$ – коэффициент, характеризующий различимость сигналов и φ_i -ой составляющей КП. Он определяется через коэффициенты взаимной корреляции $g_{0ri}^2 = |\underline{G}_{ri}|^2$ (46) r -го сигнала ($r = 1, 2$) с i -ой составляющей КП и через коэффициент

$$g_{12}^{(i)} = \frac{1}{\lambda_i E_c} (x_i^{(П1)} x_i^{(П2)} + y_i^{(П1)} y_i^{(П2)}),$$

где

$$x_i^{(Пr)} = \int_T \operatorname{Re}[Z_r(t)] \operatorname{Re}[\varphi_i(t)] dt,$$

$$y_i^{(Пr)} = \int_T \operatorname{Re}[Z_r(t)] \operatorname{Im}[\varphi_i(t)] dt,$$

$$r = 1, 2.$$

Из выражений (50) – (53) видно, что вероятность ошибки определяется отношением энергии принятого сигнала к спектральной плотности мощности флуктуационной помехи, зависит от вида используемых сигналов, от коэффициентов, характеризующих различимость сигналов и КП. При стохастических помехах с неразложимым ядром корреляционной функции вероятность ошибки зависит также от дисперсии остаточной ошибки оценивания (фильтрации) коррелированной помехи (51). При разложимом ядре корреляционной функции КП при $\overline{h_{Pi}^2} \gg 1$ вероятность ошибки не зависит от мощности составляющих коррелированных помех, так как они компенсируются (режектируются) вместе с составляющими сигнала, совпадающими с помехами. Поэтому необходима избыточность по сигналу.

При некогерентном приёме ортогональных двоичных сигналов вероятность ошибки определяется формулой

$$p_0 = 0,5 \exp(-h^2 / 2), \quad (54)$$

в которой при стохастических помехах

$$h_{\mathcal{G}}^2 = \frac{h_C^2}{1 + h_{\varepsilon}^2} (1 - g_1)^2. \quad (55)$$

В случае разложимого ядра корреляционной функции КП

$$h_{\mathcal{G}}^2 = h_C^2 \left(1 - \sum_{i=1}^k \frac{h_{Pi}^2 \cdot g_{0i}^2}{1 + h_{Pi}^2} \right), \quad (56)$$

где $g_{0i}^2 = g_{01i}^2 = g_{02i}^2 = |\underline{G}_{ri}|^2$, ($r = 1, 2$), $\underline{G}_{ri}$ – определяется (46).

Из (54) – (56) видно, что и при некогерентном приёме вероятность ошибки зависит от отношения энергии принятого сигнала к спектральной плотности мощности флуктуационной помехи, от коэффициентов различимости сигналов и составляющих КП, при стохастических помехах от остаточной ошибки фильтрации КП, а при воздействии квазидетерминированных помех и при $\overline{h_{Pi}^2} \gg 1$ не зависит от интенсивности КП вследствие их режекции.

В условиях замираний сигнала вероятность ошибки определяется усреднением выражений (50) и (54) в соответствии с распределением $h_{\mathcal{G}}$. Например, при релеевских замираниях сигнала вероятность ошибки определяется известными выражениями

$$p_0 = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{\frac{h_{\varepsilon}^2}{2 + h_{\varepsilon}^2}} \right] - \text{при когерентном приёме,}$$

$$p_0 = \frac{1}{2 + h_{\varepsilon}^2} - \text{при некогерентном приёме.}$$

Здесь $\overline{h_{\varepsilon}^2}$ определяется формулами (51) – (53), (55), (56)

при замене в них h_C^2 на среднестатистическое значение $\overline{h_C^2}$.

В общем случае помехоустойчивость приёма зависит от остаточной ошибки оценивания (фильтрации) КП. Ошибка фильтрации зависит от формы спектра, от мощности и ширины полосы КП. В качестве иллюстрации на рисунке 1 приведены зависимости дисперсии ошибки оценивания КП, нормированной к мощности этой помехи на входе $\sigma_{\varepsilon}^2 / \sigma_{П}^2$ от нормированного времени $\alpha_{П} t$, при разных $\sigma_{П}^2 / \alpha_{П} \nu^2$ для КП, имеющей корреляционную функцию вида $B_{П}(\tau) = \sigma_{П}^2 e^{-\alpha_{П} |\tau|}$. Параметр $\sigma_{П}^2 / \alpha_{П} \nu^2$ представляет собой отношение мощности КП к мощности флуктуационной помехи в полосе воздействующей КП. $\tau_{П} = 1 / \alpha_{П}$ – характеризует время, нормированное к интервалу корреляции помехи ($\tau_{П} = 1 / \alpha_{П}$). Зависимости получены моделированием дисперсионного уравнения. Из рисунка 1 видно, насколько быстро в зависимости от мощности КП ошибка фильтрации приближается к своему предельному значению. Практически за время интервала корреляции помехи ошибка фильтрации достигает своего предельного значения. Такой же характер имеет изменение вероятности ошибочного приёма. В реальных каналах высокая достоверность приёма может быть достигнута только благодаря избыточности по сигналу. Для помех с разложимым ядром корреляционной функции этот результат следует непосредственно из формул (52), (53), (56).

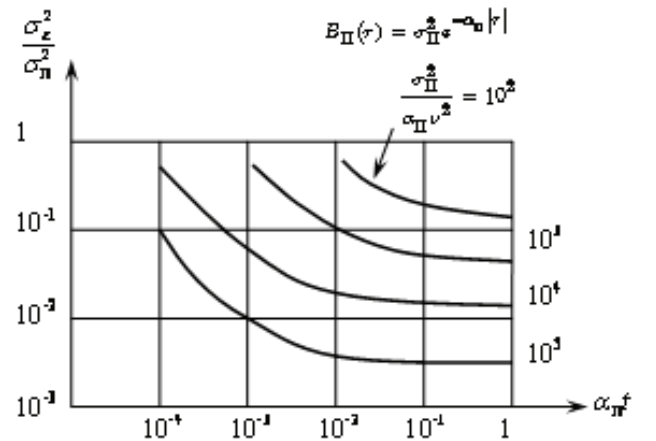


Рис. 1. Зависимости дисперсии ошибки оценивания КП, нормированной к мощности этой помехи на входе $\sigma_{\varepsilon}^2 / \sigma_{П}^2$, от нормированного времени $\alpha_{П} t$

В заключение в качестве иллюстрации приведём зависимости вероятности ошибки от отношения энергии элемента сигнала к спектральной плотности мощности флуктуационной помехи (рисунок 2) для разных условий при приёме фазоманипулированных (противоположных) сигналов. Зависимости рассчитаны по формуле (50) с учётом (51) при воздействии марковской КП, то есть имеющей

корреляционную функцию $B_{\Pi}(\tau) = \sigma_{\Pi}^2 e^{-\alpha_{\Pi}|\tau|}$ при $h_{\Pi}^2 = \sigma_{\Pi}^2 / \alpha_{\Pi} \nu^2 = 10^2$; при разных α_{Π} / F_C , где F_C – ширина полосы полезного сигнала.

В формуле (51)

$$h_{\varepsilon}^2 = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{\sigma_{\Pi}^2} = h_{\Pi}^2 \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{\sigma_{\Pi}^2} \frac{\alpha_{\Pi}}{F_{\Pi}},$$

где $\frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{\sigma_{\Pi}^2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2h_{\Pi}^2}}{h_{\Pi}^2}$ – отношение дисперсии остаточной ошибки оценивания КП к дисперсии (мощности) этой помехи на входе. Оно определяется из дисперсионного уравнения в установившемся режиме или из графика рисунка 1 (в частности, при $h_{\Pi}^2 = 10^2$ $\sigma_{\varepsilon}^2 / \sigma_{\Pi}^2 = 0.132$).

На рисунке 2 кривая 1 соответствует потенциальной помехоустойчивости приёма фазоманипулированных сигналов ($\rho = -1$), то есть в отсутствие КП. Кривая 6 иллюстрирует помехоустойчивость приёма без подавления КП ($h_{\varepsilon}^2 = h_{\Pi}^2 = 10^2$). Зависимости 2, 3, 4, 5 приведены соответственно для

$$\alpha_{\Pi} / F_{\Pi} = 10^{-2} \quad (g_1 + g_2 = 10^{-2});$$

$$\alpha_{\Pi} / F_{\Pi} = 5 \cdot 10^{-2} \quad (g_1 + g_2 = 5 \cdot 10^{-2});$$

$$\alpha_{\Pi} / F_{\Pi} = 0.1 \quad (g_1 + g_2 = 0.1);$$

$$\alpha_{\Pi} / F_{\Pi} = 0.5 \quad (g_1 + g_2 = 0.5).$$

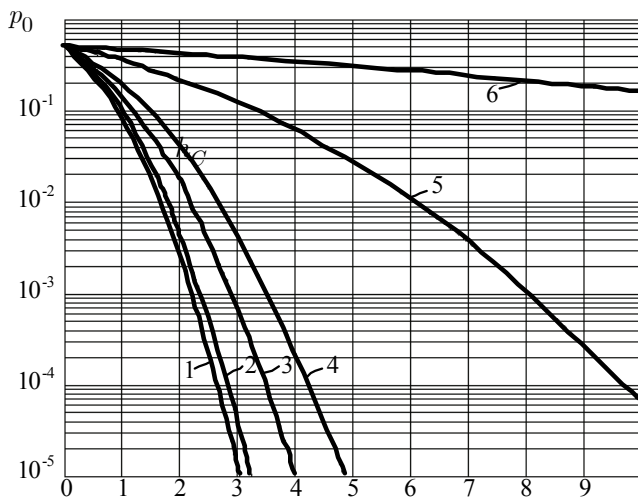


Рис. 2. Зависимости вероятности ошибки от отношения энергии элемента сигнала к спектральной плотности мощности флуктуационной помехи

Из приведённых зависимостей следует, что в приёмнике, построенном оптимально для условий воздействия КП, подавление коррелированных помех существенно и зависит от ширины спектра этих помех (кривые 2...5).

Без учёта различия структур флуктуационных и коррелированных помех помехоустойчивость определяется суммарным воздействием помех (кривая 6). При этом достоверность приёма очень низкая, так как приёмник не опти-

мальный для условий воздействия коррелированных помех.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фалько А.И., Мухин М.А. Адаптивный приём сигналов в каналах с многолучевостью и узкополосными помехами// Радиотехника. – 2004, №10.
2. Фалько А.И., Шушнов М.С. Приём широкополосных сигналов в каналах с многолучевым распространением и стохастическими узкополосными помехами// Радиотехника. – 2007, №2.
3. Кайлат Т. Метод порождающего процесса в применении к теории обнаружения и оценки// ТИИЭР. – 1970. – Т.58. – №5.
4. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974.
5. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т.1. 1972; Т.2. 1975; Т.3. 1977 – М.: Сов. радио.
6. Сикарев А.А., Фалько А.И. Оптимальный приём дискретных сообщений. – М.: Связь, 1978.

Фалько Анатолий Иванович

д.т.н., профессор, кафедра беспроводных информационных систем и сетей (БИСС) СибГУТИ, тел.: (383) 269-82-64, e-mail: falco@neic.nsk.su

Шушнов Михаил Сергеевич

ст. преп. кафедры БИСС, тел.: 8-913-908-48-22.

Гюнтер Антон Владимирович

магистрант кафедры БИСС.