

# Описание процесса ползучести и разрушения при изгибе балок

Т. Э. Захарова

Рассматривается задача изгиба прямоугольной балки из материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие. Предложено решение задачи с помощью уравнений ползучести с одним скалярным параметром повреждаемости. Приведены результаты экспериментов и сравнение их с расчётными значениями.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Расчёт элементов конструкций с использованием кинетических уравнений со скалярным параметром повреждённости практически не отличается от расчётов по энергетическому варианту теории ползучести.

В отличие от энергетического варианта теории ползучести, когда процессы ползучести и разрушения рассматриваются как единый процесс и описываются одним уравнением в энергетических терминах, в варианте кинетических уравнений со скалярным параметром к уравнению ползучести добавляется уравнение повреждаемости в виде «единой кривой» повреждаемости. Предложенные кинетические уравнения со скалярным параметром повреждённости существенно расширяют возможность энергетического варианта теории ползучести для описания процессов ползучести и разрушения как двух процессов, сопутствующих и влияющих друг на друга, для материалов, у которых нарушается энергетический критерий повреждённости.

Для материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие применяются уравнения, учитывающие различие в накоплении повреждений при растяжении и при сжатии. Рассмотрим задачу изгиба прямоугольной балки, на которой проиллюстрируем использование определяющих уравнений ползучести с одним скалярным параметром повреждаемости в практике расчётов. В заключение сравним расчёт с экспериментальными данными.

## 2. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ «ЕДИНОЙ КРИВОЙ» ПОВРЕЖДАЕМОСТИ

Для описания процесса деформирования металлических материалов используется концепция Ю. Н. Работнова [1], когда рассматриваемое состояние в материале характеризуется параметром повреждённости («растресканности»)  $0 \leq q \leq 1$ . В общем случае определяющие уравнения для одноосного напряжённого состояния записываются в виде системы двух уравнений

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{f(\sigma, T)}{\theta(q)}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\varphi(\sigma, T)}{Q(q)}. \quad (1)$$

Запись второго соотношения в таком виде предполагает изначально подобие процессов накопления повреждений во времени при фиксированной температуре и является, вообще говоря, гипотезой, требующей обоснования.

Для простоты изложения приведём рассуждения применительно к неупрочняющимся материалам, за меру интенсивности процесса ползучести будем принимать величину мощности рассеяния при ползучести  $W = \dot{\varepsilon}_{ij}^c \sigma_{ij}$ . Конкретизируем определяющие уравнения (1) одноосной ползучести и повреждаемости:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{f(\sigma, T)}{(1-q)^\mu}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\Phi(\sigma, T)}{(1-q)^k}, \quad (0 \leq q \leq 1) \quad (2)$$

где  $A = \int_0^t W dt = \int_0^{\varepsilon^c} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^c$  – работа рассеяния, коэффициенты  $\mu, k$ , вообще говоря, зависят от температуры  $T$ . Вводя приведённое время

$$\bar{t} = (k+1) \int_0^t \Phi(\sigma, T) dt$$

и интегрируя второе уравнение (2), получим

$$1 - \bar{t} = (1-q)^{k+1}. \quad (3)$$

Проинтегрировав первое уравнение (2) при произвольном напряжённом состоянии с учётом соотношения (3), получим

$$1 - \omega = (1-q)^{k-\mu+1}, \quad (4)$$

где  $k+1 > \mu$ .

С использованием полученного соотношения система исходных уравнений (2) приводится к виду

$$\frac{dA}{dt} = \frac{f(\sigma, T)}{(1-\omega)^m}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\phi(\sigma, T)}{(1-\omega)^m}, \quad (0 \leq \omega \leq 1) \quad (5)$$

где  $\phi(\sigma, T) = (k - \mu + 1)\Phi(\sigma, T)$ ,  $m = \frac{\mu}{k - \mu + 1}$ ,

$$\omega = 1 - \left[ 1 - (m+1) \int_0^t \phi(\sigma, T) dt \right]^{\frac{1}{m+1}}.$$

С учётом введённых обозначений (3), (4) имеем уравнение единой кривой

$$(1-\omega)^{m+1} = 1 - \bar{t}, \quad (0 \leq \omega \leq 1).$$

Учитывая, что величина  $\omega$  функционально связана с исходным параметром повреждённости  $q$  зависимостью (4) и изменяется в тех же пределах, о повреждённости материала

ла можно судить по параметру  $\omega$ . В дальнейшем будем придавать параметру  $\omega$  смысл параметра повреждаемости и записывать определяющие уравнения для описания процесса ползучести и длительной прочности в виде (5) с одинаковыми коэффициентами разупрочнения  $m$  в обоих уравнениях. Полученная система имеет на один коэффициент меньше, чем исходная, и не имеет произвола.

Действительно, интегрируя систему (5) при постоянном напряжении, получим

$$\omega = 1 - [1 - (m+1) \varphi(\sigma, T) t]^{1/(m+1)}, \quad A = \frac{f(\sigma, T)}{\varphi(\sigma, T)} \omega; \quad (6)$$

$$\omega = A/A_*, \quad A_* = f(\sigma, T)/\varphi(\sigma, T), \quad (6)$$

$$\bar{t} = t/t_*, \quad t_* = \frac{1}{(m+1) \varphi(\sigma, T)}. \quad (7)$$

Таким образом, параметр поврежденности для случая одноосного деформирования есть не что иное как отношение текущей работы рассеяния  $A$  к её величине на момент разрушения  $A_*$ , то есть приведённая работа  $\omega = A/A_*$ , а  $\bar{t}$  есть нормированное время – отношение текущего времени к времени разрушения  $t_*$ .

Отметим, что при постоянных напряжениях  $\omega = A/A_* = \varepsilon^c/\varepsilon_*^c$ , поэтому приведённые выше выкладки и рассуждения справедливы и для уравнений в терминах деформация-напряжение с учётом замены  $A$  на  $\varepsilon^c$ . Таким образом, экспериментальную проверку непротиворечивости полученных уравнений следует проводить в нормированных координатах  $\omega = A/A_* = \varepsilon^c/\varepsilon_*^c$ ,  $\bar{t} = t/t_*$ .

Для материалов с тремя стадиями ползучести, введя параметр упрочнения [2], определяющие уравнения запишем в следующем виде

$$\frac{dA}{dt} = \frac{f(\sigma, T)}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\varphi(\sigma, T)}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}. \quad (8)$$

В этом случае уравнение единой кривой запишется следующим образом

$$(1 - \omega^{(\alpha+1)})^{m+1} = 1 - \bar{t},$$

здесь  $\omega$ ,  $\bar{t}$  имеют тот же вид (6), (7).

Выбор функции  $\varphi(\sigma, T)$  определяется кривой длительной прочности, получаемой экспериментально [3], [4]. Так, для сплава АК4-1Т её следует аппроксимировать зависимостью

$$\varphi(\sigma) = B_\omega (\exp \beta \sigma^2 - 1). \quad (9)$$

Ввиду того, что  $\varphi(\sigma)$  – монотонная функция, а также учитывая монотонный характер изменения экспериментальных значений  $A_*(\sigma)$ , где  $A_* = \frac{f(\sigma)}{\varphi(\sigma)}$  в соответствии с (6), функция  $f(\sigma)$  должна иметь тот же вид, что и  $\varphi(\sigma)$

$$f(\sigma) = B_A (\exp \zeta \sigma^2 - 1). \quad (10)$$

Коэффициенты уравнений  $B_\omega$ ,  $\zeta$ ,  $\beta$  определяются исходя из экспериментальных данных мощности диссипации и скорости накопления повреждений [3], [4].

### 3. ИЗГИБ БАЛКИ

Ход решения задачи изгиба прямоугольной балки практически не отличается от изложенного в работе [5]. Расчёты приведём применительно к сплаву АК4-1Т для  $T=200^\circ\text{C}$  по определяющим уравнениям для материалов с тремя стадиями ползучести по уравнениям (8), (9), (10). Характеристики сплава АК4-1Т для этих уравнений ползучести и повреждаемости при  $T=200^\circ\text{C}$  при растяжении [3]:

$$\alpha = 0, \quad m = 2, \quad B_A = 3,0 \cdot 10^{-9}, \quad B_\omega = 2,014 \cdot 10^{-9}, \quad \zeta = 2,09 \cdot 10^4, \quad b = 1,611 \cdot 10^4;$$

при сжатии:

$$\alpha = 0, \quad m = 5, \quad B_A = 8,608 \cdot 10^{-9}, \quad B_\omega = 0,846 \cdot 10^{-9}, \quad \zeta = 1,515 \cdot 10^4, \quad b = 1,291 \cdot 10^4.$$

Для балки, когда вследствие разносопротивляемости материала растяжению и сжатию при ползучести в процессе изгиба происходит непрерывное смещение нейтральной поверхности (расстояние между срединной и нейтральной поверхностями) и, следовательно, смена знака напряжений, действующих в поперечном сечении балки, система уравнений ползучести и повреждаемости в точке представляется в удобном для расчётов виде:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{B_A (\exp \zeta \sigma^2 - 1)}{(1 - \omega)^m} g(\sigma) + \frac{\bar{B}_A (\exp \bar{\zeta} \sigma^2 - 1)}{(1 - \omega)^{\bar{m}}} g(-\sigma), \quad (11)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega (\exp \beta \sigma^2 - 1)}{(1 - \omega)^m} g(\sigma) + \frac{\bar{B}_\omega (\exp \bar{\beta} \sigma^2 - 1)}{(1 - \omega)^{\bar{m}}} g(-\sigma), \quad (12)$$

$$\text{где } \frac{dA}{dt} = \frac{d\varepsilon^c}{dt} \cdot \sigma, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$B_A, B_\omega, \zeta, m, \beta$  – характеристики на растяжение,

$\bar{B}_A, \bar{B}_\omega, \bar{\zeta}, \bar{m}, \bar{\beta}$  – характеристики на сжатие.

Из уравнения равновесия

$$\int_{-h/2}^{h/2} b \sigma (z + \delta) dz = M$$

с учётом гипотезы плоских сечений

$$\sigma/E + \varepsilon^c = \varkappa (z + \delta),$$

где  $\varkappa$  – кривизна балки,

получим выражение для напряжения, действующего на расстоянии  $z$  от нейтральной оси:

$$\sigma = \left[ \frac{M}{J_\delta} + \frac{E}{J_\delta} \int_{-h/2}^{h/2} b \varepsilon^c (z + \delta) dz \right] (z + \delta) - E \varepsilon^c. \quad (13)$$

Здесь введено обозначение  $J_\delta = \int_{-h/2}^{h/2} b (z + \delta)^2 dz$ .

Смещение нейтральной поверхности  $\delta$  определяется из условия отсутствия нормальных усилий в сечении балки:

$$\int_{-h/2}^{h/2} b \sigma dz = 0. \quad (14)$$

Таким образом, система уравнений (11)–(14) с неизвестными  $A$ ,  $\omega$ ,  $b$ ,  $\sigma$ ,  $\delta$  сводится к трём интегродифференциальным уравнениям относительно  $A$ ,  $\omega$ ,  $\varepsilon^c$ . Разбивая сечение балки по высоте на  $(L-1)$  отрезков интегрирования и заменяя интегралы в выражениях (13), (14) конечными суммами, получаем систему  $3L$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая решается

методом Рунге–Кутты с нулевыми начальными условиями при  $t = 0$ :  $\varepsilon_k^c \equiv A_k \equiv \omega_k \equiv 0$  ( $k = 1, \dots, L$ ).

Следует отметить, что в связи с различием записи определяющих уравнений деформирования для растяжения и сжатия при расчёте приходится следить за движением границы смен знаков напряжений. В ходе расчёта приращения деформаций ползучести  $\Delta\varepsilon^c$  в точках разбиения балки по высоте на каком-либо шаге интегрирования  $\Delta t$  при смене знака напряжений имеет место особенность  $\Delta\varepsilon^c = \Delta A / \sigma$ . Учитывая, что в этот момент времени напряжение в  $k$ -той точке разбиения равно нулю или близко к ним, принималось  $\Delta\varepsilon_k^c \equiv 0$ .

#### 4. СРАВНЕНИЕ РАСЧЁТНЫХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

На рис. 1 штрихпунктирными линиями представлены расчётные значения, точками – экспериментальные значения кривизны балки  $\varepsilon = \varepsilon(t)$  для трёх величин изгибающего момента (максимальное напряжение в начальный момент  $\sigma_{\max}(0)$  МПа указано цифрами против соответствующих диаграмм). Эксперимент и расчёт проводились для балок прямоугольного сечения, изготовленных из сплава АК4-1Т (плита толщиной 64 мм,  $b = 10$  мм,  $h = 20$  мм) с использованием приведённых характеристик. Температура испытаний 200°C, количество точек разбиения по высоте принималось равным  $L = 64$ . Все эксперименты на изгиб под действием постоянно действующего момента, а также при знакопеременном моменте доводились до разрушения (звёздочками отмечено время разрушения и соответствующее значение  $\varepsilon^*$ ). Характер накопления повреждений  $\omega$  (штриховые линии) и энергии рассеяния при ползучести  $A$  (сплошные линии) во времени иллюстрируется диаграммами на этом же рисунке для крайних волокон балки в эксперименте с  $\sigma_{\max}(0) = 196,2$  МПа. Здесь знаком «+» обозначены значения для растягивающегося волокна, «-» – для сжимающегося.

На рис. 2а показаны эпюры распределения напряжений в поперечном сечении балки в различные моменты времени  $t = 0; 61; 81; 601$  ч (кривые 1–4 соответственно) в эксперименте с  $\sigma_{\max}(0) = 235,44$  МПа. Исходное упругое напряжённое состояние показано утолщённой линией. Видно, что происходит существенное смещение нейтральной плоскости в область сжатия, непосредственно перед разрушением растягивающие волокна балки перестают сопротивляться деформированию. Распределение повреждаемости по высоте балки в те же моменты времени приведено на рис. 2б.

Отметим, что работа рассеяния в волокнах, работающих на растяжение и сжатие (симметрично расположенных относительно срединной поверхности), практически одинакова при существенно различном накоплении повреждений в них. Экспериментально установлено и подтверждено расчётами, что у материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие при изгибе постоянным моментом разрушение начинается в крайнем волокне, испытывающем растяжение.

Представляет интерес проанализировать процесс накопления повреждений при знакопеременном изгибе, когда экспериментальные данные (в отличие от материалов с одинаковыми свойствами на растяжение и сжатие) показы-

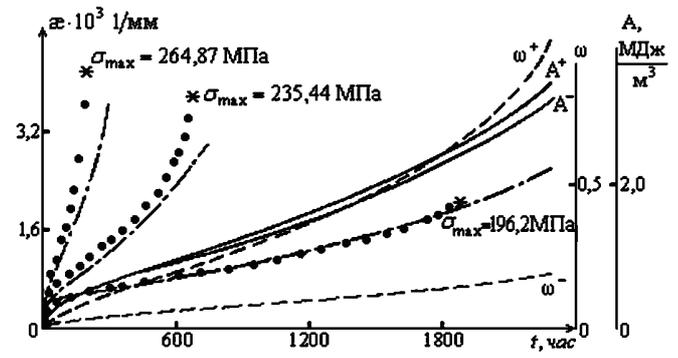


Рис. 1. Расчётные и экспериментальные значения для балок из сплава АК4-1Т

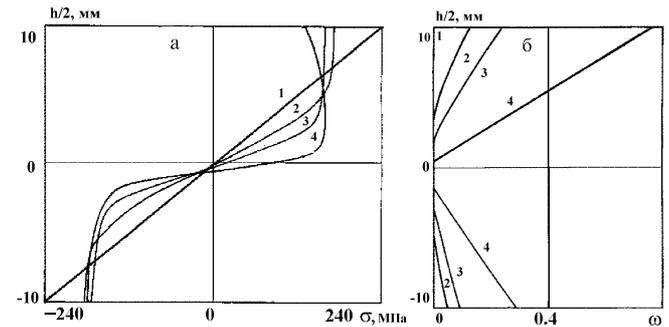


Рис. 2. а) Эпюры распределения напряжений в поперечном сечении балки в различные моменты времени. б) Распределение повреждаемости по высоте балки в различные моменты времени

вают увеличение времени до разрушения по сравнению со стационарным экспериментом.

На рис.3 точками представлены экспериментальные значения изменения кривизны балки во времени при знакопеременном изгибе для двух экспериментов с  $\sigma_{\max}(0) = 196,4$  МПа (время перегрузок отмечено стрелками), сплошными линиями приведён расчёт. Там же для сравнения крестиками и сплошной линией нанесены соответственно экспериментальные и расчётные значения кривизны балки при стационарном моменте с той же величиной  $\sigma_{\max}(0)$ .

Следует отметить, что расчёт проводился в предположении независимости протекания процессов накопления повреждений при растяжении и сжатии, то есть при смене знака напряжений в какой-либо точке второго полуцикла накопленная повреждённость запоминалась и расчёт начинался с нуля по другим соотношениям, соответствующим знаку напряжения. В последующих полуциклах осуществляется суммирование повреждаемостей, накопленных за предыдущие полуциклы при действии напряжений одного знака (то есть суммируются только повреждаемости, накопленные от действия напряжения одного знака). Суммирование же повреждённостей вне зависимости от знака напряжений (расчёт показан штриховой линией на рис. 3б) не подтверждается экспериментально.

На рис. 4 показана картина перераспределения напряжений по высоте балки в различные моменты времени (указано цифрами в часах против соответствующих диаграмм) при продолжительности полуцикла 1283 часа с  $\sigma_{\max}(0) = 196$  МПа.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, вполне удовлетворительное совпадение расчётных и экспериментальных значений  $\varepsilon = \varepsilon(t)$  вплоть до разрушения обосновывает непротиворечивость использования уравнений состояния с одним скалярным параметром повреждаемости для описания процесса деформирования при неоднородном напряжённом состоянии. Экспериментально установлено, что разрушение у материалов с разным накоплением повреждений при растяжении и сжатии, в смысле начала развития трещин в поперечном сечении балки, начинается в растягивающей области.

Достаточно удовлетворительное совпадение расчётных и экспериментальных значений изменения кривизны балки во времени и при знакопеременном изгибе также подтверждает физическую непротиворечивость уравнений с одним скалярным параметром повреждаемости для описания процесса ползучести и накопления повреждений в элементах конструкций вплоть до разрушения. Увеличение длительности до разрушения для материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие при циклическом деформировании по сравнению со стационарными условиями нагружения ещё раз говорит о том, что процессы накопления повреждений при растяжении и сжатии различны.

## ВЫРАЖЕНИЕ БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность сотрудникам лаборатории статической прочности Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева за руководство и помощь в научной работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752с.
2. Соснин О.В., Горев Б.В., Никитенко А.Ф. К обоснованию энергетического варианта теории ползучести. Сообщение 1. Основные гипотезы и их экспериментальная проверка // Проблемы прочности. – 1976. – № 11. – С. 3–8.
3. Горев Б.В., Рубанов В.В. Соснин О.В. О ползучести материалов с разными свойствами при растяжении и сжатии // Проблемы прочности. – 1979. – № 7. – С. 62–67.
4. Горев Б.В., Захарова Т.Э., Клопотов И.Д. К описанию процесса и разрушения материалов с немонотонным изменением деформационно-прочностных свойств // Физическая мезомеханика. – 2002. – Т5, №2. – С. 17–22.
5. Горев Б.В. К расчёту на неустановившуюся ползучесть изгибаемого бруса из материала с разными характеристиками на растяжение и сжатие // Динамика сплошной среды. Новосибирск: ИГ СО АН СССР. – 1973. – Вып. 14. – С. 44–51

## Захарова Татьяна Эрнестовна

доцент кафедры высшей математики СибГУТИ, (630102, Новосибирск, ул.Кирова, 86)  
тел. (383) 269-82-74,  
e-mail: [zaharova.tatyana@mail.ru](mailto:zaharova.tatyana@mail.ru).

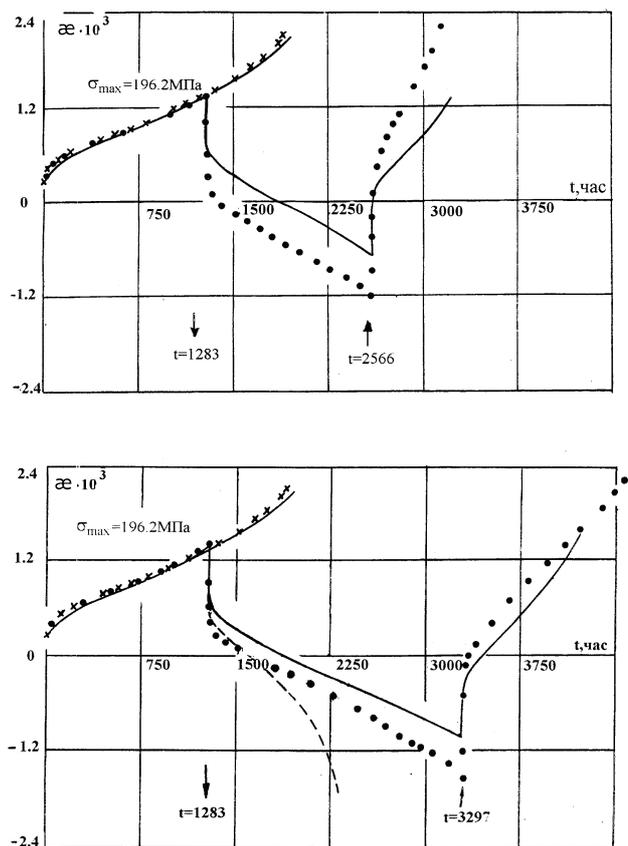


Рис. 3. Экспериментальные значения изменения кривизны балки во времени

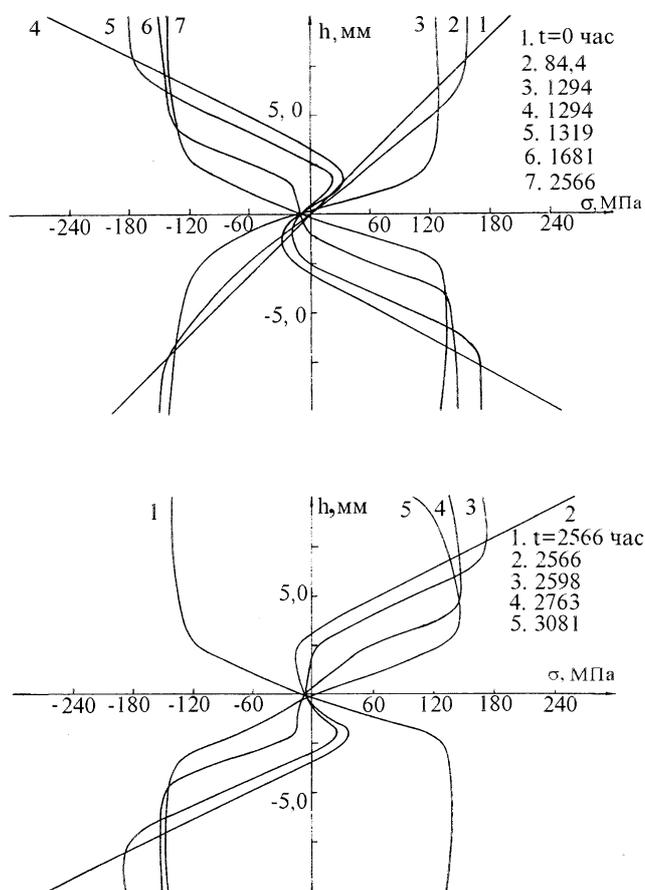


Рис. 4. Перераспределение напряжений по высоте балки в различные моменты времени