

# Достоверность многопараметрического измерительного контроля

В.И. Серых, Л.В. Гребцова

Изложен математический метод расчёта вероятностей ошибок первого и второго рода, определяющих достоверность измерительного контроля многопараметрических объектов, с применением обобщённой модели измерений. Показано достаточно точное совпадение теоретических расчётов с результатами эксперимента, проведённого методами имитационного моделирования.

*Ключевые слова:* многопараметрический измерительный контроль, достоверность.

## 1. Введение

При разработке метрологического обеспечения продукции и услуг связи решаются следующие основные задачи [1, 2]:

- определение номенклатуры контролируемых параметров;
- формирование оптимальных требований к точности измерений;
- выбор средств измерений;
- выбор или разработка методов выполнения измерений.

Полагая, что номенклатура измеряемых параметров объекта контроля известна, рассмотрим задачу математического обоснования требований к точности измерений, результаты решения которой определяют выбор средств и методов выполнения измерений [2]. Известно, что требования к точности измерений параметров объекта контроля определяются допустимыми значениями вероятностей ошибок первого и второго рода с учётом суммарных затрат на измерения [1, 3, 4, 5, 6]. Один из методов оптимизации точности измерений по критерию минимума затрат представлен в работе авторов [6].

Целью данной статьи является разработка метода расчёта вероятностей ошибок первого и второго рода, характеризующих достоверность многопараметрического измерительного контроля.

В работах [7, 8] оценку достоверности многопараметрического контроля проводят методами имитационного моделирования для частного случая аддитивной погрешности с равномерным законом распределения.

Результаты работ [7, 8] показывают, что основным недостатком имитационного моделирования, как и любого эксперимента (в данном случае «машинного»), является то, что результаты моделирования имеют «точечный характер». Кроме того, при применении этого метода на практике нужно каждый раз повторять эксперимент при изменениях условий задачи. Для упрощения задачи моделирования (см. пример 3) авторы [7, 8] вынуждены принимать такие ограничения, как одинаковость измеряемых параметров и допусков на них, одинаковость измерительных установок и их погрешностей, ограниченность равномерным законом распределения погрешностей и др. Очевидно, что для практического применения эти ограничения неприемлемы.

В данной статье представлен математический метод расчёта вероятностей ошибок первого и второго рода (рисков поставщика и заказчика) для обобщённой модели измерений.

## 2. Метод решения

Представим измеренное значение  $i$ -го параметра  $Z_i$  в виде некоторой (обобщённой) модели:

$$Z_i = U_{ci} [1 + \xi_i] + \Delta_{si} + y_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Здесь  $Z_i$  – истинное значение измеряемого сигнала (параметра),  $\xi_i$  – мультипликативная случайная погрешность,  $\Delta_{si}$  – систематическая (неисключённая) погрешность,  $y_i$  – аддитивная случайная погрешность, в общем случае зависящие от времени и распределённые с плотностями вероятности  $f(U_{ci})$ ,  $f(\xi_i)$ ,  $f(\Delta_{si})$  и  $f(y_i)$ , соответственно,  $n$  – число параметров объекта контроля.

Из выражения (1) видно, что обобщённая модель является аддитивной и её можно представить в виде:

$$Z_i = U_{ci} + Y_i, \quad (2)$$

где

$$Y_i = \xi_i U_{ci} + \Delta_{si} + y_i. \quad (3)$$

Плотность вероятности  $f(Y_i)$  определяется функциями свёртки плотностей вероятности случайных слагаемых, входящих в правую часть выражения (3), при условии их статистической независимости [9].

При известной плотности вероятности  $f(Y_i)$  суммарной аддитивной погрешности (3) условная (апостериорная) плотность вероятности измеренного параметра (1)  $p(Z_i/U_{ci})$  равна [9, 10]

$$p(Z_i/U_{ci}) = f_Y(Z_i - U_{ci}), \quad (4)$$

где в правой части представлена плотность вероятности суммарной аддитивной погрешности для разности  $Y_i = Z_i - U_{ci}$ .

Совместная плотность вероятности истинного и измеренного параметров определяется выражением

$$p(Z_i, U_{ci}) = f(U_{ci}) f_Y(Z_i - U_{ci}), \quad (5)$$

где  $f(U_{ci})$  – априорная плотность вероятности параметра  $U_{ci}$ .

Совместная плотность вероятности (5) позволяет определить ошибки первого и второго рода, характеризующие достоверность измерительного контроля многопараметрического объекта.

Средние вероятности ошибок первого и второго рода [4, 6] при контроле  $i$ -того параметра определяются с учётом (5) выражениями:

$$\alpha_i = \int_{a_i}^{b_i} f(U_{ci}) \left[ \int_{-\infty}^{a_i} f_Y(Z_i - U_{ci}) dZ_i + \int_{b_i}^{\infty} f_Y(Z_i - U_{ci}) dZ_i \right] dU_{ci}, \quad (6)$$

$$\beta_i = \int_{-\infty}^{a_i} f(U_{ci}) \left[ \int_{a_i}^{b_i} f_Y(Z_i - U_{ci}) dZ_i \right] dU_{ci} + \int_{b_i}^{\infty} f(U_{ci}) \left[ \int_{a_i}^{b_i} f_Y(Z_i - U_{ci}) dZ_i \right] dU_{ci}. \quad (7)$$

Здесь  $[a_i, b_i]$  – допуск на  $i$ -тый параметр.

Используя правило сложения для совместимых и взаимно независимых событий [9], получим с учётом (6) и (7) следующие выражения для вероятностей ошибок первого и второго рода для  $k$  из  $n$  контролируемых параметров:

$$\alpha(k) = 1 - \prod_{i=1}^k [1 - \alpha_i], \quad (8)$$

$$\beta(k) = 1 - \prod_{i=1}^k [1 - \beta_i]. \quad (9)$$

При этом вероятность брака для  $n-k$  неконтролируемых параметров равна:

$$P_{\bar{o}}(n-k) = 1 - \prod_{n-k}^n [1 - P_{\bar{o}i}]. \quad (10)$$

Здесь

$$P_{\bar{o}i} = \int_{-\infty}^{a_i} f(U_{ci}) dU_{ci} + \int_{b_i}^{\infty} f(U_{ci}) dU_{ci}. \quad (11)$$

Заметим, что риск заказчика включает вероятность  $\beta_i$ , вычисленную по формуле (9) и вероятность брака (10) по  $n - k$  неконтролируемым параметрам.

Из изложенного следует, что для оценки достоверности многопараметрического измерительного контроля при использовании обобщённой модели измерений (1), (2) необходимо определить плотность вероятности  $f(Y_i)$  суммарной погрешности (3). Это позволяет получить условную плотность вероятности (4) и при заданной априорной плотности вероятности измеряемого параметра  $f(U_{ci})$  определить совместную плотность вероятности (5), которая используется для расчёта средних ошибок первого и второго рода по формулам (6) – (9).

Рассмотрим примеры аппроксимации распределений вероятностей суммарной аддитивной погрешности (3), полезные для практических расчётов.

**Пример 1.** Для фиксированных случайных значений параметра  $U_{ci}$  и систематической погрешности  $\Delta_{si}$  плотность вероятности суммы (3) в соответствии с правилом свёртки распределений независимых случайных величин [9] определяется выражением:

$$f(Y_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|U_{ci}|} f_{\xi} \left( \frac{u}{U_{ci}} \right) f_{yi}(Y_i - \Delta_{si} - u) du. \quad (12)$$

Для гауссовых распределений  $f(\xi_i)$  и  $f(y_i)$  с нулевыми средними и дисперсиями  $\sigma_{\xi}^2$  и  $\sigma_y^2$  плотность вероятности  $f(Y_i)$  (12) будет также гауссовой с математическим ожиданием  $\mu = U_{ci} + \Delta_{si}$  и дисперсией

$$\sigma_{Yi}^2 = U_{ci}^2 \sigma_{\xi i}^2 + \sigma_{yi}^2. \quad (13)$$

Тогда условная плотность вероятности (4) примет вид

$$p(Z_i/U_{ci}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{Zi}^2} \exp \left[ -\frac{(Z - U_{ci} - \Delta_{si})^2}{2\sigma_{Yi}^2} \right]. \quad (14)$$

**Пример 2.** Рассмотрим случай, когда распределения независимых погрешностей в (3)  $f(\xi_i)$  и  $f(y_i)$  нормальные, а плотность вероятности неисключённой систематической погрешности  $\Delta_{si}$  – равномерная в интервале  $[c, d]$ . Тогда с учётом (12) и (13) получим

$$f(Y_i) = \frac{1}{d-c} \left[ F\left(\frac{d-Y_i}{\sigma_{Y_i}}\right) - F\left(\frac{c-Y_i}{\sigma_{Y_i}}\right) \right], \quad (15)$$

где  $F(z)$  – функция Лапласа [9].

Из выражений (4) и (15) получим условную плотность вероятности:

$$p(Z_i/U_{ci}) = \frac{1}{d-c} \left[ F\left(\frac{d-Z_i+U_{ci}}{\sigma_{Y_i}}\right) - F\left(\frac{c-Z_i+U_{ci}}{\sigma_{Y_i}}\right) \right]. \quad (16)$$

Полученные в приведённых выше примерах 1, 2 выражения (14) и (16) для условных распределений позволяют рассчитать ошибки первого и второго рода (6) и (7) и определить достоверность многопараметрического измерительного контроля (8) и (9) с учётом широко применяемых законов распределения составляющих суммарной погрешности (3).

Представляет интерес сравнение результатов расчёта ошибок первого и второго рода с использованием рассмотренного выше математического метода с результатами имитационного моделирования, приведёнными в [8] для простейшего случая, когда все параметры одинаковы, а распределение аддитивной погрешности (3) равномерное в интервале  $\left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right]$ .

При нормальном распределении параметров  $U_{ci}$  в соответствии с (6) и (7) вероятности ошибок первого и второго рода определяются выражениями:

$$\alpha_i = pnorm(b_i, \mu_i, \sigma_{ci}) - pnorm\left(b - \frac{\Delta}{2}, \mu_i, \sigma_{ci}\right), \quad (17)$$

$$\beta_i = pnorm\left(b_i + \frac{\Delta}{2}, \mu_i, \sigma_{ci}\right) - pnorm(b_i, \mu_i, \sigma_{ci}), \quad (18)$$

где  $pnorm(x, \mu, \sigma)$  – интегральная функция распределения вероятностей в обозначениях программы Mathcad.

**Пример 3.** Для сравнения с результатами [8], используя выражения (8) и (9) с учётом (17), (18), рассчитаем вероятности ошибок первого и второго рода  $\alpha(k)$  и  $\beta(k)$  для  $n$ -параметрического объекта контроля при числе  $k$  измеряемых параметров.

Возьмём исходные данные из [8]:

- число контролируемых параметров  $k = 15, 30$ ;
- все параметры одинаковы, допуск на  $i$ -тый измеряемый параметр  $[a_i, b_i]$  равен  $[-3, 3]$ ;
- среднеквадратические значения (СКЗ) сигнала  $\sigma_{ci} = 0.8; 0.9; 1.0$ ;
- СКЗ  $\sigma_{Y_i} = 0; 0.1; 0.2; 0.3$ .

Распределение измеряемого параметра – нормальное с нулевым средним и СКЗ, равным  $\sigma_{ci}$ , распределение погрешности измерения – равномерное в интервале  $\pm \frac{\Delta}{2}$ . В расчётах используется известное [9] соотношение  $\sigma = \frac{\Delta}{\sqrt{12}}$ .

В табл. 1 представлены значения рисков заказчика  $R_s$  и поставщика  $R_n$ , полученные в работе [8] методом имитационного моделирования для тридцати и пятнадцати контролируемых параметров.

Таблица 1. Результаты моделирования, полученные в [8]

| $V_k$ (объём выборки), % | Риски     | СКЗ $\sigma_{ci}$ | СКЗ погрешности измерений $\sigma_y$ |             |             |             |
|--------------------------|-----------|-------------------|--------------------------------------|-------------|-------------|-------------|
|                          |           |                   | 0                                    | 0.1         | 0.2         | 0.3         |
| 100<br>( $k = 30$ )      | $R_z, \%$ | 0.8               | 0                                    | 0.09        | 0.14        | 0.17        |
|                          |           | 0.9               | 0                                    | 0.37        | 0.60        | 0.76        |
|                          |           | 1                 | 0                                    | 0.98        | 1.66        | 2.11        |
|                          | $R_n, \%$ | 0.8               | 0                                    | 0.15        | 0.41        | 0.85        |
|                          |           | 0.9               | 0                                    | 0.56        | 1.36        | 2.60        |
|                          |           | 1                 | 0                                    | 1.26        | 2.98        | 5.38        |
| 50<br>( $k = 15$ )       | $R_z, \%$ | 0.8               | <b>0.25</b>                          | <b>0.3</b>  | <b>0.34</b> | <b>0.35</b> |
|                          |           | 0.9               | <b>1.27</b>                          | <b>1.49</b> | <b>1.58</b> | <b>1.67</b> |
|                          |           | 1                 | <b>4.05</b>                          | <b>4.54</b> | <b>4.86</b> | <b>5.15</b> |
|                          | $R_n, \%$ | 0.8               | 0                                    | 0.08        | 0.20        | 0.43        |
|                          |           | 0.9               | 0                                    | 0.27        | 0.68        | 1.29        |
|                          |           | 1                 | 0                                    | 0.62        | 1.52        | 2.70        |

Таблица 2. Результаты расчёта по формулам (8) и (9)

| Число контролируемых параметров | Риски                 | СКЗ $\sigma_{ci}$ | СКЗ погрешности измерений $\sigma_{yi}$ |              |              |             |
|---------------------------------|-----------------------|-------------------|-----------------------------------------|--------------|--------------|-------------|
|                                 |                       |                   | 0                                       | 0.1          | 0.2          | 0.3         |
| $(k = 30)$                      | $R_z = \beta(k), \%$  | 0.8               | 0                                       | 0.088        | 0.142        | 0.174       |
|                                 |                       | 0.9               | 0                                       | 0.357        | 0.603        | 0.757       |
|                                 |                       | 1                 | 0                                       | 0.955        | 1.647        | 2.143       |
|                                 | $R_n = \alpha(k), \%$ | 0.8               | 0                                       | 0.152        | 0.41         | 0.879       |
|                                 |                       | 0.9               | 0                                       | 0.556        | 1.383        | 2.703       |
|                                 |                       | 1                 | 0                                       | 1.371        | 3.228        | 5.873       |
| $(k = 15)$                      | $R_z = \beta(k), \%$  | 0.8               | <b>0.25</b>                             | <b>0.294</b> | <b>0.321</b> | <b>0.34</b> |
|                                 |                       | 0.9               | <b>1.27</b>                             | <b>1.5</b>   | <b>1.57</b>  | <b>1.65</b> |
|                                 |                       | 1                 | <b>4.05</b>                             | <b>4.53</b>  | <b>4.88</b>  | <b>5.13</b> |
|                                 | $R_n = \alpha(k), \%$ | 0.8               | 0                                       | 0.076        | 0.205        | 0.44        |
|                                 |                       | 0.9               | 0                                       | 0.278        | 0.694        | 1.361       |
|                                 |                       | 1                 | 0                                       | 0.688        | 1.627        | 2.981       |

В табл. 2 представлены расчёты ошибок первого и второго рода  $\alpha(k)$  и  $\beta(k)$ , т.е. рисков поставщика  $R_n$  и заказчика  $R_z$  соответственно, рассчитанные по формулам (8) и (9) с учётом (17) и (18). Сравнение данных таблиц 1 и 2 показывает достаточно точное совпадение результатов моделирования [5] и приведённых нами расчётов. В таблицах 1, 2 выделенные данные при  $k = 15$  учитывают вероятность брака по пятнадцати неконтролируемым параметрам.

Данный пример показывает, что основным недостатком имитационного моделирования является необходимость повтора эксперимента при любых изменениях условий задачи, например, законов распределения измеряемых параметров и погрешностей, допусков на параметры и т.д. Использование этого метода в инженерной практике, тем более в случае обобщённой измерительной модели (1), представляется менее эффективным по сравнению с математическими методами расчёта.

### 3. Выводы

1. Получены выражения (6) – (9) для ошибок первого и второго рода, позволяющие оценить достоверность многопараметрического измерительного контроля с использованием выражений (14) и (16) для условных (апостериорных) распределений параметра для случая обобщённой измерительной модели (1).
2. Показано достаточно точное совпадение (пример 3) математических расчётов рисков поставщика и заказчика, проведённых по формулам (17), (18), (8) и (9), с результатами имитационного моделирования, приведёнными в [8]. При этом подтверждается очевидное преимущество практического применения математических методов расчёта по сравнению с методами имитационного моделирования, не позволяющих оперативно учитывать изменения в условиях задачи.
3. Полученные в данной статье результаты могут быть использованы при разработке метрологического обеспечения продукции (услуги) и проведении метрологической экспертизы технической документации, а также при аттестации методов измерения.

### Литература

1. РМГ 63-2003. ГСИ. Обеспечение эффективности измерений при управлении технологическими процессами. Метрологическая экспертиза технической документации.
2. ГОСТ Р 8.563 -96. ГСИ. Методики выполнения измерений.
3. Философия качества по Тагути – Сер. «Всё о качестве. Зарубежный опыт». 1997. – М.: НТК «Трек», 1997, вып. 6. – 17 с.
4. Кудрицкий В.Д., Синица М.А., Чинаев В.И. Автоматизация контроля РЭА. – М.: Сов. радио, 1977. – 256 с.
5. Серых В.И., Шухно В.И. Информационный метод оценки состояния технологических процессов производства радиоэлектронной аппаратуры // Актуальные проблемы электронного приборостроения: Тр. Междунар. Научно-технической конф. – Новосибирск, 2000. – Т. 6. – С.127 – 130.
6. Серых В.И., Гребцова Л.В., Чернышевская Е.И. Качество и эффективность метрологического обеспечения объектов и услуг связи // Инфосфера. – 2009. - № 44. – С. 66 – 69.
7. Данилевич С.Б., Княжевский В.В., Колесников С.С. Нужен ли выходной контроль серийно выпускаемой продукции // Методы менеджмента качества. – 2006. - № 7. – С. 40 – 43.
8. Данилевич С.Б. Планирование оптимальных методик выходного контроля // Методы оценки соответствия. – 2009. - № 4. – С. 40 – 42.
9. Левин Б.Р. Теоретические основы статической радиотехники. - М.: Сов. радио, 1965. – Кн. I. – 752 с.
10. Галлагер Р. Теория информации и надёжная связь. – М.: Сов. радио, 1974. – 720 с.

*Статья поступила в редакцию 23.03.2010*

**Серых Владимир Ильич**

к.т.н., доцент НГТУ, тел. 226-77-25

**Гребцова Лариса Васильевна**

ст. пр. СибГУТИ, тел. 269-82-12, e-mail: smk@sibsutis.ru

**Reliability of multi-parameter measurement control**

The article describes a mathematical method of calculating the probabilities of errors of the first and second type, determining the reliability of measuring control of multi-parameter objects using a generalized model of measurement. The agreement is shown between the theoretical calculations with experimental results carried out by simulation modeling.

*Keywords:* multi-parameter measurement control, reliability.