

Анализ эффективности функционирования распределённых вычислительных систем в режиме решения задач потока с отказами^{*)}

В.А. Павский, К.В. Павский

В работе предлагается математическая модель для расчёта показателей осуществимости решения задач потока с отказами на распределённых вычислительных системах (ВС). Изучен переходный режим функционирования ВС; выведены аналитические формулы для показателей осуществимости решения задач.

Ключевые слова: распределённые вычислительные системы, осуществимость решения задач потока, пакет задач.

1. Введение

При анализе эффективности функционирования вычислительных систем (ВС), как сосредоточенных, так и распределённых, используются показатели осуществимости решения задач [1, 2]. В зависимости от сложности задач и характера их поступления выделяют следующие режимы работы ВС: решение сложной задачи, обслуживание потока задач, обработка задач набора.

В работе описывается математическая модель и производится расчёт показателей осуществимости решения задач потока.

2. Расчёт показателей осуществимости параллельного решения задач потока на распределённых ВС

Пусть на вычислительную систему [2] с интенсивностью α поступает пуассоновский поток задач (представленных последовательными программами), из которых формируется пакет. Количество задач в пакете ограничивается числом n элементарных машин ВС, выделяемых для решения поступающих задач. Если пакет сформирован, то очередная задача получает отказ на включение в пакет. Как только ВС заканчивает решение всех задач текущего пакета, она приступает к обслуживанию очередного пакета (пусть даже и не до конца сформированного) и начинается формирование следующего пакета. Время решения каждой задачи в системе является случайной величиной, распределённой по экспоненциальному закону с интенсивностью решения β . Требуется проанализировать эффективность работы вычислительной системы.

Обозначим через $P_k(t)$ вероятность того, что в момент времени $t \in [0, \infty)$ пакет состоит из k нерешённых задач, причём $P_0(0) = 1$ (т.е. в начальный момент времени пакет был пус-

^{*)} Работа выполнена в рамках междисциплинарного проекта № 113 СО РАН и при поддержке РФФИ (гранты № 08 07 00018, 09 07 00095, 08 07 00022) и Совета по грантам Президента РФ (ведущая научная школа НШ 5176.2010.9).

тым); $k \in E_0^n = \{0, 1, \dots, n\}$. Используя методы теории массового обслуживания [3 – 5], получаем систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} P_0(t) &= -\alpha P_0(t) + \beta \sum_{k=1}^n P_k(t), \\ \frac{d}{dt} P_k(t) &= -(\alpha + \beta) P_k(t) + \alpha P_{k-1}(t), \quad k \in E_1^{n-1}, \\ \frac{d}{dt} P_n(t) &= -\beta P_n(t) + \alpha P_{n-1}(t), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$P_0(0) = 1, \quad P_k(0) = 0. \quad (2)$$

Условие нормировки, являющееся следствием системы уравнений (1), имеет вид:

$$\sum_{k=0}^n P_k(t) = 1, \quad \forall t \in [0, \infty), \quad (3)$$

Преобразуем первое уравнение системы (1) с учётом условия (3):

$$\frac{d}{dt} P_0(t) = -(\alpha + \beta) P_0(t) + \beta.$$

Решение полученного уравнения при начальных условиях (2) записывается в виде

$$P_0(t) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha}{\alpha + \beta} e^{-(\alpha + \beta)t}.$$

Аналогично, при $k = 1$, получаем

$$P_1(t) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} + \frac{\alpha^2 t}{(\alpha + \beta)} e^{-(\alpha + \beta)t} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} e^{-(\alpha + \beta)t}.$$

Для применения метода математической индукции решим уравнение (1) при $k = 2$,

$$P_2(t) = \frac{\alpha^2 \beta}{(\alpha + \beta)^3} - \frac{\alpha^2 \beta}{(\alpha + \beta)^3} e^{-(\alpha + \beta)t} - \frac{\alpha^2 \beta t}{(\alpha + \beta)^2} e^{-(\alpha + \beta)t} + \frac{\alpha^3 t^2}{2!(\alpha + \beta)} e^{-(\alpha + \beta)t}.$$

Предположим, что для некоторого $k < n - 1$ справедлива формула

$$P_k(t) = \frac{\alpha^k \beta}{(\alpha + \beta)^{k+1}} - \frac{\alpha^k \beta}{(\alpha + \beta)^{k+1}} e^{-(\alpha + \beta)t} + e^{-(\alpha + \beta)t} \left(\frac{\alpha^{k+1} t^k}{k!(\alpha + \beta)} - \alpha^k \beta \sum_{r=1}^{k-1} \frac{t^r}{r!(\alpha + \beta)^{k-r+1}} \right). \quad (4)$$

Докажем справедливость (4) для $k + 1$; имеем

$$\begin{aligned} P_{k+1}(t) &= e^{-(\alpha + \beta)t} \left(C + \alpha \int e^{(\alpha + \beta)t} \left(\frac{\alpha^k \beta}{(\alpha + \beta)^{k+1}} - e^{-(\alpha + \beta)t} \left(\frac{\alpha^k \beta}{(\alpha + \beta)^{k+1}} - \frac{\alpha^{k+1} t^k}{k!(\alpha + \beta)} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \alpha^k \beta \sum_{r=1}^{k-1} \frac{t^r}{r!(\alpha + \beta)^{k-r+1}} \right) dt \right) \right). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и интегрируя последнее выражение, получаем

$$\begin{aligned} P_{k+1}(t) &= e^{-(\alpha + \beta)t} \left(C + \frac{\alpha^{k+1} \beta}{(\alpha + \beta)^{k+2}} e^{(\alpha + \beta)t} - \frac{\alpha^{k+1} \beta t}{(\alpha + \beta)^{k+1}} + \frac{\alpha^{k+2} t^{k+1}}{(k+1)!(\alpha + \beta)} - \right. \\ &\quad \left. - \alpha^{k+1} \beta \sum_{r=1}^{k-1} \frac{t^{r+1}}{(r+1)!(\alpha + \beta)^{k-r+2}} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Полагая $t = 0$, находим $C = -\frac{\alpha^{k+1} \beta}{(\alpha + \beta)^{k+2}}$.

Подставляя найденное значение константы интегрирования C в равенство (5), определяющее вероятность $P_{k+1}(t)$, получаем

$$P_{k+1}(t) = e^{-(\alpha+\beta)t} \left(-\frac{\alpha^{k+1}\beta}{(\alpha+\beta)^{k+2}} + \frac{\alpha^{k+1}\beta}{(\alpha+\beta)^{k+2}} e^{(\alpha+\beta)t} - \frac{\alpha^{k+1}\beta t}{(\alpha+\beta)^{k+1}} + \frac{\alpha^{k+2}t^{k+1}}{(k+1)!(\alpha+\beta)} - \alpha^{k+1}\beta \sum_{r=1}^{k-1} \frac{t^{r+1}}{(r+1)!(\alpha+\beta)^{k-r+2}} \right),$$

или

$$P_{k+1}(t) = \frac{\alpha^{k+1}\beta}{(\alpha+\beta)^{k+2}} - \frac{\alpha^{k+1}\beta}{(\alpha+\beta)^{k+2}} e^{-(\alpha+\beta)t} + e^{-(\alpha+\beta)t} \left(\frac{\alpha^{k+2}t^{k+1}}{(k+1)!(\alpha+\beta)} - \alpha^{k+1}\beta \sum_{r=1}^k \frac{t^r}{r!(\alpha+\beta)^{(k+1)-r+1}} \right).$$

Таким образом, формула (4) доказана.

Из (1) легко заметить, что

$$P_n(t) = e^{-\beta t} \left(C + \alpha \int e^{\beta t} P_{n-1}(t) dt \right). \quad (6)$$

Подставляя $P_{n-1}(t)$ (формулу (4) при $k = n-1$) в (6), получаем

$$P_n(t) = e^{-\beta t} \left(C + \alpha \int e^{\beta t} \left(\frac{\alpha^{n-1}\beta}{(\alpha+\beta)^n} - e^{-(\alpha+\beta)t} \frac{\alpha^{n-1}\beta}{(\alpha+\beta)^n} + e^{-(\alpha+\beta)t} \left(\frac{\alpha^n t^{n-1}}{(n-1)!(\alpha+\beta)} - \alpha^{n-1}\beta \sum_{r=1}^{n-2} \frac{t^r}{r!(\alpha+\beta)^{n-r}} \right) dt \right) \right).$$

Представим правую часть последнего равенства в виде суммы интегралов

$$P_n(t) = e^{-\beta t} \left(C + \frac{\alpha^n}{(\alpha+\beta)^n} e^{\beta t} + \frac{\alpha^{n-1}\beta}{(\alpha+\beta)^n} e^{-\alpha t} + \frac{\alpha^{n+1}}{(n-1)!(\alpha+\beta)} \int t^{n-1} e^{-\alpha t} dt - \alpha^n \beta \sum_{r=1}^{n-2} \frac{1}{r!(\alpha+\beta)^{n-r}} \int t^r e^{-\alpha t} dt \right).$$

Далее замечаем, что

$$P_n(t) = e^{-\beta t} \left(C + \frac{\alpha^n}{(\alpha+\beta)^n} e^{\beta t} + \frac{\alpha^{n-1}\beta}{(\alpha+\beta)^n} e^{-\alpha t} - \frac{\alpha^n}{(n-1)!(\alpha+\beta)} e^{-\alpha t} \left(t^{n-1} + (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{n-k-1}}{\alpha^k (n-k-1)!} \right) + \alpha^{n-1}\beta \sum_{r=1}^{n-2} \frac{1}{r!(\alpha+\beta)^{n-r}} e^{-\alpha t} \left(t^r + r! \sum_{k=1}^r \frac{t^{r-k}}{\alpha^k (r-k)!} \right) \right). \quad (7)$$

Найдём значение произвольной постоянной в (7). При $t = 0$ имеем:

$$0 = C + \frac{\alpha^n}{(\alpha+\beta)^n} + \frac{\alpha^{n-1}\beta}{(\alpha+\beta)^n} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha^{n-1}\beta}{(\alpha+\beta)^n} \sum_{r=1}^{n-2} \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha} \right)^r.$$

Члены, стоящие под знаком суммы, образуют геометрическую прогрессию. Следовательно,

$$\sum_{r=1}^{n-2} \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha} \right)^r = \frac{(\alpha+\beta)^{n-1}}{\beta \alpha^{n-2}} - \frac{\alpha+\beta}{\beta},$$

и находим, что $C = 0$.

Окончательно получаем, что

$$P_n(t) = \frac{\alpha^n}{(\alpha + \beta)^n} + \frac{\alpha^{n-1}\beta}{(\alpha + \beta)^n} e^{-(\alpha + \beta)t} - \frac{\alpha^n}{(n-1)!(\alpha + \beta)} e^{-(\alpha + \beta)t} \left(t^{n-1} + (n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^{n-k-1}}{\alpha^k (n-k-1)!} \right) +$$

$$+ \alpha^{n-1} \beta e^{-(\alpha + \beta)t} \sum_{r=1}^{n-2} \frac{t^r}{r!(\alpha + \beta)^{n-r}} + \alpha^{n-1} \beta e^{-(\alpha + \beta)t} \sum_{r=1}^{n-2} \sum_{k=1}^r \frac{t^{r-k}}{\alpha^k (\alpha + \beta)^{n-r} (r-k)!}.$$

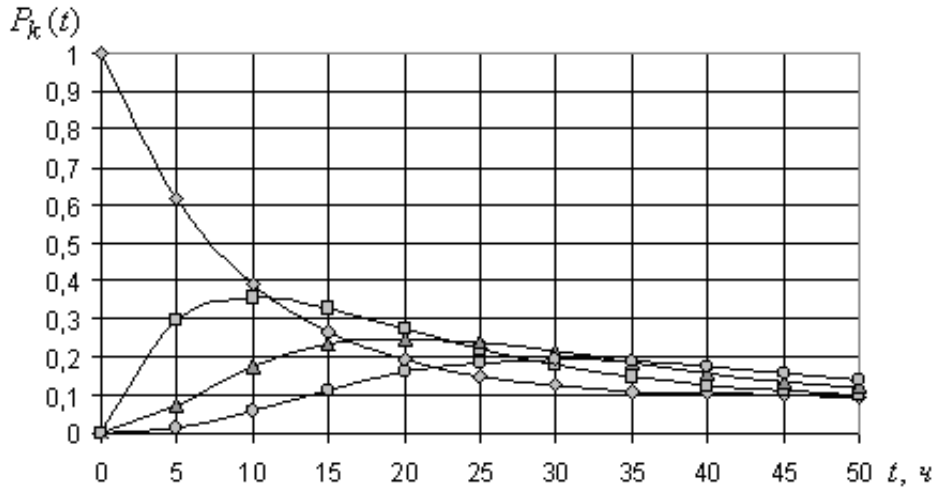


Рис. 1 Зависимость вероятностей $P_k(t)$, $k = 0, 1, 2, 3$ от времени:

при $\alpha = 0,1$ 1/ч., $\beta = 0,01$ 1/ч.

—◇— $P_0(t)$, —□— $P_1(t)$, —▲— $P_2(t)$, —○— $P_3(t)$

Иллюстрация к характеру изменения значений вероятностей $P_k(t)$ от времени t представлена на рис. 1. Видно, что стационарный режим функционирования ВС при решении задач наступает через достаточно длительный промежуток времени, $t > 45$ ч. Следовательно, для вычислительных систем, функционирующих в реальных условиях, пренебрежение зависимостью показателей эффективности от времени недопустимо.

Система (1) относится к типу М/М/1/∞ [4], следовательно, всегда эргодична и стационарный режим ($\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t) = P_k > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} P_k'(t) = 0$) всегда существует, так что

$$P_0 = \frac{\beta}{\alpha + \beta}, P_k = \frac{\alpha^k \beta}{(\alpha + \beta)^{k+1}}, k \in E_1^{n-1}, P_n = \frac{\alpha^n}{(\alpha + \beta)^n}.$$

3. Экспресс-анализ функционирования ВС

Как следует из (3), вероятности $P_k(t)$, $k \in E_0^n$, составляют ряд распределения и, следовательно, представляют базис, через который выражаются показатели, характеризующие эффективность процесса решения (осуществимость решения [2]) задач на ВС в момент времени t , $t \in [0, \infty)$. Ясно, что при экспресс-анализе эффективности функционирования ВС полезными будут:

- 1) вероятность того, что пакет не пуст

$$P_{\geq 1} = 1 - P_0;$$

- 2) вероятность отказа в обслуживании задачи

$$P_{отк} = P_n;$$

- 3) средний объём пакета

$$n = \left[\frac{\ln P_{отк}}{\ln \alpha - \ln(\alpha + \beta)} \right],$$

где $[x]$ - целая часть числа x ;

4) среднее число задач в пакете

$$M = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} \sum_{k=1}^{n-1} k \frac{\alpha^{k-1}}{(\alpha + \beta)^{k-1}} + n \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^n;$$

5) дисперсия числа задач в пакете

$$D = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^{k-1} + n^2 \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^n - M^2.$$

4. Заключение

Построенная модель функционирования ВС в режиме обработки задач пакета позволила получить:

- аналитические выражения для вероятности того, что в определённый момент времени пакет состоит из k нерешённых задач;
- оценки для среднего размера пакета;
- формулы для расчёта математического ожидания и дисперсии числа задач в пакете.

Полученные расчётные формулы приемлемы в инженерной практике.

Литература

1. Евреинов Э. В., Хорошевский В. Г. Однородные вычислительные системы. – Новосибирск: Наука, 1978. – 319 с.
2. Хорошевский В. Г. Архитектура вычислительных систем. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 520 с.
3. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. – М.: Мир, 1979г. – 600 с.
4. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1979г. – 432 с.
5. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и её приложения. – М.: Советское радио, 1965. – 511 с.

Статья поступила в редакцию 03.06.2010

Павский Валерий Алексеевич

Профессор, д.т.н., заведующий Кафедрой высшей математики Кемеровского технологического института пищевой промышленности. Область научных исследований – методы анализа надёжности, живучести и технико-экономической эффективности функционирования большемасштабных вычислительных систем, осуществимость параллельного решения задач.

Тел. (3842) 73-42-00; e-mail: pavvm@kemtipp.ru.

Павский Кирилл Валерьевич

Кандидат технических наук, научный сотрудник Лаборатории вычислительных систем Института физики полупроводников им. А.В. Ржанова СО РАН. Область научных исследований – методы анализа надёжности, живучести и технико-экономической эффективности функционирования большемасштабных ВС, осуществимость параллельного решения задач.

Тел.&факс: (383) 333-21-71; e-mail: pkv@isp.nsc.ru.

Analysis of efficiency of functioning distributed computer systems in a mode of solving tasks of stream with refusals.

Valery A. Pavsky, Kirill V. Pavsky

In work the mathematical model for calculation of indices of realizability of solving tasks of stream with refusals on the distributed computing systems (CS) is offered. Researching a transitive mode of functioning CS; analytical formulas for calculating indices of realizability of solving tasks are derived.

Keywords: distributed computing systems, realizability of solving tasks of stream, packet of tasks.