МЕТОД ВЕТВЛЕНИЯ В ВЫЧИСЛЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИК СВЯЗНОСТИ СЕТЕЙ

А. С. Родионов, О. К. Родионова

1. Введение

В результате природных или антропогенных катастроф или в ходе атак на информационные сети, а также по их завершению, как результат атаки возможно нарушение отдельных связей и узлов сети, приводящее к изменению характеристик связности. Оценка этих характеристик имеет важное значение для оценки возможного ущерба от разрушающих воздействий различного рода. Существует много характеристик связности и производительности сетей. Мы рассмотрим такие важные характеристики, как вероятность связности (далее – надёжность) и математическое ожидание числа пар несвязанных вершин (МОНП). Первая задача относится к классическим, вторая является малоисследованной. Данная работа является обобщением и развитием работ [1-6].

В качестве модели рассматривается случайный граф. Возможно рассмотрение различных вариантов: надёжные вершины и ненадёжные рёбра, надёжные рёбра и ненадёжные вершины, ненадёжные вершины и рёбра, рассмотрение тотальной связности (каждая из оставшихся вершин связана с каждой) и связности заданного подмножества «целевых» вершин и т.д. Исследования в данной области проводились многими авторами [7-14], однако все они, за исключением А. Шумана (A. Shooman) констатировали невозможность применения точных методов расчёта вероятности связности в силу экспоненциальной сложности задачи. Однако мощности современных ЭВМ, совместно с некоторыми алгоритмическими приёмами, позволяют применять точные методы расчёта для сетей с относительно небольшой, но практически интересной размерностью (до сотен элементов). В этой работе мы ограничимся рассмотрением графов с абсолютно надёжными вершинами и ненадёжными рёбрами. Дальнейшее изложение организовано следующим образом: во втором параграфе изложены основы метода ветвления и способ его ускорения за счёт использования

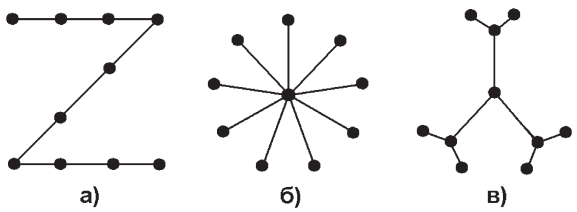

Рис. 1. Примеры различных 10-вершинных деревьев

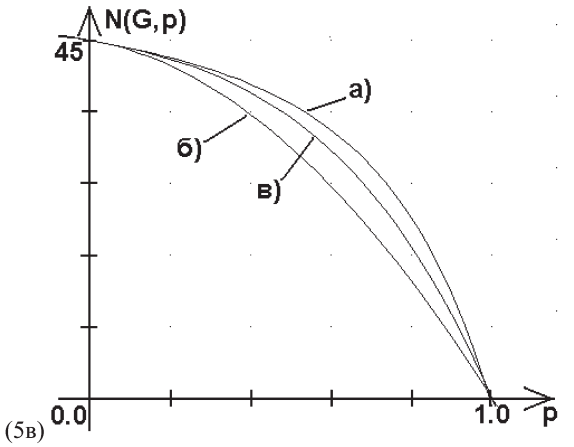

Рис. 2. МОНП-полиномы связности для деревьев на рис.1

простых цепей, в третьем параграфе приведены приёмы редукции размерности графа и его декомпозиции, в четвёртом – некоторые вопросы программной реализации метода. В последнем, пятом, параграфе приводятся результаты сравнительных экспериментов и предлагаются направления дальнейших работ.

Принятые обозначения:

G(n,m) – неориентированный граф с n вершинами и m рёбрами;

$X=\{v_1,...,v_n\}$ – множество вершин;

$E=\{e_{ij}=(v_i, v_j)\}$ – множество рёбер;

$p_{ij}=P$ (ребро e_{ij} присутствует);

w_i – вес вершины v_i, $WT(G)=(w_1,w_2,...,w_n)$;

W(G) – суммарный вес вершин графа G;

R(G) – вероятность связности (надёжность) графа G;

R(G) – МОНП графа G.

2. Матожидание числа несвязных пар вершин как показатель связности случайного графа

Рассмотрение МОНП в качестве показателя связности случайного графа вызвано тем, что этот показатель в ряде случаев более информативен по сравнению с вероятностью связности. Покажем это на примере сети древовидной структуры. Для связности такой сети необходимо, чтобы все рёбра были работоспособны. В случае равнонадёжных рёбер имеем $R(T)=p^{n-1}$, где n – число вершин дерева. Тем самым деревья неразличимы по этому показателю. Теперь рассмотрим МОНП. Очевидно, что

$$N(T)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(1-\prod_{s\in Pth_{ij}} p_s\right),$$

где Pth_{ij} – множество номеров рёбер, входящих в (единственный) путь между вершинами v_i и v_j . Тогда, в случае равнонадёжных рёбер, для графов на рис. 1 имеем

$$N(Ga,p) = 45 - 9p - 8p^2 - 7p^3 - 6p^4 - 5p^5 - 4p^6 - 3p^7 - 2p^8 - p^9;$$

$$N(Gб,p)=45 - 9p - 36p^2;$$

$$N(Gв,p)=45\ 9p - 12p^2 - 12p^3 - 12p^4.$$

Как видим, полиномы надёжности для различных деревьев с одинаковым количеством вершин разнятся. При подстановке p=0.5 имеем значения 36.994, 31.5 и 35.25, соответственно. Графики полиномов представлены на рис. 2.

3. Метод ветвления

Метод ветвления при вычислении функции μ случайного графа G основан на применении формулы полной вероятности при рассмотрении двух альтернативных гипотез: существования либо отсутствия произвольного ребра e_{ij}:

$$\mu(G) = p_{ij}\mu(G^*_{ij}) + (1 - p_{ij})\mu(G \setminus e_{ij}),$$

где G^*_{ij} – граф, в котором ребро e_{ij} имеет вероятность присутствия 1, а $G\setminus e_{ij}$ – граф, получаемый из G удалением ребра e_{ij}.

Уже в таком виде метод ветвления в некоторых случаях позволяет существенно сократить перебор за счёт следующих возможностей:

1. достигнут граф малой размерности или граф специального вида (дерево, цикл и др.), для которого значение показателя можно рассчитать непосредственно;
2. достигнут несвязный граф (рассмотрение вариантов дальнейшего удаления рёбер бессмыслено);
3. для некоторых графов возможна редукция размерности или декомпозиция;
4. в процессе ветвления могут получаться графы одинаковой структуры, расчёт которых иногда можно заменить расчётом одного графа.

При отсутствии ограничений в качестве G^*_{ij} можно использовать граф G, в котором вершины $\mathbf{v_i}$ **и** $\mathbf{v_j}$ **стянуты** по ребру e_{ij}. Покажем, почему

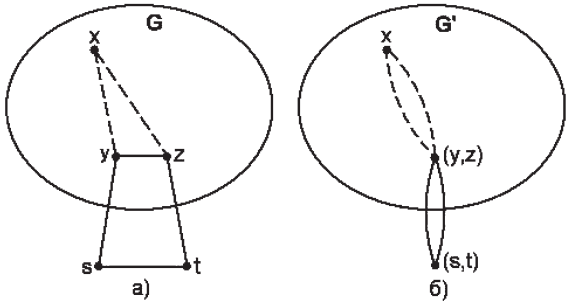

Рис 3. Иллюстрация недопустимости стягивания вершин при ограничении на допустимую длину минимального пути

это невозможно при некоторых ограничениях, например, при ограничении на диаметр графа, т. е. на максимальное число рёбер минимального пути, соединяющего вершины v_i и v_j (обозначим длину такого минимального пути как d_{ij}).

Пусть имеется граф G, показанный на рис.1а, и пусть граф с диаметром, превышающим некоторое значение D, считается несвязным. Предположим, что $d_{xs}=d_{xt}=D$. Тогда последовательное стягивание по рёбрам e_{yz} и e_{st} приведёт к графу G', изображённому на рис. 1б. В этом графе, очевидно, $d_{x(s,t)}=D$. Удаление одного из рёбер мультиребра $e_{x(s,t)}$ не изменит это расстояние и граф G' останется связным. Удаление же ребра e_{ys} или e_{yt} в G увеличит на одно ребро путь от v_x до v_t или v_s, соответственно. Тем самым граф G становится несвязным. Таким образом, стягивание вершин потенциально приводит к неверному результату. Очевидно, что необходимость отказа от стягивания при расчёте показателей связности в условиях ограничений привносит дополнительные трудности при программной реализации метода ветвления. В частности, особого рассмотрения требует выбор способа представления графа.

4. Снижение размерности задачи

Снижение размерности рассчитываемого графа и/или его декомпозиция при каждом удобном случае могут дать существенно ускорение расчётов. Соответствующие методы применительно к задаче расчёта вероятности связности рассмотрены, например, в [1,2,4,13,14]. Покажем, как можно снижать размерность задачи при расчёте МОНП.

Удаление висячих вершин

Сначала докажем следующую лемму (впервые доказательство приведено в [6]).

Лемма 1. Если во время процесса ветвления при расчёте графа G получены некоторые подграфы $G_1,...,G_k$ с вероятностями реализации $p_1,...,p_k$, такие, что они имеют одинаковую структуру и матрицу P и все кроме одной вершины имеют одинаковый вес, а вершина v_s имеет вес w_{si} в G_i, i=1,...,k, то совокупный вклад этих подграфов в N(G) равен $\sum_{i=1}^{k} p_i \cdot N(G^o)$, где граф G^o имеет те же структуру и матрицу P, как все G_i, и $WT_s(G^o) = \sum_{i=1}^{k} p_i w_{si}$.

Очевидно следующее равенство $N(G) = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} w_i w_j$, где a_{ij} – вероятность того, что вершины v_i и v_j несвязны в графе G. Это равенство возможно переписать как

$$N(G) = \sum_{i \neq s} a_{is} w_i w_s + \sum_{i=1, i\neq s}^{n-1} \sum_{j>i, j\neq s} w_i w_j = A w_s + B,$$

где коэффициенты A и B не зависят от веса вершины v_s и, тем самым, одинаковы для каждого из графов G_i. Тогда их совокупный вклад в N(G) равен

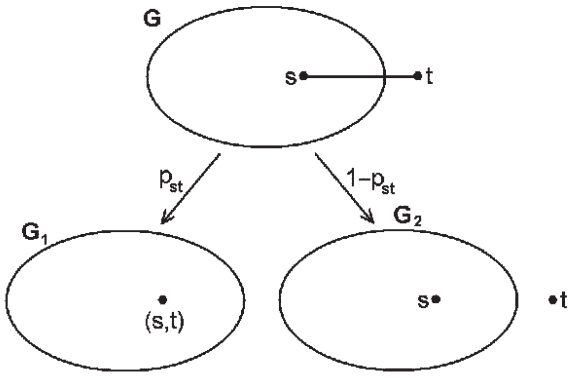

Рис. 4. Удаление висячей вершины при вычислении МОНП

$$Q=\sum_{i=1}^{k}p_iN(G_i)=\sum_{i=1}^{k}p_i(Aw_{si}+B)=A\sum_{i=1}^{k}p_iw_{si}+B\sum_{i=1}^{k}p_i,$$

откуда непосредственно следует доказательство леммы.

Перейдём к рассмотрению висячих вершин. Пусть некоторая висячая вершина v_t смежна вершине v_s. Выполнив ветвление по ребру e_{st}, получим (рис. 2):

$$N(G)=p_{st}N(G_1)+(1-p_{st})[N(G_2)+w_tW(G_2)],$$

при этом графы G_1 и G_2 имеют одинаковую структуру, а вершина v_s имеет веса w_s+w_t и w_s, соответственно. Раскрыв скобки и применив лемму 1 получаем

$$N(G)=N(G^o)+(1-p_{st})w_t[W(G)-w_t].$$

При этом граф имеет ту же структуру, что и графы G_1 и G_2, и вес вершины v_s, равный $w_s+(1-p_{st})w_t$.

Разбиение на блоки

Вновь обратимся к опыту вычисления вероятности связности. Известно, что если граф G состоит из двух блоков G_1 и G_2, соединённых посредством общей вершины v_x (точки сочленения), то $R(G)=R(G_1)\cdot R(G_1)$. При подсчёте же МОНП надо учитывать не только разрывы внутри блоков, но и отделение вершин одного блока от вершин другого. Таким образом,

$$N(G)=N(G_1)+N(G_2)+\sum_{i\in X(G_1)}\sum_{j\in X(G_2)}(a_{ix}+a_{jx}-a_{ix}a_{jx})w_iw_j.$$

Как видим, требуется определить вероятности существования двух путей в графах меньшей размерности. Эта задача, как известно, имеет квадратичную сложность.

Учёт моста

Если два блока G_1 и G_2, соединены единственным ребром (мостом) e_{st} с надёжностью p_{st}, то $R(G)=p\cdot R(G_1)\cdot R(G_1)$, тогда как для МОНП, используя (4) и (5), имеем

$$N(G)=N(G_1)+N(G_2)+$$
$$+p_{st}\sum_{i\in X(G_1)}\sum_{j\in X(G_2)}(a_{ix}+a_{jx}-a_{ix}a_{jx})w_iw_j+(1-p_{st})W(G_1)W(G_2).$$

Ветвление по цепи

Ветвление по цепи для вычисления вероятности связности случайного графа было предложено нами в [1,2]. Приведём здесь эквивалентную, более простую формулировку основной теоремы из этих работ, которая получается изменением порядка ветвления в доказательстве.

Теорема 1. Пусть граф G содержит простую цепь из k рёбер $e_1, e_2,...,e_k$ с вероятностями присутствия $p_1, p_2,...,p_k$ и соединяющую вершины v_s и v_t. Тогда вероятность связности графа G равна

$$R(G)=\left[\prod_i^k p_i+p_{st}\sum_{i=1}^{k}(1-p_i)\prod_{j\neq i}p_j\right]\cdot R[G^*(e_1,...,e_k)]+$$
$$+(1-p_{st})\sum_{i=1}^{k}(1-p_i)\prod_{j\neq i}p_jR(G\setminus\{e_1,...,e_k,e_{st}\}),$$

где $G^*(e_1,...,e_k)$ – граф, полученный из G стягиванием по разрешающей цепи, а $G\setminus(e_1,...,e_k, e_{st})$ – удалением этой цепи и (если есть) ребра e_{st}.

Соответствующая теорема для МОНП и особенно её доказательство в общем случае весьма громоздки. Поэтому рассмотрим здесь частный случай цепи из двух рёбер.

Теорема 2. Пусть в графе G имеется вершина v_x степени 2, инцидентная вешинам v_s и v_t степени более 2. МОНП графа G равно

$$N(G)=\left[p_{st}(1-p_{sx}p_{xt})N(G^*)\right]+$$
$$+(1-p_{st}-p_{sx}p_{xt})\left\{N(G^o)+a_{st}\frac{(1-p_{st})(1-p_{xt})p_{sx}p_{xt}}{(1-p_{sx}p_{xt})^2}w_x^2\right\}.$$

Здесь G^o – граф, получаемый из G удалением рёбер e_{sx}, e_{xt} и, если есть, e_{st}, а граф G^* – граф, получаемый стягиванием по цепи. При этом имеются следующие значения весов вершин:

$$WT_{sxt}(G^*)=w_s+w_s+w_x,$$
$$WT_s(G^\circ)=w_s+p_{sx}w_x(1-p_{xt})/(1-p_{sx}p_{xt}),$$
$$WT_t(G^\circ)=w_s+p_{xt}w_x/(1-p_{sx}p_{xt}).$$

Доказательство теоремы основано на последовательном ветвлении по рёбрам e_{st}, e_{sx} и e_{xt} и приведении подобных.

Появление коэффициента a_{st} связано с тем, что среди графов структуры G^o присутствуют графы с разным весом двух, а не одной вершины, как требуют условия леммы 1. Для рассмотрения этого случая МОНП представляется в следующем виде (используется подход, аналогичный доказательству леммы 1):

$$N(G)=Aw_s+Bw_t+Cw_sw_t+D.$$

Ключевым моментом при усреднении является замена математического ожидания произведения на произведение математических ожиданий с добавочным выравнивающим слагаемым:

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}p_iw_{si}w_{ti}}{\sum_{i=1}^{k}p_i}=\frac{\sum_{i=1}^{k}p_iw_{si}}{\sum_{i=1}^{k}p_i}\times\frac{\sum_{i=1}^{k}p_iw_{ti}}{\sum_{i=1}^{k}p_i}+\Delta.$$

При определении Δ и появляется a_{st}.

5. Заключение

Таким образом, нами показана технология применения метода ветвления для точного вычислении характеристик случайных графов. Показано, что применение некотрых приёмов, прежде всего понижения размерности задачи, позволяет избежать полного перебора при сохранении экспоненциальной сложности задачи. В заключение приведём результат численного эксперимента по вычислению МОНП. Суммарное время вычисления для 30 случайных графов G(10,15) на ПЭВМ с процессором Pentium 4 2.53 ГГЦ при применении указанных приёмов составило около 53 секунд, тогда как при полном переборе всех пар вершин потребовалось 16 мин 32 сек, что почти в 20 раз больше. Результаты же, достигнутые при вычислении вероятности связности, ещё более впечатляюще: как показано в [1,2], ускорение может достигать сотен раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Родионов А.С., Родионова О.К. О точном вычислении вероятности связности графа // Тр. Междунар. конф. «Вычислительные технологии и математические модели в науке, технике и образовании», Алма-Ата, Казахстан, 18-20 сентября 2002 года. – Алма-Ата, 2002, .том 5, с. 140 – 147.
2. Rodionova O.K., Rodionov A.S., Choo H. Network probabilistic connectivity: exact calculation with use of chains. // ICCSA-2004, Springer LNCS. vol. 3046, 2004, p. 315 – 324.
3. Rodionova O.K., Rodionov A.S., Choo H. Network probabilistic connectivity: reliability polynomial // Proc. of the 8th Int. conf. «Problems of Operation of Information Networks», vol. 1, p. 321 – 327.
4. Родионов А.С., Родионова О.К., Мигов Д.А., Мурзин М.Ю. Использование метода ветвления для точного расчёта вероятности связности случайного графа // Математика и безопасность информационных технологий. – М.: МЦНМО, – 2005. С. 141-146.
5. Родионова О.К. Параллельная реализация метода точного расчёта вероятности связности сети // Мат. Межд. семинара «Вычислительные методы и решение оптимизационных задач»: Тр. МНТК Связь-2004, 2004, том. 3. с. 157 – 160.
6. Rodionov A.S., Rodionova O.K. Network Probabilistic Connectivity: Expectation of a Number of Disconnected Pairs of Nodes // HPCC 2006, Springer-Verlag LNCS, vol. 4208, 2006, p. 101 – 109.
7. Кауль С.Б. Оценка вероятности связности случайного графа // Эффективность и структурная надежность информационных систем (СМ-7). – Новосибирск, 1982, с. 3 – 6.
8. Кельманс А.К. Некоторые вопросы анализа надёжности сетей // Автомат. и телемех., том XXVI, №3, 1965, с. 567 – 574.
9. Литвак Е.И. О вероятности связности графа // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1975, №5, с. 161 – 165.
10. Ломоносов М.В., Полесский В.П. Верхняя граница надёжности информационных сетей // Проблемы передачи информации, том VII, вып. 4, 1971, с. 78 – 81.
11. Мур Э., Шеннон К. Надёжные схемы из ненадежных реле // Кибернетический сб. – М.: Иностр. лит., 1960, вып. 1. – с. 109– 148.
12. Толчан А.Я. О связности сети // Проблемы передачи информации, вып. 17, 1964, с. 3 – 7.
13. Chen Y, Li J., Chen J. A new algorithm for network probabilistic connectivity // Military Communications Conference (MILCOM 1999) Proceedings. IEEE 1999, 1999, vol. 2, p. 920 – 923.
14. Shooman A.M. Algorithms for network reliability and connection availability analysis // Electro/95 Int. professional program proc., 1995, p. 309 – 333.
15. Родионова О.К. ППП ГРАФ/3. Связность мультиграфов с ненадёжными ребрами (Атлас, процедуры). Препринт ВЦ СО АН СССР № 356, Новосибирск, 1982, 32 с.

Родионов Алексей Сергеевич: д.т.н., профессор, член-корр. МАИ, зав. лабораторией моделирования динамических процессов в информационных сетях, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (630090, Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 6), тел. (383) 332-69-49, e-mail: alrod@rav.sscc.ru

Родионова Ольга Константиновна: к.т.н., доцент кафедры информационных систем, СибГУТИ