УДК 519.872:621.391

# Асимптотическая модель суммирования нестационарных потоков однородных событий с последействием в беспроводных сетях множественного доступа

А. Б. Мархасин

Развиты исследования асимптотической модели суммирования нестационарных случайных потоков однородных событий (заявок) с ограниченным последействием, построенной на физически интерпретируемых и доступных для экспериментальной апробации характеристиках интенсивностей слагаемых потоков. Доказаны предельные теоремы, устанавливающие для предложенной модели суммирования потоков сходимость распределения вероятностей к закону Пуассона, суммарного потока – к пуассоновскому процессу, а также сходимость по вероятности суммы нестационарных потоков к стационарному процессу. Полученные результаты актуальны для задач анализа распределённых очередей и управления множественным доступом в беспроводных сетях.

*Ключевые слова*: поток однородных событий, пуассоновский, нестационарный, последействие, физическая модель, предельные теоремы, распределённые очереди, беспроводные сети, множественный доступ, MAC.

## 1. Введение

Решение таких важных задач, как анализ очередей, оптимизация, моделирование систем массового обслуживания (СМО), управление доступом к среде (MAC), динамическое управление распределением ресурсов, трафиком и качеством обслуживания (QoS) в телекоммуникационных сетях основано на изучении закономерностей случайных процессов поступления на входы обслуживающих приборов потоков сообщений (заявок) [1 – 4]. Совокупные потоки заявок в беспроводных сетях множественного доступа (БСМД) физически формируются путём суммирования большого числа слагаемых потоков малой интенсивности, поступающих на входы распределённых в географическом пространстве локальных очередей, образующих многомерную общую очередь [4, 5]. Последовательность моментов времени поступления сообщений/заявок на входы локальных очередей удобно моделировать единичными бесконечно короткими импульсами, образующими случайные потоки однородных событий (СПОС) [6 – 8].

В основополагающих работах К. Пальма [9] и А.Я. Хинчина [10 – 13] по теории массового обслуживания в качестве модели входного потока однородных событий (заявок) использовался пуассоновский, или простейший, поток. Пуассоновские модели потоков нашли широкое применение при исследовании трафика как в проводных, так и беспроводных телекоммуникационных сетях [1– 4]. А.Я. Хинчин показал в [11], что необходимым и достаточным условием подчинения потока закону Пуассона является удовлетворение трём требованиям: стационарности, ординарности и отсутствия последействия. Тем не менее, при исследованиях сумм большого числа потоков малой интенсивности установлено, что распределения суммарных потоков могут сходиться к пуассоновскому и в тех случаях, когда слагаемые потоки не являются простейшими. Например, в [7, 11] доказана сходимость к пуассоновскому закону суммы стационарных ординарных потоков с ограниченным последействием, в [14] – для нестационарных потоков без последействия. Более того, как отметил А.Я. Хинчин в [11], «…опытные данные согласуются с выводами построенной теории, как правило, лучше, чем этого можно было бы ожидать по принципиальным соображениям, и это “слишком хорошее” согласование требует объяснения».

Б. Григелионис показал в [14], что необходимые и достаточные условия сходимости суммы независимых потоков к процессу Пуассона есть

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le r\le n}[1-p_{n,r}(0,t,0)]=0\,, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}p_{n,r}(1,t,u)=\Lambda(t)-\Lambda(u)\,, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}[1-p_{n,r}(0,t,u)-p_{n,r}(1,t,u)]=0\,, \tag{3}$$

где $p_{n,r}(k,t,u)$ – вероятность появления $k$ импульсов $r$-го потока в интервале $(u,\ t)$, $\Lambda(t)$ – ведущая функция потока [11].

Модели вида (1) – (3) позволяют математически строго и изящно объяснять явления сходимости к пуассоновскому процессу сумм слагаемых потоков общего вида. К сожалению, такие модели основаны на опосредствованных математических зависимостях, не имеющих очевидной физической интерпретации и мало приспособленных к апробации в инженерной практике решения задач прогноза закономерностей трафика, синтеза и проектирования телекоммуникационных сетей. Если априори неизвестны закономерности изменения вероятностей $p_{n,r}(k,t,u)$ при увеличении числа $n$ слагаемых потоков, то модель вида (1) – (3) можно апробировать лишь апостериорно, **после** накопления статистики в действующей сети, в то время как закономерности потоков однородных событий более всего требуются априорно, **до** появления возможности сбора статистики, на этапах синтеза и проектирования сети.

В данной работе развиваются исследования предложенной в наших работах [8, 15] модели суммирования случайных потоков однородных событий (СПОС), построенной на физически интерпретируемых и доступных для апробации на предпроектной стадии параметрах и свойствах потоков – на физических характеристиках интенсивности слагаемых потоков. Выбор интенсивностей слагаемых потоков в качестве основы модели объясняется не только их простым физическим смыслом, но и наличием богатой статистики по различным видам источников слагаемых потоков, возможностями их прогноза. Следует также отметить, что для нестационарных потоков наиболее разработаны и достоверны методы статистического анализа именно интенсивности, или анализа тренда [16].

## 2. Модель суммарного потока однородных событий

Случайный поток однородных событий (СПОС) представляем ступенчатым процессом $X(t)$, $t\in[0,\infty)$, принимающим только неотрицательные целочисленные приращения [11, 16]. Историю процесса $X(t)$ на отрезке времени $[0,t)$ обозначим через $X_0^t$. Обозначим далее вероятность появления ровно $k$ событий потока на интервале времени $[t,t+\tau)$ через $p(k,t,\tau)$,

$$p(k,t,\tau)=\Pr[X(t+\tau)-X(t)=k],\ k=0,\,1,\,2,\ldots \tag{4}$$

Говорят, что поток *стационарный*, если

$$p(k,t,\tau)=p(k,0,\tau),\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ t\in[0,\infty), \tag{5}$$

*ординарный*, если

$$\lim_{\tau\to 0}\Big[\sum_{k=2}^{\infty}p(k,t,\tau)/\sum_{k=1}^{\infty}p(k,t,\tau)\Big]=0,\ t\in[0,\infty), \tag{6}$$

и не имеет *последействия*, если для любых реализаций прошлого процесса $A\in X_0^t$ справедливо

$$p(k,t,\tau,A)-p(k,t,\tau)p(A)=0,\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ A\in X_0^t,\ t\in[0,\infty), \tag{7}$$

где через $p(k,t,\tau,A)$ обозначена двумерная вероятность наступления ровно $k$ событий потока на интервале времени $[t,t+\tau)$ и наблюдения реализации $A$ прошлого процесса на отрезке $(0,t)$, через $p(A)$ – априорная вероятность реализации $A$ прошлого процесса на отрезке $(0,t)$, $A\in X_0^t$.

*Интенсивностью* $\mu(t)$ потока называют предел

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{\infty}kp(k,t,\tau)=\mu(t),\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ t\in[0,\infty), \tag{8}$$

*параметром* $\lambda(t)$ потока называют предел

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{\infty}p(k,t,\tau)=\lambda(t),\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ t\in[0,\infty), \tag{9}$$

и, наконец, *условной интенсивностью* $\mu(t/A)$ потока называют предел

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{\infty}kp(k,t,\tau/A)=\mu(t/A),\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ A\in X_0^t,\ t\in[0,\infty), \tag{10}$$

где через $p(k,t,\tau/A)$ обозначена апостериорная вероятность наступления ровно $k$ событий потока при условии наблюдения реализации $A\in X_0^t$ прошлого.

**Допущение 1**. Естественно предположить, что практический интерес представляют потоки, обладающие интенсивностью. Поэтому полагаем пределы (8) и (10) существующими.

Полагаем далее, что суммарный поток однородных событий описывается простой суммой

$$X(t,m)=\sum_{s=1}^{m}X_s(t),\ t\in[0,\infty), \tag{11}$$

взаимно независимых, нестационарных и ординарных потоков $X_s(t)$, $s\in\{1,2,\ldots,m\}$, с последействием, удовлетворяющих следующим трём условиям.

**Условие 1.** Считаем интенсивности $\mu_s(t)$ суммируемых потоков $X_s(t)$ реализациями непрерывных во времени процессов с математическими ожиданиями $E[\mu_s(t)]$ и дисперсиями $D[\mu_s(t)]$, $s\in\{1,2,\ldots,m\}$, $t\in[0,\infty)$. Такие процессы впервые рассматривались Д. Коксом при изучении остановок ткацкого станка вследствие обрывов нити [17] и называются двойными стохастическими (doubly stochastic), или процессами Кокса.

**Условие 2**. Полагаем, что при любом $m \le \infty$ и в любой момент времени $t \in [0,\infty)$ интенсивность суммарного потока $X(t,m)$ имеет некоторое конечное значение $M_m(t)$, т.е.

$$\mu(t,m) = \sum_{s=1}^{m} \mu_s(t) = \mathrm{M}_m(t) < \infty,\ t \in [0,\infty), \tag{12}$$

$$\mu(t,\infty) = \lim_{m\to\infty} \mu(t,m) = \mathrm{M}_\infty(t) < \infty,\ t \in [0,\infty), \tag{13}$$

а интенсивности суммируемых потоков $X_s(t)$, $s \in \{1,2,\ldots,m\}$, равномерно уменьшаются при асимптотическом росте их числа, т.е.

$$\gamma(t,m) = \sup_{\{s\}} \gamma_s(t,m) = \Gamma_m(t) < \infty,\ s \in \{1,2,\ldots,m\},\ t \in [0,\infty), \tag{14}$$

$$\gamma(t,\infty) = \lim_{m\to\infty} \gamma_s(t,m) = \Gamma_\infty(t) < \infty,\ s \in \{1,2,\ldots,m\},\ t \in [0,\infty), \tag{15}$$

где $\gamma_s(t,m)$ есть отношение интенсивности $s$-го слагаемого потока $X_s(t), s \in \{1,2,\ldots,m\}$, к средней интенсивности $\mu(t,m)/m$ по всем $m$ суммируемым потокам:

$$\gamma_s(t,m) = \mu_s(t)/[\mu(t,m)/m],\ s \in \{1,2,\ldots,m\},\ t \in [0,\infty). \tag{16}$$

Потоки, удовлетворяющие условиям (12) – (15), назовем *равномерно ограниченными* (р.о.). Условие р.о. при $m \to \infty$, в принципе, не отличается от условия [11] равномерного уменьшения интенсивности слагаемых потоков. Удобство форм (12) – (15) проявляется при изучении сумм конечного числа $m < \infty$ слагаемых потоков. Скорость и точность сходимости распределений к предельному закону можно выразить функцией от доступных характеристик отношений (16) – среднего квадратичного отклонения, размаха выборки и т.п.

**Условие 3.** Требования к последействию в слагаемых потоках выразим в форме ограничений на величину отношения условной и безусловной интенсивностей

$$r_s(t,A) = \mu_s(t/A)/\mu_s(t),\ s \in \{1,2,\ldots,m\},\ t \in [0,\infty),\ A \in X_{0s}^t. \tag{17}$$

Отношение (17) равно единице только в том случае, когда последействие в потоке отсутствует. Следовательно, отклонение отношения (17) от единицы может служить некоторой мерой наличия последействия в потоке. Ограничим снизу и сверху величину отношения условной и безусловной интенсивностей потоков конечными значениями:

$$0 < r_{s-}(t) \le r_s(t,A) \le r_{s+}(t) < \infty,\ s \in \{1,2,\ldots,m\},\ t \in [0,\infty),\ A \in X_{0s}^t, \tag{18}$$

где $r_{s-}(t) = \inf_{\{A\}} r_s(t,A)$, $r_{s+}(t) = \sup_{\{A\}} r_s(t,A)$, $s \in \{1,2,\ldots,m\}$, $t \in [0,\infty)$, $A \in X_{0s}^t$.

Назовем неравенства (18), ограничивающие снизу и сверху отношения условной и безусловной интенсивностей потоков точными границами, условиями *слабого последействия* (с.п.). Физически интерпретируемый смысл условий с.п. заключается в уменьшении шансов скопления большого числа событий потока на малых отрезках (ограничение сверху), а также в снижении вероятности противоположного явления – исчезновения потока (ограничение снизу).

Условия с.п. можно выразить также через ограничения на отношение условных (апостериорных) и безусловных (априорных) вероятностей на основании следующей леммы.

***Лемма* 1.** *Для любого ординарного потока отношение интенсивности* $\mu(t)$ (8) *к параметру* $\lambda(t)$ (9) *существует и имеет конечное значение*.

Доказательство. Для доказательства леммы запишем отношение $\mu(t)/\lambda(t)$ интенсивности к параметру ординарного потока с учётом определений (8) и (9) в виде предела

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t),\ t\in[0,\infty) \tag{19}$$

для частичных сумм $f_n(t)=\sum_{k=1}^{n} v_k(t)$, где $v_k(t)=\lim_{\tau\to 0}\{[\frac{1}{\tau}\sum_{i=k}^{\infty} p(i,t,\tau)]/[\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{\infty} p(i,t,\tau)]\}$. Функциональная последовательность $f_1(t), f_2(t),..., f_n(t)$, составленная из частичных сумм $\sum_{k=1}^{n} v_k(t)$, удовлетворяет критерию Коши равномерной сходимости последовательностей, так как на основании условия (6) ординарности потока $v_2(t)=0$ и поэтому справедливо $v_2(t)\ge v_3(t)\ge,...,\ge 0$.

Следовательно, функциональная последовательность $f_1(t), f_2(t),..., f_n(t)$ сходится к предельной функции, т.е. для любого $t\in[0,\infty)$ существует конечный предел (18). ■

Можно показать, что для любого ординарного потока отношение условной интенсивности $\mu(t/A)$ (10) к условному параметру $\lambda(t/A)$ существует и имеет конечное значение.

**Следствие 1**. Если поток ординарный и для него существует априорная/условная интенсивность, то для него существует и априорный/условный параметр.

На основании леммы 1, следствия 1 и определения параметра (9), условия с.п. можно выразить и в форме ограничений на отношения условных и безусловных параметров потока:

$$0<q_{s-}(t)\le q_s(t,A)\le q_{s+}(t)<\infty,\ s\in\{1,2,\dots,m\},\ t\in[0,\infty),\ A\in X_{0s}^{t}, \tag{20}$$

где $q_s(t,A)=\lambda_s(t/A)/\lambda_s(t)$, $q_{s-}(t)=\inf_{\{A\}} q_s(t,A)$, $q_{s+}(t)=\sup_{\{A\}} q_s(t,A)$.

С учётом свойства (6) ординарности потоков и определения параметра (9) потока, условие с.п. можно выразить также в форме ограничений на отношения условных и безусловных вероятностей:

$$0<h_{s-}(t)\le h_s(t,A)\le h_{s+}(t)<\infty,\ s\in\{1,2,\dots,m\},\ t\in[0,\infty),\ A\in X_{0s}^{t}, \tag{21}$$

где $h_s(t,A)=\lim_{\tau\to 0}[p_s(1,t,\tau/A)/p_s(1,t,\tau)$, $h_{s-}(t)=\inf_{\{A\}} h_s(t,A)$, $h_{s+}(t)=\sup_{\{A\}} h_s(t,A)$.

Несложно увидеть соответствие записи условия с.п. в форме (21) определению (7) отсутствия последействия.

## 3. Свойства потоков со слабым последействием (с.п.)

Верхние и нижние границы распределений вероятностей потоков[1] со слабым последействием (с.п.) устанавливает

**Лемма 2**. *Если ординарный поток с переменным параметром* $\lambda(t)$ *подчиняется условию с.п., то при любых* $t\in[0,\infty)$ *и* $\tau<\infty$ *априорные вероятности появления заданных чисел событий потока на отрезках* $[t,t+\tau)$ *ограничены сверху и снизу следующими неравенствами:*

$$p(k,t,\tau)\le \frac{1}{k!}\Lambda_+^k(t,\tau)\exp[-\Lambda_-(t,\tau)],\ k=0,1,2,\dots,\ t\in[0,\infty), \tag{22}$$

[1] Здесь и далее индексы $s$-ых слагаемых потоков, по возможности, опускаются.

$$p(k,t,\tau)\ge \frac{1}{k!}\Lambda_-^k(t,\tau)\exp[-\Lambda_+(t,\tau)]\,,\ k=0,\,1,\,2,\ldots,\ t\in[0,\infty)\,, \tag{23}$$

*где* $\Lambda_\pm(t,\tau)=\int\limits_t^{t+\tau}\lambda(t+u)q_\pm(t+u)du$ , *точные границы* $q_\pm(t)$ *задаются выражением* (20).

Доказательство. Разобьём интервал $[t,t+\tau)$ на такое большое число элементарных отрезков $[t_i,t_i+\tau/n)$, $t_i=t+i\tau/n$, $i=0,1,\ldots,(n-1)$, чтобы на каждый из этих элементарных отрезков почти наверное приходилось не более одного события потока. Обозначим далее через $p_n(k,t,\tau/A)$ условную вероятность сложного события, заключающегося в появлении хотя бы по одному событию потока точно на $k$ элементарных отрезках из $n$ возможных, $k$ = 0, 1, 2,…, $k\le n$. Тогда, благодаря ординарности потока, рассматриваемое в лемме распределение вероятностей можно выразить через введённые вероятности с помощью предельного перехода

$$p(k,t,\tau)=\lim_{n\to\infty}\sum_{A\in X_0^t}p_n(k,t,\tau/A)p(A)\,,\ k=0,\,1,\,2,\ldots,\ t\in[0,\infty),\ \tau<\infty\,. \tag{24}$$

Определим далее условные вероятности $w(t_i,\frac{\tau}{n}/A_i)$ событий $\{k>0\}$ на элементарных отрезках $[t_i,t_i+\tau/n)$, $t_i=t+i\tau/n$, $i=0,1,\ldots,(n-1)$,

$$w(t_i,\tfrac{\tau}{n}/A_i)=\mathbf{P}_r[k_i>0,t_i,\tfrac{\tau}{n}\,|\,k_{i-1},\ldots,k_0;t_{i-1},\tfrac{\tau}{n},\ldots,t_0,\tfrac{\tau}{n};A]=\sum_{k_i=1}^{\infty}p(k_i,t,\tfrac{\tau}{n}/A_i)\,, \tag{25}$$

где $A_i$ – реализация предыстории процесса для точки $t_i$, $A_i\in X_0^{t_i}$, $t_0=t$, $A_0=A$, $t\in[0,\infty)$.

Перенумеровав элементарные отрезки в последнем выражении по признаку наличия ($k$ > 0) либо отсутствия ($k$ = 0) событий потока, выразим далее условные вероятности $p_n(k,t,\tau/A)$ сложных событий через произведения введённых условных вероятностей (25) на элементарных отрезках $[t_j,t_j+\tau/n)$, $t_j=t+(j-1)\tau/n$, $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ в виде

$$p_n(k,t,\tau/A)=\sum_{C_n^k}\prod_{j=1}^{k}\frac{w(t_j,\frac{\tau}{n}/A_j)}{1-w(t_j,\frac{\tau}{n}/A_j)}\prod_{j=1}^{n}[1-w(t_j,\tfrac{\tau}{n}/A_j)],\ t_j\in\{t_0,t_1,\ldots,t_{n-1}\},\ \tau<\infty,$$

а затем, воспользовавшись неравенством $\sum_{C_n^k}\prod_{j=1}^{k}x_j\le\frac{C_n^k}{n^k}(\sum_{j=1}^{n}x_j)^k$, доказанным в [18], находим оценку

$$p_n(k,t,\tau/A)\le\frac{C_n^k}{n^k}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{w(t_j,\frac{\tau}{n}/A_j)}{1-w(t_j,\frac{\tau}{n}/A_j)}\right]^k\prod_{j=1}^{n}\left[1-w(t_j,\tfrac{\tau}{n}/A_j)\right]. \tag{26}$$

Подставив полученную оценку (26) в выражение (24) получаем:

$$p_n(k,t,\tau)\le\lim_{n\to\infty}\sum_{A\in X_0^t}p(A)\frac{C_n^k}{n^k}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{w(t_j,\frac{\tau}{n}/A_j)}{1-w(t_j,\frac{\tau}{n}/A_j)}\right]^k\prod_{j=1}^{n}\left[1-w(t_j,\tfrac{\tau}{n}/A_j)\right],\ k=0,\,1,\,2,\ldots \tag{27}$$

Выразив на основании условий с.п. (20) предельные вероятности $w(t_i,\frac{\tau}{n}/A_i)$ через параметр $\lambda(t)$ потока и выполнив предельный переход, можно получить искомые верхнюю (22) и нижнюю (23) границы вероятностей появления событий потока. При этом, воспользовавшись также правилами операций над пределами, находим для предела суммы в (27):

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{w(t_j,\frac{\tau}{n}/A_j)}{1-w(t_j,\frac{\tau}{n}/A_j)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}[\sum_{k=1}^{\infty}p(k,t_j,\frac{\tau}{n}/A_j]/[1-\sum_{k=1}^{\infty}/\,p(k,t_j,\frac{\tau}{n}/A_j)]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\lambda(t_j/A_j)\frac{\tau}{n}+o(1)=\int_0^{\tau}\lambda(t+u/A)du\le\int_0^{\tau}\lambda(t)q_+(t)du=\Lambda_+(t,\tau), \tag{28}$$

где $o(1)$ – величина высшего порядка малости, $A_j\in X_0^{t_j}$, $t_0=t$, $A_0=A$, $t\in[0,\infty)$.

Воспользовавшись обобщением [19] второго классического предела и выполнив предельный переход для произведения в (27), получим:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\left[1-w(t_j,\frac{\tau}{n}/A_j)\right]=\lim_{n\to\infty}[1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}p(k,t_j,\frac{\tau}{n}/A_j)]^n=\exp[-\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\lambda(t_j/A_j)\frac{\tau}{n}]=$$
$$=\exp[-\int_0^{\tau}\lambda(t+u)/A)du]\le\exp[-\int_0^{\tau}\lambda(t+u)q_-(t+u)du]=\exp[-\Lambda_-(t,\tau)]. \tag{29}$$

Подставив (28) и (29) в (27), несложно убедиться в справедливости (22) для верхней оценки. Аналогичным путём можно получить и нижнюю оценку (23). ■

Для нестационарных потоков без последействия справедливо условие (7), и поэтому совпадают как верхняя и нижняя границы отношений (20) параметров потоков, или $q_{s-}(t)=q_{s+}(t)=1$, так и границы ведущих функций потоков, или $\Lambda_+(t,\tau)=\Lambda_-(t,\tau)=\Lambda(t,\tau)=\int_t^{t+\tau}\lambda(t+u)du$. Можно показать, что сливаются и границы (22) и (23) распределений вероятностей событий потока в выражение

$$p(k,t,\tau)=\frac{1}{k!}\Lambda^k(t,\tau)\exp[-\Lambda(t,\tau)],\ k=0,1,2,\ldots,\ t\in[0,\infty),$$

которое совпадает с полученной А.Я. Хинчиным в [11] формулой (5.5) для нестационарных потоков без последействия.

**Лемма 3**. *Если ординарный поток подчиняется условию с.п., то его интенсивность* (8) *и параметр* (9) *совпадают*.

Доказательство леммы строится на вычислении с помощью (22) верхней оценки разности $\mu(t)-\lambda(t)$, $t\in[0,\infty)$, которая оказывается равной нулю. ■

Из лемм 2 и 3 следует, что граничные распределения вероятностей для потоков со с.п. можно выразить также через интенсивности (8) аналогично границам (22), выраженным через функции от параметров (9) потоков:

$$p(k,t,\tau)\le\frac{1}{k!}\mathrm{M}_+^k(t,\tau)\exp[-\mathrm{M}_-(t,\tau)],\ k=0,1,2,\ldots,\ t\in[0,\infty), \tag{30}$$

$$p(k,t,\tau)\ge\frac{1}{k!}\mathrm{M}_-^k(t,\tau)\exp[-\mathrm{M}_+(t,\tau)],\ k=0,1,2,\ldots,\ t\in[0,\infty), \tag{31}$$

где $\mathrm{M}_\pm(t,\tau)=\int_t^{t+\tau}\mu(t+u)r_\pm(t+u)du$, точные границы $r_\pm(t)$ задаются выражением (20).

В следующей лемме условию (6) ординарности на временно́й оси $t\in[0,\infty)$ находится аналог на множестве $\{1,2,\ldots,m\}$ слагаемых потоков однородных событий ($m$-ординарность).

**Лемма 4.** *Пусть ординарные потоки однородных событий* $X_s(t),s\in\{1,2,\ldots,m\}$, $t\in[0,\infty)$, *подчиняются условиям равномерной ограниченности (р.о.) и слабого последействия (с.п.). Пусть также для названных потоков определимы распределения* *вероятностей* $p_{m,s}(k,t,\tau)$ *чисел k, k = 0, 1, 2,…, событий потоков на интервалах* $[t,t+\tau)$*, в зависимости от числа* $m$ *слагаемых потоков. Тогда для любых* $t\in[0,\infty)$ *и любых* $\tau\in\infty$ *справедливы следующие предельные выражения для условий m-ординарности*:

$$\lim_{m\to\infty}[\sum_{k=2}^{\infty}p_{m,s}(k,t,\tau)/\sum_{k=1}^{\infty}p_{m,s}(k,t,\tau)]=0,\ t\in[0,\infty),\ \tau\in\infty,\ s\in\{1,2,\dots,m\}, \tag{32}$$

$$\lim_{m\to\infty}[\sum_{k=2}^{\infty}kp_{m,s}(k,t,\tau)/\sum_{k=1}^{\infty}kp_{m,s}(k,t,\tau)]=0,\ t\in[0,\infty),\ \tau\in\infty,\ s\in\{1,2,\dots,m\}. \tag{33}$$

Для доказательства леммы используются граничные неравенства (22), (23), (30) и (31). ■

## 4. Предельные теоремы

Асимптотическое распределение вероятностей для сумм взаимно независимых, нестационарных, равномерно ограниченных (р.о.), ординарных потоков со слабым последействием (с.п.) устанавливает

**Теорема 1**. *Пусть поток* $X(t,m)$, $X(t,m)=\sum_{s=1}^{m}X_s(t)$, *есть суперпозиция* $m$ *взаимно независимых, нестационарных, ординарных и равномерно ограниченных (р.о.) потоков* $X_s(t)$ *со слабым последействием (с.п.), интенсивности которых есть* $\mu_s(t)$, *параметры –* $\lambda_s(t)$, *ведущие функции –* $\Lambda_s(t,\tau)=\int_t^{t+\tau}\lambda_s(t+u)du$, $s\in\{1,2,\dots,m\}$, $t\in[0,\infty)$. *Тогда на любом конечном интервале* $[t,t+\tau)$ *и в любой момент времени* $t\in[0,\infty)$ *распределение вероятностей суммарного потока* $X(t,m)$ *сходится при* $m\to\infty$ *к закону Пуассона*:

$$\lim_{m\to\infty}v_m(k,t,\tau)=\tfrac{1}{k!}[\Lambda(t,\tau,\infty)]^k\exp[-\Lambda(t,\tau,\infty)],\ k=0,1,2,\dots,\ \tau\in\infty,\ t\in[0,\infty), \tag{34}$$

*где* $v_m(k,t,\tau)$ *– вероятность наступления ровно k событий суммарного потока* $X(t,m)$ *на интервале времени* $[t,t+\tau)$, $v_m(k,t,\tau)=\Pr[X((t+\tau),m)-X(t,m)=k]$, $\Lambda(t,\tau,\infty)$ *– конечный предел ведущей функции* $\Lambda(t,\tau,m)$ *суммарного потока*,

$$\Lambda(t,\tau,\infty)=\lim_{m\to\infty}\Lambda(t,\tau,m)=\lim_{m\to\infty}\sum_{s=1}^{m}\Lambda_s(t,\tau),\ \tau\in\infty,\ t\in[0,\infty). \tag{35}$$

Доказательство. Воспользуемся методом производящих функций. Определим вначале производящие функции $\varphi_{s,m}(t,\tau,\vartheta)$ слагаемых потоков при их числе $m\to\infty$,

$$\varphi_{s,m}(t,\tau,\vartheta)=\sum_{k=0}^{\infty}\vartheta^k p_{s,m}(k,t,\tau),\ s\in\{1,2,\dots,m\},\tau\in\infty,\ t\in[0,\infty), \tag{36}$$

где $p_{s,m}(k,t,\tau)$ – вероятность наступления на конечном интервале $[t,t+\tau)$ ровно $k$ событий $s$-го слагаемого потока из их общего числа $m$.

На основании лемм 3 и 4 для вероятностей $p_{s,m}(k,t,\tau)$ равномерно ограниченных (р.о.) потоков со слабым последействием (с.п.) при любых $s\in\{1,2,\dots,m\},\tau\in\infty$, $t\in[0,\infty)$ справедливо:

$$\lim_{m\to\infty}p_{s,m}(k,t,\tau)=\begin{cases}1-\Lambda_s(t,\tau)+o(1), & \text{если } k=0,\\ \Lambda_s(t,\tau)+o(1), & \text{если } k=1,\\ o(1) & \text{если } k>1,\end{cases} \tag{37}$$

где $o(1)$ – величина высшего порядка малости. С учётом (36) и (37) получаем для производящих функций слагаемых потоков:

$$\lim_{m\to\infty}\phi_{s,m}(t,\tau,\vartheta)=1-(1-\vartheta)\Lambda_s(t,\tau)+\hat{\imath}\,(1)\,,\ s\in\{1,2,\ldots,m\}\,,\tau\in\infty\,,\ t\in[0,\infty)\,. \tag{38}$$

Известно, что производящая функция $\varphi(t,\tau,\vartheta,m)$ суммы независимых потоков равна произведению производящих функций слагаемых потоков, или $\varphi(t,\tau,\vartheta,m)=\prod_{s=1}^{m}\varphi_{s,m}(t,\tau,\vartheta)$. Подставив в последнее выражение полученные выше асимптотические производящие функции (38) и воспользовавшись обобщением [19] второго классического предела, находим асимптотическое значение производящей функции суммарного потока

$$\lim_{m\to\infty}\varphi(t,\tau,\vartheta,m)=\lim_{m\to\infty}\lim_{\substack{\sup\Lambda_s(t,\tau)\to 0\\ \{s\}}}\prod_{s=1}^{m}[1-(1-\vartheta)\Lambda_s(t,\tau)]=\exp[-(1-\vartheta)\Lambda(t,\tau,\infty)]\,,\tau\in\infty\,, \tag{39}$$

где $\Lambda(t,\tau,\infty)$ конечный предел (35) ведущей функции $\Lambda(t,\tau,m)$ суммарного потока, который на основании условия р.о. и леммы 3 существует, как и предел $\lim\limits_{m\to\infty}\sup\limits_{\{s\}}\Lambda_s(t,\tau)\to 0$.

Дифференцированием производящей функции (39) находим асимптотические вероятности числа событий суммарного потока

$$v_\infty(k,t,\tau)=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k\varphi(t,\tau,\vartheta,\infty)}{\partial\vartheta^k}\Big|_{\vartheta=0}\,,\ k=0,\,1,\,2,\ldots, \tag{40}$$

которые отвечают распределению (34) по закону Пуассона. ■

В предыдущей теореме показано, что распределение числа событий суммарного потока сходится к пуассоновскому закону. В следующей теореме доказывается, что и непосредственно суммарный поток асимптотически сходится к пуассоновскому потоку.

**Теорема 2**. *Сумма взаимно независимых ординарных нестационарных равномерно ограниченных (р.о.) потоков со слабым последействием сходится при* $m\to\infty$ *к пуассоновскому потоку, или*

$$\lim_{m\to\infty}\Pr[X(t_i+\tau_i,m)-X(t_i,m)=k_i\mid i\in\{1,2,\ldots,n\}]=\exp[-\sum_{i=1}^{n}\Lambda(t_i,\tau_i,\infty)]\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i!}[\Lambda(t_i,\tau_i,\infty)]^{k_i}\,, \tag{41}$$
$$k_i=0,1,2,...,\ \ t_{i+1}=t_i+\tau_i\,,\ \tau_i\in\infty\ ,\ t\in[0,\infty)\,.$$

Доказательство. Воспользуемся идеей доказательства подобной теоремы для стационарных потоков [11, §16]. С учётом распределения вероятностей (37) каждый $s$-ый поток может породить на конечном отрезке $[t,t+\tau)$ не более одного события при $m\to\infty$. Поэтому все события суммарного потока $X(t,m)$ на отрезке $[t,t+\tau)$ можно считать асимптотически взаимно независимыми, так как все они почти наверное принадлежат разным слагаемым потокам, которые взаимно независимы по условию теоремы.

Пусть известно, что на отрезке $[t,t+\tau)$ наступило ровно $k=\sum_{i=1}^{n}k_i$ событий потока. Тогда для любого из $k$ наступивших на отрезке $[t,t+\tau)$ событий вероятность попадания в произвольно выбранный интервал $[t_i,t_i+\tau_i)$, $t\le t_i$, $t_i+\tau_i\le t+\tau$ равна отношению соответствующих ведущих функций $\Lambda(t_i,\tau_i,\infty)/\Lambda(t,\tau,\infty)$ независимо от выпадения остальных $k-1$ событий. Следовательно, предельная условная вероятность рассматриваемых событий при $m\to\infty$ и условии наступления $k$ событий суммарного потока на отрезке $[t,t+\tau)$ равна

$$\lim_{m\to\infty} \Pr[X(t_i+\tau_i,m)-X(t_i,m)=k_i \mid i\in\{1,2,...,n\} / X(t+\tau,m)-X(t,\tau)=k] =$$
$$=(k!/\prod_{i=1}^{n} k_i!)\prod_{i=1}^{n}[\Lambda(t_i,\tau_i,\infty)/\Lambda(t,\tau,\infty)]^{k_i} \ , k\in\{0,1,2,\ldots\},\ t_{i+1}=t_i+\tau_i,\ \tau_i\in\infty, t\in[0,\infty). \qquad (42)$$

Умножив полученную условную вероятность (42) на определённую выше априорную вероятность (34) наступления $k$ событий суммарного потока на отрезке $[t,t+\tau)$, находим искомую безусловную вероятность сложного события

$$\lim_{m\to\infty} \Pr[X(t_i+\tau_i,m)-X(t_i,m)=k_i \mid i\in\{1,2,\ldots,n\}, \sum_{i=1}^{n} k_i = k] =$$
$$=\exp[-\Lambda(t,\tau,\infty)]\prod_{i=1}^{n}\tfrac{1}{k_i!}\prod_{i=1}^{n}[\Lambda(t_i,\tau_i,\infty)]^{k_i} \ , k\in\{0,1,2,\ldots\},\ t_{i+1}=t_i+\tau_i, \tau_i\in\infty, \qquad (43)$$
$$t\in[0,\infty),$$

чем завершается доказательство теоремы. ■

Следуя закону больших чисел, сумма нестационарных р.о. потоков, описываемых моделями процессов Кокса [17], асимптотически сходится при $m\to\infty$ к стационарному процессу, что устанавливает

**Теорема 3.** *Пусть интенсивности взаимно независимых и равномерно ограниченных (р.о.) потоков* $X_s(t)$ *есть случайные процессы Кокса с математическими ожиданиями* $E[\mu_s(t)]$ *и дисперсиями* $D[\mu_s(t)]$, $s\in\{1,2,\ldots,m\}$, $t\in[0,\infty)$. *Тогда для любого момента времени* $t\in[0,\infty)$ *и любого постоянного* $\varepsilon>0$ *справедливо*

$$\lim_{m\to\infty} \Pr[|\sum_{s=1}^{m}\mu_s(t)-E[\sum_{s=1}^{m}\mu_s(t)]|\ge\varepsilon]=0,\ t\in[0,\infty). \qquad (44)$$

Доказательство. На основании неравенства Чебышёва и взаимной независимости потоков можно получить оценку сверху вероятности (44)

$$\Pr[|\sum_{s=1}^{m}\mu_s(t)-E[\sum_{s=1}^{m}\mu_s(t)]|\ge\varepsilon]\le\tfrac{1}{\varepsilon^2}\sum_{s=1}^{m}D[\mu_s(t)].\ t\in[0,\infty). \qquad (45)$$

Оценим величину дисперсии $D[\mu_s(t)]$ для каждого слагаемого $X_s(t)$ суммарного потока $X(t,m)=\sum_{s=1}^{m}X_s(t)$. На основании условий равномерной ограниченности (12), (14) для интенсивностей $\mu_{s,m}(t)$ суммируемых потоков[2] при любом их числе $m>0$, а также в любой момент времени $t\in[0,\infty)$ имеет место неравенство

$$\mu_{s,m}(t)\overset{\Delta}{=}E[\mu_{s,m}(t)]\le \sup_{t\in[0,\infty)}\ \sup_{s\in\{1,\ldots,m\}} \mu_{s,m}(t)\le\Gamma_m(t)\mathrm{M}_m(t)/m<\infty,\quad t\in[0,\infty),\ m>0, \qquad (46)$$

где $\mathrm{M}_m(t)$ – интенсивность (12) суммарного потока, $\mathrm{M}_m(t)<\infty$, $\Gamma_m(t)$ – точная верхняя грань (14) относительного размаха (16) интенсивностей слагаемых потоков, $\Gamma_m(t)<\infty$.

Далее, исходя из независимости потоков, равномерной ограниченности (р.о.) (12), (14), канонического определения дисперсии и соотношений (46), можно записать цепочку неравенств в правой части (45) для дисперсии суммарного потока:

$$\sum_{i=1}^{m}D[\mu_{s,m}(t)]\le\sum_{i=1}^{m}E[\mu_{s,m}^2(t)]\le\sum_{i=1}^{m}[\Gamma_m(t)\mathrm{M}_m/m]^2=[\Gamma_m(t)\mathrm{M}_m(t)]/m<\infty,\ t\in[0,\infty),\ m>0. \qquad (47)$$

[2] Нижний индекс $m$ указывает число суммируемых потоков.

С учётом полученной верхней оценки (47) дисперсии суммарного потока и условий р.о. в асимптотических формах (13) и (15) находим для любого постоянного $\varepsilon > 0$ предел верхней оценки (47)

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{m} D[\mu_{s,m}(t)] \le \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} [\Gamma_m(t) M_m(t)]^2 / m = 0, \quad t \in [0, \infty), \tag{48}$$

чем завершается доказательство теоремы. ■

**Следствие 2**. *Пусть потоки* $X_s(t)$, $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *удовлетворяют условиям теоремы 3, а также условиям слабого последействия* (18). *Тогда параметры потоков* $\lambda_s(t)$, $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *есть случайные процессы Кокса с математическими ожиданиями* $E[\lambda_s(t)] = E[\mu_s(t)] + o(1)$ *и дисперсиями* $D[\lambda_s(t)] = D[\mu_s(t)] + o(1)$, *где* $o(1)$ *– величины высшего порядка малости, и какова бы ни была постоянная* $\varepsilon > 0$, *предел*

$$\lim_{m\to\infty} \Pr[| \sum_{s=1}^{m} \lambda_s(t) - E[\sum_{s=1}^{m} \lambda_s(t)] | \ge \varepsilon] = 0, \quad t \in [0, \infty). \tag{49}$$

## 5. Заключение

Революционные вызовы технологий скоростного Интернета, оптоволоконных и беспроводных мобильных IP-сетей новых поколений (NGN, 3G, 4G) придали новый импульс поискам математических моделей трафика, адекватных процессам формирования (поступления), передачи (обслуживания) и управления потоками пакетированной информации в этих сетях. Были развиты исследования моделей Пуассона, например – [3, 4], пуассоновских процессов с марковской модуляцией – MMPP, MAP [20], мультисервисных аналогов модели Эрланга [3], а также предложены модели самоподобного трафика [21], жидкостная модель [22] и ряд других [1]. Из выполненного A. Jamalipoor в [1] сравнительного анализа актуальных применений различных моделей трафика следует, что универсальной модели нет: различные модели могут быть специализированы по классам задач, уровням сетевой иерархии, технологиям коммутации, условиям формирования потоков пакетированной информации и другим приложениям. Модели самоподобного трафика, жидкостная и ряд других нашли применение для исследования совокупных IP-потоков высокой интенсивности в проводных (оптоволоконных) средах транспортных сетей (core) и систем широкополосного доступа к Интернету.

Развитая в данной работе пуассоновская модель наиболее подходит для тех приложений, где физически составляется множество независимых потоков малой интенсивности. Органичными областями применения пуассоновских моделей являются процессы управления множественным доступом к беспроводным средам, динамического управления распределением полосы и качеством обслуживания (QoS) в мобильных беспроводных и спутниковых сетях 3G/4G [4, 5, 23]. Совокупные потоки в таких сетях физически составляются в беспроводных средах путём суммирования большого числа слагаемых потоков малой интенсивности, поступающих на входы распределённых в географическом пространстве локальных очередей, образующих многомерную общую очередь [4, 5]. Правомерность применения пуассоновских моделей в названных приложениях подтверждается хорошим совпадением результатов имитационного моделирования с аналитическими характеристиками [4, 23].

## Литература

1. Джамалипур А. Беспроводный мобильный Интернет: Архитектура, протоколы и сервисы. М.: Техносфера, 2009. 496 с.

2. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. Перевод с англ. под ред. Б.С. Цыбакова. М.: Мир,1979. 600 с.
3. Степанов С.Н. Основы телетрафика мультисервисных сетей. М.: Эко-Трендз, 2010. 392 с.
4. Мархасин А.Б. Задачи анализа и оптимизации мультисервисных мобильных сетей // Автометрия. 2008. Т.44, № 5. С. 123–134.
5. Markhasin A. Shannon bounds for large-scale wireless MAC's potential capacity in presence of errors //Proceedings of the Eleventh ACM International Conference on Modeling, Analysis, and Simulation of Wireless and Mobile Systems (MSWiM-2008). Vancouver, Canada, 27-31 October, 2008. P. 169-176.
6. Хинчин А.Я. Потоки случайных событий без последействия // Теория вероятностей и её применения. 1956. Т. 1, вып. 1. С. 3–17.
7. Ососков Г.А. Одна предельная теорема для потоков однородных событий // Теория вероятностей и её применения. 1956. Т. 1, вып. 2. С. 274–282.
8. Мархасин А. Б. Свойства одного класса нестационарных случайных потоков с последействием // Большие системы. Массовое обслуживание. Надёжность. М.: Наука, 1970. С. 326–337.
9. Palm C. Intensitätsschwankungen in Fernsprechverkehr // Ericsson Technics. 1943. V. 44, No 1, S. 1–189.
10. Хинчин А.Я. Предельные законы для сумм независимых случайных величин. М.: ГОНТИ, 1938. 116 с.
11. Хинчин А.Я. Математические методы теории массового обслуживания // Труды математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. Т. 49. М.: Изд. АН СССР, 1955. С. 1–122.
12. Хинчин А.Я. Работы по математической теории массового обслуживания. Под ред. Б.В.Гнеденко. М.: Физматгиз, 1963. 236 с.
13. Хинчин А.Я. О пуассоновских потоках случайных событий // Теория вероятностей и её применения. 1956. Т. 1, вып. 3. С. 320–327.
14. Григелионис Б. И. О сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому // Теория вероятностей и её применения. 1963. Т. 8, № 2. С. 189–194.
15. Мархасин А.Б. О суммировании нестационарных потоков сообщений с последействием в информационных сетях // Системное моделирование. Ред. М.И. Нечипоренко. Новосибирск: Изд. ВЦ СО АН СССР, 1984. С. 98–112.
16. Кокс Д., Льюис П. Статистический анализ последовательностей событий. М.: Мир, 1969. 312 с.
17. Cox D.R. Some statistical methods connected with series of events // Journal of the Royal Statistical Society. Series B. 1955. V. 17, No 2. P. 129-164.
18. Мархасин А.Б. Одно обобщение неравенства между арифметическим и геометрическим средними // Вопросы передачи информации при управлении производством. Новосибирск: ИГД СО АН СССР, 1970. Депонировано в ВИНИТИ, №2038-70 ДЕП, стр. 16-19.
19. Мархасин А.Б. Обобщение второго классического предела // В сб. [18].С. 20-22.
20. Назаров А.А., Лапатин И.Л. Асимптотически пуассоновские МАР-потоки // Вестник Томского государственного университета. 2010. № 4(13). С. 72-78.
21. Цыбаков Б.С. Модель телетрафика на основе самоподобного случайного процесса // Радиотехника. 1999. № 5. С. 24-31.
22. Misra V., Gong W. B., and Towsley D. Fluid-based analysis of a network of AQM routers supporting TCP flows with an application to RED // Proceedings of 2000 ACM/SIGCOMM Conference, pp. 151-160.
23. Markhasin A. Satellite-based fully distributed mesh hybrid networking technology DVB-S2/RCS-WiMAX for RRD areas // Proceedings of the 5th Advanced Satellite Multimedia Sys-

tems Conference and the 11th Signal Processing for Space Communications Workshop – ASMS/SPCS 2010, 13-15 September 2010, Cagliari, Italy, pp. 294-300.

*Статья поступила в редакцию 17.09.2011*

**Мархасин Александр Беньяминович**

д.т.н., профессор, заведующий кафедрой телекоммуникационных сетей и вычислительных средств СибГУТИ

телефон/факс: +7-3832698383, e-mail: marh@sibsutis.ru

**An asymptotic summation model of the non-stationary uniform events' flows with aftereffects in wireless multi-access networks**

**Alexander Markhasin**

In this paper, we investigate an asymptotic summation model of the non-stationary uniform events' flows with aftereffects, which based on the physical properties of the streams intensity, i.e., well adapted for experimental proof. For proposed summation model, we prove the limit theorems, that establish the convergence of the uniform events' probabilities distributing of flows superposition's to Poisson law, and show the convergence of the total sum flows' to Poisson process, too. And what is more, we show the convergence by probability of the of the non-stationary flows sum to the stationary process. The derived results will be useful for analysis of distributed queues, wireless medium access control (MAC) protocols, and QoS dynamic control for cognitive radio.

*Keywords*: uniform events flows, Poisson, non-stationary, aftereffect, limit theorems, distributed, queue, wireless, multiple access, MAC.