

Математическая модель системы с гибридной решающей обратной связью, использующей коды Рида – Соломона

Н. В. Лямин, Д. В. Клейко, А. Г. Шапин

В работе представлены выражения для определения вероятностно-временных характеристик систем с гибридной решающей обратной связью, использующих коды Рида – Соломона, для случая, когда дискретный канал описывается простой марковской цепью. Проведено сравнение с аналогичными системами, применяющими коды БЧХ. Аналитические результаты сопоставлены с результатами имитационного моделирования.

Ключевые слова: системы с ГРОС, коды Рида – Соломона, простая марковская цепь, свёртка дискретного канала.

1. Введение

Системы передачи данных с гибридной решающей обратной связью (ГРОС) занимают промежуточное положение между системами с переспросом и системами с прямым исправлением ошибок. Данные системы, помимо обнаружения ошибок и переспросов, при необходимости обеспечивают их исправление, что позволяет добиться лучших по сравнению с классическими системами качественных показателей. Применение гибридной обратной связи при построении систем передачи данных широко обсуждается в научной печати, и на сегодняшний день уже существуют системы передачи данных с ГРОС, которые внедрены в стандарты.

В данной работе приводятся системы передачи данных с ГРОС, использующие коды Рида – Соломона (далее БККРС). Системы строятся согласно стратегиям БКК-1 [3,4] и БКК-2 [6]. Сравниваются модели, использующие коды БЧХ и коды РС, в каналах с группированием ошибок. Для системы ГРОС БККРС решены задачи модификации математических моделей (ГРОС БЧХ [3,5]) получения вероятности успешной доставки блока за ограниченное число попыток. Проведено сравнение полученных выражений и результатов имитационного моделирования. Необходимо заметить, что математические модели для ГРОС БЧХ в явном виде не могут быть использованы в случае применения кодов РС. Коды РС, в отличие от кодов БЧХ, строятся над двоичными расширениями поля Галуа $GF(2)$, вследствие чего символом кода является не двоичный элемент, а m двоичных элементов. Здесь $GF(2^m)$ – расширение поля, в котором строится код. Математические модели для систем с гибридной связью, использующие коды БЧХ, требуют определения значений таких параметров, как вероятность исправления ошибок в блоке и вероятность неисправления ошибок. Данные параметры не могут быть определены для случая кодов РС без вывода дополнительных выражений, позволяющих анализировать поражение элементов на уровне не двоичных, а m -ричных символов (подробнее описано в четвёртом разделе). В пятой главе статьи такие выражения получены для случая, когда дискретный канал описывается простой марковской цепью.

2. Стратегии ГРОС БКК

В стратегии ГРОС-БКК-1 [3, 4] при приёме информационного блока n результаты прежних попыток для декодирования не используются, т.е. информационный блок, принятый с ошибкой в нечётной попытке, всегда исправляется корректирующей группой из следующей попытки. На рис. 1 приведён пример исправления информационных блоков n принятыми корректирующими группами r_2 (в скобках обозначены номера попыток передачи). В данном примере видно, что принятый в первой попытке передачи n -элементный блок исправляется только корректирующей группой, принятой во второй попытке передачи.



Рис. 1. Принцип исправления ошибок блочным кодом в ГРОС-БКК-1

В стратегии ГРОС-БКК-2 [5, 6] при обнаружении ошибок в случае повторного приёма информационного блока делается попытка их исправления с помощью корректирующей группы, полученной ранее, а в случае неудачи – попытка исправить этот информационный блок корректирующей группой из следующей попытки передачи. На рис. 2 приведён пример для стратегии ГРОС-БКК-2 (аналогично рис. 1).

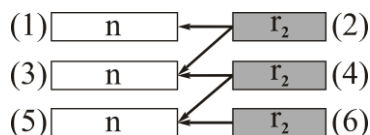


Рис. 2. Принцип исправления ошибок блочным кодом в ГРОС-БКК-2

В стратегии ГРОС-БКК-3 [5, 6] для исправления принятого с ошибками блока используются все полученные ранее корректирующие группы. Аналогично, при получении корректирующей группы делается попытка исправить с её помощью все полученные ранее информационные блоки. На рис. 3 также показан принцип исправления принятых блоков.

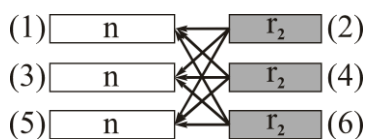


Рис. 3. Принцип исправления ошибок блочным кодом в ГРОС-БКК-3

С учётом того, что в [5] приведены результаты сравнения ГРОС-БКК-2 и ГРОС-БКК-3, использующие код БЧХ, где стратегия БКК-3 имеет небольшой выигрыш в сравнении с БКК-2, но реализация ГРОС БКК-3 требует привлечение больших вычислительных мощностей по сравнению со стратегиями БКК-2 и БКК-1, – ниже будут рассматриваться только стратегии БКК-1 и БКК-2.

3. Сравнение ГРОС с кодами БЧХ и РС

В качестве модели дискретного канала будем использовать канал, параметры которого задаются простой марковской цепью. Данная модель позволяет описать группирующий характер поражения элементов.

Модель предполагает наличие двух состояний дискретного канала. В одном из состояний ошибок не возникает. Будем называть такое состояние хорошим, или G-состоянием. Во втором состоянии ошибки возникают с вероятностью 1. Данное состояние назовем плохим, B-состоянием.

Изменение состояний модели определяется матрицей переходных вероятностей

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} P_{gg} & P_{gb} \\ P_{bg} & P_{bb} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Переходная вероятность P_{xy} – это вероятность перехода системы на следующем шаге в состояние y , если на текущем шаге она находилась в состоянии x . Данная матрица стохастичная, то есть сумма членов каждой строки равна единице $P_{gg} + P_{gb} = 1$, $P_{bg} + P_{bb} = 1$.

Финальные (предельные) вероятности нахождения в состояниях определяются выражениями

$$P_b = \frac{P_{gb}}{P_{bg} + P_{gb}}, \quad P_g = \frac{P_{bg}}{P_{bg} + P_{gb}}, \quad (2)$$

средние длины хорошего и плохого состояний канала

$$D_g = \frac{1}{P_{gb}}, \quad D_b = \frac{1}{P_{bg}}. \quad (3)$$

Для сравнения систем в среде Simulink были разработаны модели для первых двух стратегий декодирования, использующие коды БЧХ и РС (подробно рассмотрены в [1, 2]). Для исправления ошибок использовался код БЧХ (239, 255) и аналогичный ему код РС(42, 40). Код РС(42, 40) можно считать эквивалентным, поскольку он работает в поле GF(64), т.е. в двоичных символах соответствие k информационных элементов $k = 40 \cdot 6 = 240$ и n кодовых $n = 42 \cdot 6 = 252$ соразмерно. Кроме того, приведены результаты использования кода РС(44,40), исправляющего две ошибки, но с несколько большей избыточностью, чем код БЧХ (239, 255) (для РС(44, 40) $k = 40 \cdot 6 = 240$ и $n = 44 \cdot 6 = 264$). На рис. 4 показаны зависимости вероятностей успешной доставки от допустимого числа попыток для стратегий БКК-1,2. Параметры канала, используемого при моделировании: $P_{gg} = 0.99$, $P_{bb} = 0.9$.

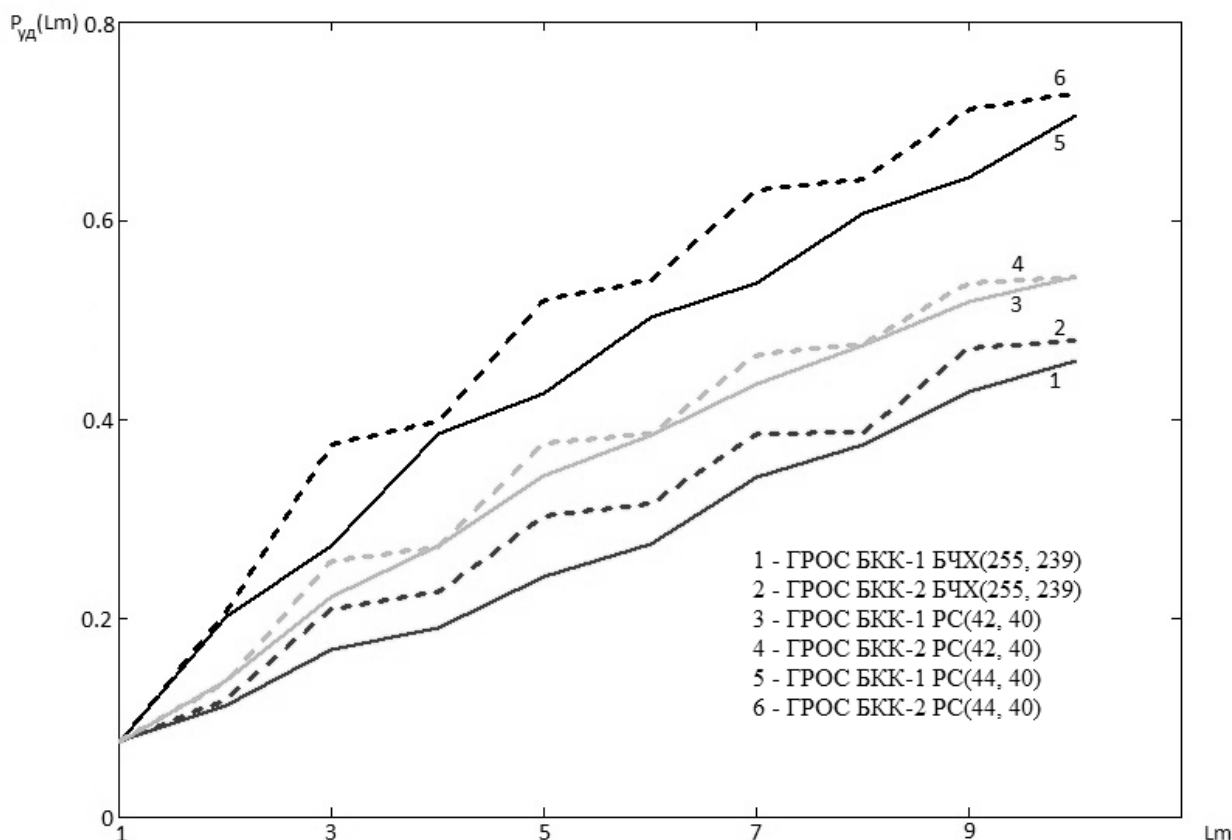


Рис. 4. Зависимости вероятностей успешной доставки от допустимого числа попыток

Из рис. 4 видна целесообразность использования системы с кодом РС при группировании ошибок как для стратегии БКК-1, так и для стратегии БКК-2.

4. Методики расчёта вероятностно-временных характеристик для стратегий декодирования систем ГРОС БКК

В работе [4] подробно изложено получение выражений определения вероятности успешной доставки блока в зависимости от допустимого числа попыток для стратегии БКК-1. Приведём только конечные выражения.

В дальнейшем будем полагать:

Lm – число переспросов;

$P_{уд}$ – вероятность успешной доставки блока;

$P(0, n)$ – вероятность правильного приёма информационного блока;

P_e – вероятность неправильного приёма блока;

$P_{и}$ – вероятность исправления блока;

$P_{ни}$ – вероятность неисправления блока.

$$P_{0\ddot{a}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\frac{Lm-1}{2}-1} \left[P(0,n)P_e^l P_{i\ddot{e}}^l + P_e P_e^{l+1} P_{i\ddot{e}}^l \right], & \text{åñë Lm - ÷, òí â} \\ P(0,n), & \text{åñë Lm = 1} \\ P(0,n) + \sum_{l=0}^{\frac{Lm-1}{2}-1} \left[P_e P_e^{l+1} P_{i\ddot{e}}^l + P(0,n)P_e^{l+1} P_{i\ddot{e}}^{l+1} \right], & \text{åñë Lm - í â ÷, òí â Lm ≠ 1} \end{cases} \quad (4)$$

В работе [5] изложена методика для стратегии БКК-2. Подход к изменению методики при использовании кодов РС аналогичен подходу к изменению модели для ГРОС БКК-1, но, ввиду достаточной сложности математических выражений, нет необходимости приводить её описание в рамках данной работы.

Для использования математических моделей БКК-1,2 применительно к системам ГРОС БККРС необходимо определить следующие параметры: вероятность правильного приёма информационного блока ($P(0,n)$), вероятность неправильного приёма блока ($P_e = 1 - P(0,n)$), вероятность исправления блока ($P_{и}$) и вероятность неисправления ($P_{ни} = 1 - P_{и}$). Поскольку коды РС работают не с двоичными элементами, а с элементами расширений полей Галуа, – в нашем случае GF(64) – нахождение этих параметров требует нетривиального подхода.

Так, для кода РС в GF(64) одним элементом поля является шесть двоичных элементов ($2^6 = 64$). Поэтому целесообразно на уровне кодера производить свёртку дискретного канала, обращая внимание на следующее свойство. Поражение элемента поля GF(64) происходит, если хотя бы один из шести двоичных элементов принят неправильно. То есть в свернутом канале безошибочный элемент соответствует случаю, когда все шесть двоичных элементов приняты верно, иначе элемент поля считается поражённым (на рис. 5 приведена иллюстрация процесса свёртки канала).

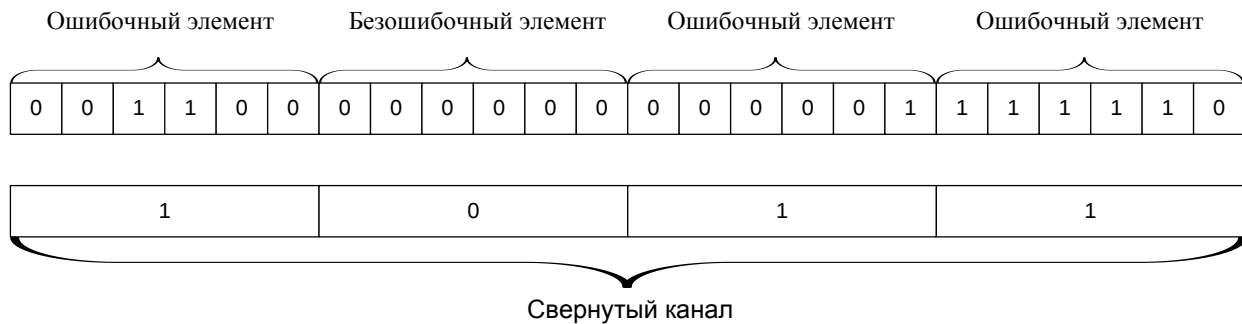


Рис. 5. Пример свёртки канала

Ввиду того что процесс поражения слотов исходного дискретного канала является группирующимся, в свернутом канале группирования сохраняются. Однако параметры, описывающие процессы на уровне свернутого канала, отличаются от исходных. В связи с вышесказанным возникает задача определения параметров дискретного канала после свёртки. Ниже приведено её решение.

5. Определение параметров свернутого канала

Финальная вероятность хорошего состояния свернутого канала будет равна вероятности безошибочного приёма элемента поля GF(64) и определится как

$$Q_g = P_g \cdot P_{gg}^{m-1}, \quad (7)$$

где P_g и P_{gg} – параметры исходного канала, Q_g – финальная вероятность правильного приёма блока в свёрнутом канале, m – размерность расширения поля $GF(2^m)$.

Найдя финальную вероятность хорошего состояния в свёрнутом канале, можем найти вероятность сохранения хорошего состояния из следующего соотношения

$$Q_{gg} = P_{gg} \cdot \frac{Q_g}{P_g}. \quad (8)$$

Поскольку матрица переходных вероятностей стохастическая, то

$$Q_{gb} = 1 - Q_{gg}.$$

Зная вероятность перехода из хорошего состояния в плохое и финальную вероятность хорошего состояния, определим вероятность перехода из плохого состояния в хорошее.

Финальная вероятность хорошего состояния – $Q_g = \frac{Q_{bg}}{Q_{bg} + Q_{gb}}$, откуда

$$Q_{bg} = \frac{Q_{gb} \cdot Q_g}{1 - Q_g}, \quad (9)$$

$$Q_{bb} = 1 - Q_{bg}.$$

Определив параметры свёрнутого канала, можно переходить к следующему этапу – нахождению вероятности исправления ошибок в блоке.

6. Определение вероятности исправления ошибок в блоке

В предыдущем пункте была предложена методика определения параметров свёрнутого канала. Следующий этап решения задачи – нахождение вероятности исправления ошибок в блоке P_n .

Исправление возможно при условии, что общее количество ошибок в блоке не превышает исправляющей способности кода. В нашем примере код РС(44,40) исправляет 2 ошибки в поле $GF(64)$, а РС(42,40) – одну шестибитовую ошибку, поэтому ниже рассмотрим получение выражений вероятностей однократной $P(1, n)$ и двукратной $P(2, n)$ ошибок в блоке длиной n элементов. Для нахождения ошибок большей кратности можно воспользоваться алгоритмами, приведёнными в [3].

При передаче блока длиной n элементов в канале с группированием ошибок возможна многократная смена состояния канала. При фиксированной величине ошибок i количество соответствующих векторов состояния канала определяется как число сочетаний из n по i . В отличие от канала с независимыми ошибками, в данном случае каждый вектор будет характеризоваться своей вероятностью. Таким образом, искомая величина $P(i, n)$ представляет собой сумму всех векторов состояния канала длины n и веса i . Сначала рассмотрим нахождение вероятности $P(1, 5)$, после чего получим выражение для общего случая. Всего возможных состояний канала будет $C_5^1 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5$. Все векторы состояний канала и соответствующие им вероятности приведены в табл. 1. Вероятности, соответствующие векторам состояний, определяются финальными и переходными вероятностями простой марковской цепи.

Таблица 1. Возможные состояния канала

Состояние	Вектор состояния канала	Вероятность вектора состояния канала
1	10000	$Q_b Q_{bg} Q_{gg} Q_{gg} Q_{gg}$
2	01000	$Q_g Q_{gb} Q_{bg} Q_{gg} Q_{gg}$
3	00100	$Q_g Q_{gg} Q_{gb} Q_{bg} Q_{gg}$
4	00010	$Q_g Q_{gg} Q_{gg} Q_{bg} Q_{gg}$
5	00001	$Q_g Q_{gg} Q_{gg} Q_{gg} Q_{gb}$

Как видно из табл. 1, вероятности только двух векторов отличаются между собой, остальные – равны. Тогда выражение для общего случая примет вид:

$$P(1, n) = Q_b \cdot Q_{bg} \cdot Q_{gg}^{n-2} + Q_g \cdot Q_{gb} \cdot Q_{gg}^{n-2} + (n-2) \cdot Q_g \cdot Q_{gb} \cdot Q_{bg} \cdot Q_{gg}^{n-3}. \quad (10)$$

В случае двукратного поражения блока конечное выражение может быть определено аналогичным способом:

$$\begin{aligned} P(2, n) = & Q_b \cdot Q_{bb} \cdot Q_{bg} \cdot Q_{gg}^{n-3} + Q_b \cdot Q_{bg} \cdot Q_{gb} \cdot Q_{gg}^{n-3} + (n-3) \cdot Q_b \cdot Q_{bg}^2 \cdot Q_{gb} \cdot Q_{gg}^{n-4} \\ & + Q_g \cdot Q_{gg}^{n-3} \cdot Q_{gb} \cdot Q_{bb} + (n-3) \cdot Q_g \cdot Q_{gb}^2 \cdot Q_{bg} \cdot Q_{gg}^{n-4} + \\ & + (n-3) \cdot Q_g \cdot Q_{gb} \cdot Q_{bb} \cdot Q_{bg} \cdot Q_{gg}^{n-4} + \frac{n^2 - 7 \cdot n + 12}{2} \cdot Q_g \cdot Q_{gb}^2 \cdot Q_{bg}^2 \cdot Q_{gg}^{n-5}. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, вероятность исправления блока для кода РС(44,40), исправляющего, как говорилось выше, две ошибки $P_{\text{и}} = P(1, n) + P(2, n)$. Для кода РС(42,40) $P_{\text{и}} = P(1, n)$. Вероятность неисправления для обоих случаев, соответственно $P_{\text{ни}} = 1 - P_{\text{и}}$.

Таким образом, получены все необходимые выражения для нахождения вероятности успешной доставки блока применительно к системам ГРОС, использующим коды РС.

7. Сравнение результатов математической и имитационной моделей

Для проверки корректности полученных выражений было проведено имитационное моделирование. Результаты сравнения математической и имитационной моделей для параметров исходного канала $P_{gg} = 0.99$, $P_{bb} = 0.9$ приведены на рис. 6. В процессе моделирования по каналу передавалось 500000 блоков.

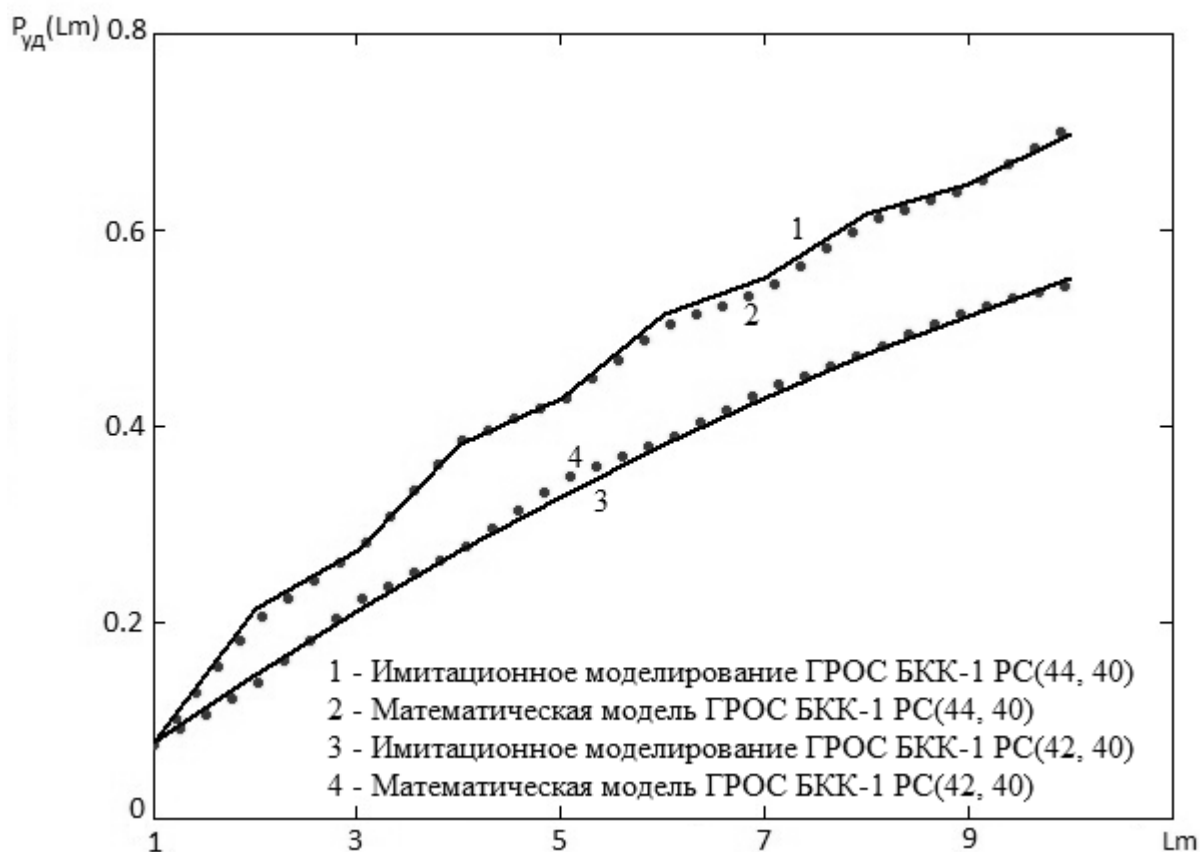


Рис. 6. Зависимости вероятностей успешной доставки от допустимого числа попыток (сравнение математической и имитационной моделей)

Как видно из рис. 6, результаты сравнения математической и имитационной моделей в достаточной степени совпадают, что подтверждает состоятельность полученных выражений. Если говорить об относительной скорости передачи для данного случая – к примеру, при ограничении в пять переспросов, то её значение составит 0.208. Однако стоит отметить, что в работе ставилась задача не синтеза оптимальной системы с ГРОС, а получения математических выражений, позволяющих точно описать такую систему для случая использования кодов Рида – Соломона. Очевидно, что для канала с меньшей вероятностью ошибки относительная скорость передачи существенно возрастёт. Так, к примеру, при $P_{gg} = 0.999$, $P_{bb} = 0.9$ и $Lm = 5$ показатель относительной скорости равен 0.78.

В данной работе рассмотрен один из возможных случаев построения систем с гибридной связью, использующих коды Рида – Соломона. Отметим, что предложенные выражения для определения вероятностно-временных характеристик системы с ГРОС могут быть использованы применительно к любым кодам Рида –Соломона, а не только для рассмотренных рабочих примеров (42,40) и (44, 40).

Литература

1. Clarke C. K. P. Reed-Solomon Error Correction, BBC R&D White Paper № 031, 2002. – 47 p.
2. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки: Пер. с англ./ Под ред. К.Ш. Зигангирова.– М.: Мир, 1986.– 576 с.

3. Мелентьев О.Г. Теоретические аспекты передачи данных по каналам с группирующимися ошибками /под редакцией профессора В.П. Шувалова – М.: Горячая линия –Телеком, 2007. –253с.:ил.
4. Мелентьев О.Г. Оценка эффективности систем передачи данных с гибридной обратной связью // Электросвязь. 2005. №7. – С. 29-31
5. Мелентьев О.Г., Шапин А.Г. Оценка эффективности модифицированных алгоритмов декодирования в системах передачи данных с гибридной обратной связью, «Электросвязь» // Электросвязь. 2008. №8. – С. 51-53
6. Шапин А.Г. Результаты моделирования систем передачи данных с гибридной обратной связью и различными типами кодирования // Электросвязь. 2010. №2. – С. 44-47

*Статья поступила в редакцию 4.03.2011;
переработанный вариант — 12.12.2011*

Лямин Никита Владимирович

Студент V курса факультета АЭС СибГУТИ (630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86),
e-mail: sibsutispds@gmail.com.

Клейко Денис Вячеславович

Студент V курса факультета АЭС СибГУТИ (630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86),
e-mail: kley3@yandex.ru.

Шапин Алексей Геннадьевич

Ассистент кафедры ПДСиМ СибГУТИ (630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86),
e-mail: alexshapin@gmail.com.

Mathematical Model of HARQ System Using Reed-Solomon Codes

N. Lyamin, D. Kleyko, A. Shapin

In this paper we introduce expressions for determination of the probabilistic–time characteristics of HARQ systems using Reed–Solomon codes for the case when discrete channel is described with a simple Markov chain. Simulation modeling with similar systems that use BCH codes was made. Analytical results are compared with the results of the simulation modeling.

Keywords: HARQ systems, Reed–Solomon codes, simple Markov chain, discrete channel aggregation.