

Ортогональные методы взвешенных невязок в задачах теплопроводности для многослойных конструкций

Р. М. Клеблеев

Самарский государственный технический университет (СамГТУ)

Аннотация: На основе метода Галеркина, используя дополнительные краевые условия (ДКУ), получено аналитическое решение задачи теплопроводности для двухслойной пластины. ДКУ находятся так, чтобы их выполнение было адекватно выполнению исходных уравнений в точках границы. Выполнение уравнений в точках границы приводит к их выполнению во всем диапазоне пространственной координаты. Использование ДКУ позволяет получать цепочные системы алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов решения. Уравнения этих систем имеют сильно разреженные хорошо обусловленные квадратные матрицы. В связи с чем их решения настолько упрощаются, что при большом числе приближений в общем виде следует решать систему лишь двух алгебраических уравнений. Наблюдается высокая точность нахождения собственных чисел, объясняемая применением особой конструкции ДКУ.

Ключевые слова: двухслойная пластина, метод Галеркина, дополнительные краевые условия, приближенное решение.

Для цитирования: Клеблеев Р. М. Ортогональные методы взвешенных невязок в задачах теплопроводности для многослойных конструкций // Вестник СибГУТИ. 2023. Т. 17, № 4. С. 89–96. <https://doi.org/10.55648/1998-6920-2023-17-4-89-96>.



Контент доступен под лицензией
Creative Commons Attribution 4.0
License

© Клеблеев Р. М., 2023

Статья поступила в редакцию 27.04.2023;
принята к публикации 16.08.2023.

1. Введение

Трудности нахождения точных решений краевых задач теплопроводности для многослойных тел обусловлены тем, что при определении собственных чисел возникает необходимость решения трансцендентного уравнения для собственных чисел задачи. Для получения его решения применяются численные методы [1 – 4]. Получение приближенных аналитических решений связано с использованием методов, основанных на системах координатных функций, удовлетворяющих всем краевым условиям (включая условия сопряжения) [3]. Однако получаемые таким путём решения плохо сходятся с увеличением числа приближений, что объясняется малой точностью определения собственных чисел. Ниже используется метод, связанный с построением дополнительных краевых условий (ДКУ) [5, 6], выполняемых лишь в точках границы, исключая точки контакта.

2. Математическая постановка задачи

Рассмотрим получение решения задачи теплопроводности для двухслойной пластины (рис. 1).

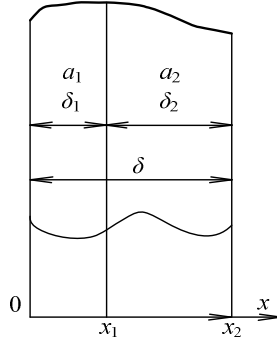


Рис. 1. Схема теплообмена

$$\frac{\partial T_i(x, t)}{\partial t} = a_i \frac{\partial^2 T_i(x, t)}{\partial x^2}; \quad (1)$$

$$(t > 0; \quad x_{i-1} < x < x_i; \quad i = 1, 2; \quad x_0 = 0; \quad x_2 = \delta);$$

$$T_i(x, 0) = T_0; \quad (2)$$

$$\partial T_1(0, t) / \partial x = 0; \quad (3)$$

$$T_1(x_1, t) = T_2(x_1, t); \quad (4)$$

$$\lambda_1 \partial T_1(x_1, t) / \partial x = \lambda_2 \partial T_2(x_1, t) / \partial x; \quad (5)$$

$$\partial T_2(x_2, t) / \partial x = 0, \quad (6)$$

где T , x , t – температура, координата, время;

a , λ_i – коэффициенты температуропроводности и теплопроводности;

$\delta = \delta_1 + \delta_2$ – суммарная толщина двух слоев;

δ_1 , δ_2 – толщины слоёв; T_0 – начальная температура;

T_c – температура при $x = x_2 = \delta$.

Обозначим

$$\Theta_i(\xi, Fo) = \frac{T_i(x, t) - T_c}{T_0 - T_c}, \quad (i = 1, 2); \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad Fo = \frac{a_1 t}{\delta^2}; \quad \xi_1 = \frac{x_1}{\delta}; \quad \xi_2 = \frac{x_2}{\delta}, \quad (7)$$

где Θ_i , $(i = 1, 2)$, ξ , Fo , – соответственно безразмерные температура, координата, время.

Учитывая (7), задача (1) – (6) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \Theta_i(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{a_i}{a_1} \frac{\partial^2 \Theta_i(\xi, Fo)}{\partial \xi^2}; \quad (8)$$

$$(Fo > 0; \quad \xi_{i-1} < \xi < \xi_i; \quad i = 1, 2; \quad \xi_0 = 0; \quad \xi_2 = 1);$$

$$\Theta_i(\xi, 0) = 1; \quad (9)$$

$$\partial \Theta_1(0, Fo) / \partial \xi = 0; \quad (10)$$

$$\Theta_1(\xi_1, Fo) = \Theta_2(\xi_1, Fo); \quad (11)$$

$$\partial \Theta_1(\xi_1, Fo) / \partial \xi = \lambda \partial \Theta_2(\xi_1, Fo) / \partial \xi; \quad (12)$$

$$\Theta_2(1, Fo) = 0, \quad (13)$$

где $\lambda = \lambda_2 / \lambda_1$.

3. Получение аналитического решения

Решение задачи (8) – (13) примем в виде произведения

$$\Theta_i(\xi, Fo) = \phi_i(Fo)\Psi_i(\xi), \quad (i = 1, 2), \quad (14)$$

где $\phi_i(Fo)$, $\Psi_i(\xi)$ – функции, зависящие от времени и координаты.

Подставив (14) в (8), имеем

$$d\phi_i(Fo)/dFo + \mu\phi_i(Fo) = 0; \quad (15)$$

$$ad^2\Psi_i(\xi)/d\xi^2 + \mu\Psi_i(\xi) = 0, \quad (16)$$

где μ – постоянная; $a = a_i/a_1$, $(i = 1, 2)$.

Интеграл уравнения (15) имеет вид

$$\phi_i(Fo) = A \exp(-\mu Fo), \quad (17)$$

где A – постоянная интегрирования.

Подставив (14) в (10) – (13), находим

$$d\Psi_1(0)/d\xi = 0; \quad (18)$$

$$\Psi_1(\xi_1) = \Psi_2(\xi_1); \quad (19)$$

$$d\Psi_1(\xi_1)/d\xi = \lambda d\Psi_2(\xi_1)/d\xi; \quad (20)$$

$$\Psi_2(1) = 0. \quad (21)$$

Решения для уравнений (16) для каждого из слоев представляются в виде

$$\Psi_1(\xi) = 1 + \sum_{k=1}^n C_k \eta_k(\xi); \quad (22)$$

$$\Psi_2(\xi) = \sum_{k=1}^n B_k \gamma_k(\xi), \quad (23)$$

где C_k , B_k – постоянные; $\eta_k(\xi) = \xi^{2k}$, $\gamma_k(\xi) = 1 - \xi^{2k-1}$ – координатные функции ($k = \overline{1, n}$).

Отметим, что условия (18), (21) решениями (22), (23) выполняются. Константы C_k , B_k находятся из (19), (20) и ДКУ, определяемых в точках $\xi = \xi_0 = 0$ и $\xi = \xi_2 = 1$. Они находятся из условия, чтобы в указанных точках удовлетворялись уравнения (16). В [5, 7] математически доказывается, что выполнение уравнений на границах приводит к их выполнению и внутри слоев.

В точке $\xi = 0$ уравнение (16) (при $i = 1$) будет выполнено, если ДКУ для этой точки определять в виде

$$\frac{d^2\Psi_1(0)}{d\xi^2} + \mu\Psi_1(0) = 0. \quad (24)$$

Продифференцировав (24) по ξ , находим

$$\frac{d^3\Psi_1(0)}{d\xi^3} + \mu \frac{d\Psi_1(0)}{d\xi} = 0. \quad (25)$$

Соотношение (25) с учётом (18) приводится ко второму ДКУ в точке $\xi = 0$

$$\frac{d^3\Psi_1(0)}{d\xi^3} = 0. \quad (26)$$

Очевидно, что ДКУ (26) решением (22) выполняется. Продифференцируем (24) дважды по ξ

$$\frac{d^4\Psi_1(0)}{d\xi^4} + \mu \frac{d^2\Psi_1(0)}{d\xi^2} = 0. \quad (27)$$

Соотношение (27), учитывая (24), приводится к следующему ДКУ

$$\frac{d^4 \Psi_1(0)}{d\xi^4} + \mu^2 \Psi_1(0) = 0. \quad (28)$$

Продифференцируем (24) три раза по ξ

$$\frac{d^5 \Psi_1(0)}{d\xi^5} + \mu \frac{d^3 \Psi_1(0)}{d\xi^3} = 0. \quad (29)$$

Соотношение (29), учитывая (26), приводится к ДКУ вида

$$\frac{d^5 \Psi_1(0)}{d\xi^5} = 0. \quad (30)$$

Очевидно, что ДКУ (30) решением (22) удовлетворяется.

Следовательно, все ДКУ с нечётными номерами производных решением (22) выполняются. Общая формула ДКУ с чётными номерами производных, учитывая, что $\Psi_1(0) = 1$ (так как $d\Psi_i(0)/d\xi = 0$, то $\Psi_1(0) = \text{const} = 1$), имеет вид

$$\frac{d^{2i} \Psi_1(0)}{\partial \xi^{2i}} = \pm \mu^i; \quad (i = \overline{1, n}), \quad (31)$$

где «плюс» – четные i , «минус» – нечетные.

В точке $\xi = 1$ уравнение (16) (при $i = 2$) будет выполнено, если ДКУ здесь определять в виде

$$a \frac{d^2 \Psi_2(1)}{d\xi^2} + \mu \Psi_2(1) = 0. \quad (32)$$

ДКУ (32), учитывая (21), упрощается и принимает вид

$$\frac{d^2 \Psi_2(1)}{d\xi^2} = 0. \quad (33)$$

Так как в точке $\xi = 1$ имеем граничное условие первого рода (21), то ограничимся выполнением в этой точке лишь одного ДКУ вида (33).

Решение в первом приближении находится подстановкой (22), (23) (при трех членах рядов) в (19), (20), (31) (при $i = 1, 2, 3$) и (33). Относительно C_k , B_k ($k = 1, 2, 3$) имеем цепочную систему, включающую шесть алгебраических уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} 1 + C_1 \xi_1^2 + C_2 \xi_1^4 + C_3 \xi_1^6 &= B_1(1 - \xi_1) + B_2(1 - \xi_1^3) + B_3(1 - \xi_1^5); \\ 2C_1 \xi_1 + 4C_2 \xi_1^3 + 6C_3 \xi_1^5 &= -\lambda(B_1 + 3B_2 \xi_1^2 + 5B_3 \xi_1^4); \\ (2C_1 + 12C_2 \xi^2 + 30C_3 \xi^4)_{\xi=0} &= -\mu; \\ (24C_2 + 360C_3 \xi^2)_{\xi=0} &= \mu^2; \\ 720C_3 &= -\mu^3; \\ (6B_2 \xi + 20B_3 \xi^3)_{\xi=1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Ввиду цепочности из системы уравнений (34) можно найти следующие коэффициенты (примем $\lambda = \lambda_1 / \lambda_2 = 1$)

$$C_1 = -0.5\mu; \quad C_2 = \mu^2 / 24; \quad C_3 = -\mu^3 / 720; \quad B_2 = -(10/3)B_3. \quad (35)$$

Подставляя полученные коэффициенты в первые два уравнения системы (34), для неизвестных B_1 , B_3 имеем систему двух уравнений, решение которой будет

$$B_1 = \frac{105 \cdot \mu}{328} - \frac{35 \cdot \mu^2}{5248} + \frac{7 \cdot \mu^3}{125952} + \frac{187\mu(\mu^2 - 80 \cdot \mu + 1920)}{314880} - \frac{105}{41};$$

$$B_3 = \frac{6\mu}{41} - \frac{\mu^2}{328} - \frac{\mu^3}{39360} - \frac{\mu(\mu^2 - 80 \cdot \mu + 1920)}{6560} + \frac{48}{41}.$$

Используя ортогональный метод Галеркина, составим интеграл невязки уравнений (16)

$$\int_0^{\xi_1} \left[\sum_{k=1}^n C_k \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial \xi^2} + \mu \left(1 + \sum_{k=1}^n C_k \eta_k \right) \right] d\xi + \int_{\xi_1}^1 \left[\sum_{k=1}^n B_k \frac{\partial^2 \gamma_k}{\partial \xi^2} + \mu \left(1 + \sum_{k=1}^n B_k \gamma_k \right) \right] d\xi = 0. \quad (36)$$

Подставляя (22), (23), учитывая найденные значения C_k , B_k ($k = 1, 2, 3$), в (36), после нахождения интегралов для μ_k имеем степенное уравнение

$$1.557926\mu - 0.101562\mu^2 + 0.002103\mu^3 - 0.000018\mu^4 - 3.29268 = 0. \quad (37)$$

Решение уравнения (37) будет

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 2.5004259; & \mu_2 &= 21.985176; \\ \mu_3 &= 45.907 + 34.69i; & \mu_4 &= 45.907 - 34.69i. \end{aligned}$$

Точные величины двух первых собственных чисел: $\mu_1 = 2.467401$; $\mu_2 = 22.2068$. Мнимые корни μ_3 , μ_4 не используются.

Для уточнения собственных чисел потребуем удовлетворения условий ортогональности невязок уравнения (36) к функциям $\psi_1(\xi)$, $\psi_2(\xi)$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\xi_1} \left[\sum_{k=1}^n C_k \frac{\partial^2 \eta_k}{\partial \xi^2} + \mu \left(1 + \sum_{k=1}^n C_k \eta_k \right) \right] \psi_1(\xi) d\xi + \\ & + \int_{\xi_1}^1 \left[\sum_{k=1}^n B_k \frac{\partial^2 \gamma_k}{\partial \xi^2} + \mu \left(1 + \sum_{k=1}^n B_k \gamma_k \right) \right] \psi_2 d\xi = 0, \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (38)$$

Отсюда относительно μ_k получаем алгебраический полином седьмой степени, из решения которого находим: $\mu_1 = 2.46787$; $\mu_2 = 22.2162$. Как видно, первое и второе собственные числа существенно уточнились.

Во втором приближении ко всем использованным в первом приближении основным граничным условиям и ДКУ добавляется ещё ДКУ (31) (при $i = 4, 5$). Ограничиваясь четырьмя членами рядов (22), (23), для неизвестных C_k , B_k ($k = \overline{1, 4}$) будем иметь цепочную систему восьми алгебраических уравнений. Ввиду цепочности шесть неизвестных находятся вне системы. Оставшиеся коэффициенты находятся из решения системы двух уравнений.

Подставляя (17), (22), (23) в (14), получаем

$$\Theta_1(\xi, Fo) = \sum_{j=1}^2 \left[A_j \exp(-\mu_j Fo) \left(1 + \sum_{k=1}^3 C_k \eta_k(\xi) \right) \right]; \quad (39)$$

$$\Theta_2(\xi, Fo) = \sum_{j=1}^2 \left[A_j \exp(-\mu_j Fo) \left(1 + \sum_{k=1}^3 B_k \gamma_k(\xi) \right) \right]. \quad (40)$$

Неизвестные A_j ($j = 1, 2$) находятся из невязки начального условия (9) путем выполнения условия ее ортогональности к функциям $\eta_k(\xi)$ и $\gamma_k(\xi)$ ($k = 1, 2$)

$$\int_0^{\xi_1} [\Theta_1(\xi, Fo) - 1] \eta_k(\xi) d\xi + \int_{\xi_1}^1 [\Theta_1(\xi, Fo) - 1] \gamma_k(\xi) d\xi = 0; \quad (k = 1, 2). \quad (41)$$

Подставим (39), (40) в (41)

$$\int_0^{\xi_1} \left[\sum_{i=1}^2 A_j \left(1 - \sum_{k=1}^3 C_k \eta_k(\xi) \right) \right] \eta_k(\xi) d\xi + \int_{\xi_1}^1 \left[A_j \left(1 + \sum_{k=1}^3 B_k \gamma_k(\xi) \right) \right] \gamma_k(\xi) d\xi = 0. \quad (42)$$

Соотношение (42) является системой, включающей два алгебраических уравнения относительно A_j ($j=1, 2$). Её решение: $A_1 = 1.338854$; $A_2 = -0.310830$.

4. Анализ полученных результатов

Из расчетов по соотношениям (39), (40) (для $\lambda=1$, $a=1$ – однослойная система) следует, что при $0.1 \leq Fo < \infty$ рассогласование с точным решением не более 4 % (рис. 2).

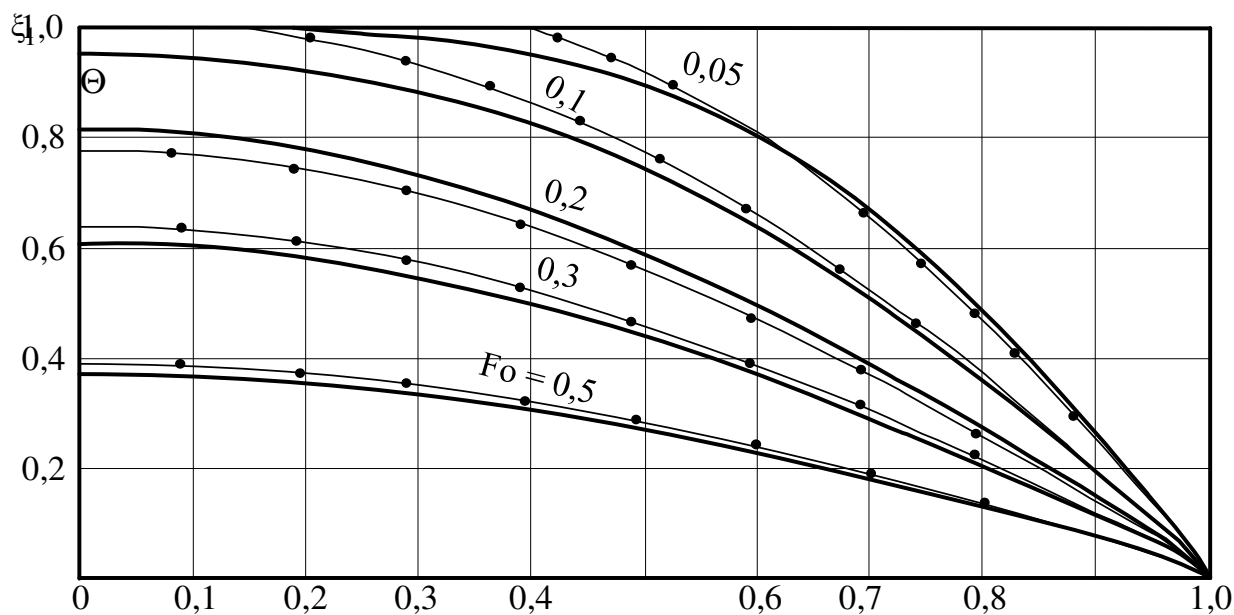


Рис. 2. Распределение температуры —●— по формулам (39), (40);
— — — — — точное решение [1, 2]

5. Заключение

1. Получено аналитическое решение краевой задачи теплопроводности для двухслойной конструкции на основе использования ДКУ в ортогональных методах взвешенных невязок (метод Галеркина).

2. ДКУ находятся путем выполнения исходных уравнений в точках границы, что приводит к их удовлетворению и внутри слоев.

Литература

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
2. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
3. Карташов Э. М., Кудинов В. А., Калашников В. В. Теория тепломассопереноса: решение задач для многослойных конструкций. М.: Издательство Юрайт, 2018. 435 с.

4. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высшая школа, 1978. 328 с.
5. *Кудинов И. В., Котова Е. В., Кудинов В. А.* Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искоемых функций // Сибирский журнал вычислительной математики. 2019. Т. 22, № 2. С.153–165.
6. *Кудинов В. А., Аверин Б. В., Стефанюк Е. В.* Теплопроводность и термоупругость в многослойных конструкциях. М.: Высшая школа, 2008. 305 с.
7. *Федоров Ф. М.* Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 2000. 220 с.

Клеблеев Руслан Мухтарович

Старший преподаватель кафедры теоретических основ теплотехники и гидромеханики, Самарский государственный технический университет (СамГТУ, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244), e-mail: uio1123@list.ru, ORCID ID: 0000-0002-6944-8503.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Orthogonal Methods of Weighted Residuals in Thermal Conductivity Problems for Multilayer Structures

Ruslan M. Klebleev

Samara State Technical University (SamSTU)

Abstract: An analytical solution of the heat conduction problem for a two-layer plate based on the Galerkin method and usage of additional boundary conditions (ABC) is obtained. The ABCs are found in such a way that their implementation is to be adequate to the implementation of the original equations at the boundary points. Execution of equations at boundary points leads to their execution over the entire range of spatial coordinates. The use of ABC allows us to obtain chain systems of algebraic equations for unknown solution coefficients. The equations of these systems have highly sparse well-conditioned square matrices. In this connection, their solutions are so simplified that with a large number of approximations, in general form, a system of only two algebraic equations should be solved. A high accuracy of finding the eigenvalues is observed that is explained by the use of a special ABC design.

Keywords: two-layer plate, Galerkin method, additional boundary conditions, approximate solution.

For citation: Klebleev R. M. Orthogonal methods of weighted residuals in thermal conductivity problems for multilayer structures (in Russian). *Vestnik SibGUTI*, 2023, vol. 17, no. 4, pp. 89-96. <https://doi.org/10.55648/1998-6920-2023-17-4-89-96>.



Content is available under the license
Creative Commons Attribution 4.0
License

© Klebleev R. M., 2023

The article was submitted: 27.04.2023;
accepted for publication 16.08.2023.

References

1. Lykov A. V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of thermal conductivity]. Moscow, Vysshaya shkola, 1967. 600 p.
2. Kartashov E. M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids]. Moscow, Vysshaya shkola, 2001. 550 p.
3. Kartashov E. M., Kudinov V. A., Kalashnikov V. V. *Teoriya teplomassoperenosa: reshenie zadach dlya mnogoslownykh konstruksii* [Theory of heat and mass transfer: solving problems for multilayer structures]. Moscow, Yurait, 2018. 435 p.
4. Belyaev N. M., Ryadno A. A. *Metody nestatsionarnoi teploprovodnosti* [Methods of unsteady thermal conductivity]. Moscow, Vysshaya shkola, 1978. 328 p.
5. Kudinov I. V., Kotova E. V., Kudinov V. A. Metod polucheniya analiticheskikh reshenii kraevykh zadach na osnove opredeleniya dopolnitel'nykh granichnykh uslovii i dopolnitel'nykh iskomykh funktsii [A method for obtaining analytical solutions to boundary value problems based on determining additional boundary conditions and additional required functions]. *Siberian Journal of Computational Mathematics*, Novosibirsk, 2019, vol. 22, no. 2, pp. 153-165.
6. Kudinov V. A., Averin B. V., Stefanyuk E. V. *Teploprovodnost' i termouprugost' v mnogoslownykh konstruksiyakh* [Thermal conductivity and thermoelasticity in multilayer structures]. Moscow, Vysshaya shkola, 2008. 305 p.
7. Fedorov F. M. *Granichnyi metod resheniya prikladnykh zadach matematicheskoi fiziki* [Boundary method for solving applied problems of mathematical physics]. Novosibirsk, Nauka, 2000. 220 p.

Ruslan M. Klebleev

Senior lecturer of the Department of Theoretical Foundations of Heat Engineering and Fluid Mechanics, Samara State Technical University (SamSTU, Russia, 443100, Samara, Molodogvardeyskaya St., 244), e-mail: uio1123@list.ru, ORCID ID: 0000-0002-6944-8503.