DOI: 10.55648/1998-6920-2024-18-1-40-47 УДК 004.272

Стохастическая модель функционирования вычислительных систем с накопителем при групповом обслуживании *

В. А. Павский[1], К. В. Павский[2,3]

[1] Кемеровский государственный университет (КемГУ)
[2] Сибирский гос. унив. телекоммуникаций и информатики (СибГУТИ)
[3] Институт физики полупроводников им. А. В. Ржанова СО РАН (ИФП СО РАН)

Аннотация: Для оценки потенциальных возможностей вычислительных систем используются показатели осуществимости решения задач. Эти показатели характеризуют качество работы системы с учетом её надежности и параметров поступающих задач. Одним из режимов работы вычислительной системы является режим обслуживания потоков задач. В силу особенностей этого режима при анализе функционирования вычислительные системы рассматривают как объект стохастический, который, в свою очередь, хорошо исследуется вероятностными методами. В работе предлагается математическая модель расчета показателей осуществимости решения задач на вычислительных системах с накопителем в режиме обслуживания потока задач. Построение модели выполнено в рамках теории массового обслуживания. Получены аналитические решения для оценки наполненности накопителя.

Ключевые слова: вычислительные системы, накопитель, показатели осуществимости решения задач, вероятность, теория массового обслуживания, групповое обслуживание.

Для цитирования: Павский В. А., Павский К. В. Стохастическая модель функционирования вычислительных систем с накопителем при групповом обслуживании // Вестник СибГУТИ. 2024. Т. 18, № 1. С. 40–47. https://doi.org/10.55648/1998-6920-2024-18-1-40-47.

Статья поступила в редакцию 11.10.2023;
переработанный вариант – 29.11.2023;
принята к публикации 01.12.2023.

1. Введение

Масштабируемые вычислительные системы (ВС) относятся к наиболее развитым быстродействующим вычислительным средствам вычислительной техники [1]. Эффективность функционирования ВС при решении задач, безусловно, определяется производительностью всех компонентов, способами организации их совместного функционирования, а также надежностью и живучестью систем [2, 3]. Поэтому разработка средств организации эффективного и надежного функционирования вычислительной техники относится к важным проблемам [4–6].

* Работа выполнена в рамках государственного задания № 071-03-2023-001 от 19.01.2023.

Для оценки потенциальных возможностей вычислительных систем используются показатели осуществимости решения задач [1]. Эти показатели характеризуют качество работы системы с учетом надежности и параметров поступающих задач.

В зависимости от сложности задач и характера их поступления выделяют следующие режимы работы вычислительной системы [1]:

– решение сложной задачи;
– обработка наборов задач;
– обслуживание потоков задач.

В силу особенностей таких задач и процесса их решения на ВС функционирование систем рассматривается как объект стохастический, который, в свою очередь, хорошо исследуется вероятностными методами [5, 6]. В работе предлагается математическая модель для расчета показателей осуществимости решения задач в режиме обслуживания потока задач на вычислительных системах с накопителем. Построение модели выполнено в рамках теории массового обслуживания [7, 8].

На рис. 1 представлена модель системы с накопителем, на который поступает поток задач. Из задач формируются пакеты определенного размера с последующей их обработкой на системе, где α – параметр интенсивности поступающих задач, а β – параметр интенсивности решения задач, зависящий от производительности ВС [1, 9]. В работе представлены аналитические решения для оценки загруженности накопителя в стационарном режиме функционирования вычислительной системы.

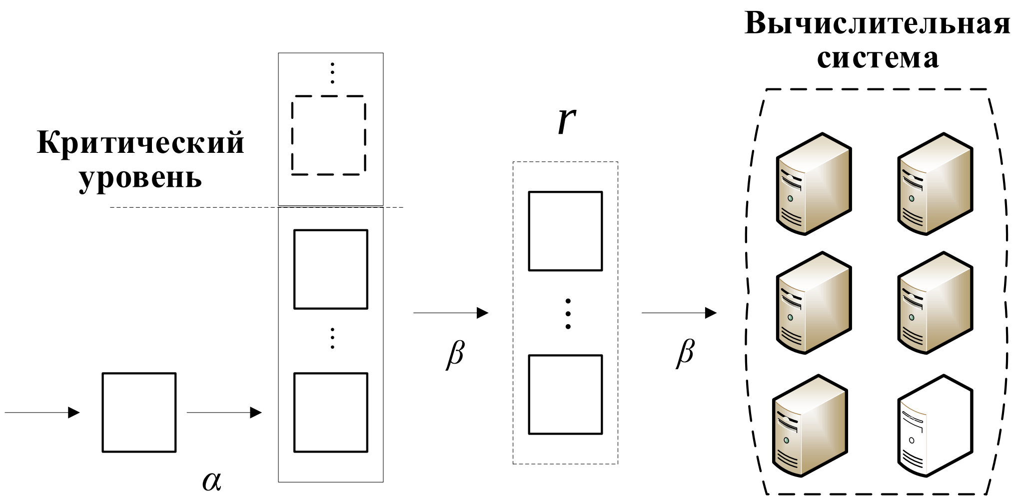

Рис. 1. Модель системы с накопителем

2. Математическая модель

Рассматривается система массового обслуживания (СМО), на которую поступает случайный поток требований с интенсивностью α. В каждый момент времени $t \in [0, \infty)$ СМО находится в одном из множества несовместных состояний C_k, где k – число требований, находящихся в системе, включая необслуженное (рис. 2). Группы из r требований обслуживаются с интенсивностью β, при этом $\alpha < r\beta$. Считаем, что все потоки событий – пуассоновские [1, 4].

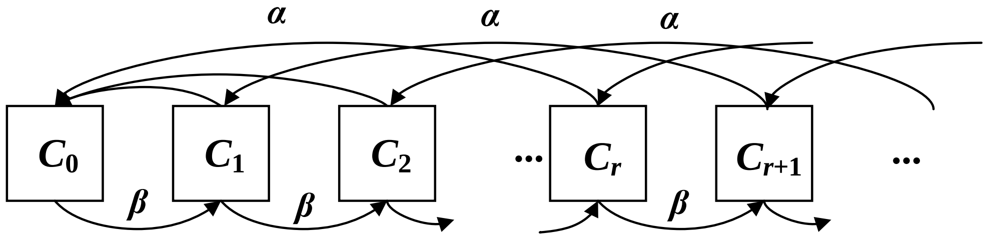

Рис. 2. Граф-схема состояний СМО

Пусть $P_k(t)$ – вероятность того, что в момент времени *t*, $t \in [0, \infty)$ СМО находится в состоянии C_k. В соответствии с граф-схемой составляется система дифференциальных уравнений и задаются начальные условия. Для переходного режима граф схема (рис. 2) формализуется системой дифференциальных уравнений [7], где неизвестными функциями являются вероятности $P_k(t)$ того, что СМО находится в состоянии C_k в момент времени *t*:

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \begin{cases} -\alpha P_0(t) + \beta\left(P_1(t) + P_2(t) + \ldots + P_r(t)\right), \text{ если } k = 0, \\ -(\alpha+\beta)P_k(t) + \beta P_{k+r}(t) + \alpha P_{k-1}(t), \text{ если } k > 0, \end{cases} \tag{1}$$

при начальных условиях $P_i(0) = 1$; $P_k(0) = 0$, $k \neq i$ и условии нормировки, которое является следствием формулировки модели:

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1.$$

Получены частные решения системы (1) при *r* = 1 и $r \to \infty$. В работе [1] приведено решение для *r* = 1. Решение системы (1) для $r \to \infty$ приводится далее. Вероятностные функции $P_0(t)$ находятся из линейного дифференциального уравнения первого порядка [10]:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\alpha P_0(t) + \beta \sum_{k=1}^{\infty} P_1(t).$$

Последующие функции $P_k(t)$ находятся рекуррентно из дифференциальных уравнений

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -(\alpha+\beta)P_k(t) + \alpha P_{k-1}(t) \text{ для } k > 1.$$

При $r \to \infty$ результатом решения системы (1) являются функции:

$$\begin{cases} P_k(t) = \dfrac{\beta\alpha^k}{(\alpha+\beta)^{k+1}} - \beta\alpha^k e^{-(\alpha+\beta)t} \textstyle\sum_{j=0}^{k} \dfrac{t^{k-j}}{(k-j)!(\alpha+\beta)^{j+1}}, \ k < i, \\ P_k(t) = \dfrac{\beta\alpha^k}{(\alpha+\beta)^{k+1}} + e^{-(\alpha+\beta)t}\left(\textstyle\sum_{j=0}^{k} \dfrac{\alpha^{k-j}}{(k-j)!} t^{k-j} - \beta\alpha^k \textstyle\sum_{j=0}^{k} \dfrac{t^{k-j}}{(k-j)!(\alpha+\beta)^{j+1}}\right), \ k \geq i. \end{cases}$$

Полученные для вероятностей $P_k(t)$ формулы позволяют оценить скорость вхождения системы в стационарный режим работы.

Рассмотрим стационарный режим функционирования СМО. Имеем по определению $p_k = \lim\limits_{t\to\infty} P_k(t)$, тогда из (1) получаем:

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha}\left(p_1 + p_2 + \ldots + p_r\right), \text{ если } k = 0, \\ \dfrac{1}{(\alpha+\beta)}\left(\beta p_{k+r} + \alpha p_{k-1}\right), \text{ если } k > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Для решения системы алгебраических уравнений (2) введем производящую функцию [7, 8, 11]:

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k z^k,\ \text{где} |z|\le 1. \tag{3}$$

Умножая каждое уравнение k системы (2) на z^k, k =0, 1, ... и суммируя их, получаем выражение для производящей функции:

$$F(z)=\left(\beta\sum_{k=0}^{r}p_k z^k-(\alpha+\beta)p_0 z^r\right)/\left(\alpha\left(z-(\alpha+\beta)p_0\right)z^r+\beta\right) \tag{4}$$

После стандартных преобразований над уравнением (4) получаем решение [7]:

$$F(z)=\frac{1-\dfrac{1}{z_0}}{1-\dfrac{z}{z_0}}, \tag{5}$$

где $z_0>1$ иррациональный корень многочлена степени $r+1$,

$$\alpha\left(z-(\alpha+\beta)p_0\right)z^r+\beta=0.$$

Учитывая, что $F(0)=p_0$, а также условие нормировки, для вероятностей p_k получаем представление:

$$p_k=p_0(1-p_0)^k,\quad k=0,1,2,\dots . \tag{6}$$

3. Оценка наполненности накопителя

Пусть $P_{\text{отк}}(s,t)$ – вероятность того, что накопитель будет переполнен сверх значения $(s-1)$, тогда

$$P_{\text{отк}}(s,t)=\sum_{k=s}^{\infty}P_k(t).$$

Для стационарного режима пусть $p_{\text{отк}}(s)=\lim\limits_{t\to\infty}P_{\text{отк}}(s,t)$. Учитывая (6), получаем:

$$p_{\text{отк}}(s)=\sum_{k=s}^{\infty}p_k=(1-p_0)^s,\ s=1,2,\dots \tag{7}$$

Для (7) находим обратную функцию

$$s(p_{\text{отк}})=\frac{\ln(p_{\text{отк}})}{\ln(1-p_0)}. \tag{8}$$

Из (8) по заданной вероятности $p_{отк}$ получаем оценку для $s_{\text{кр}}$ критического уровня накопителя

$$s_{\text{кр}}\ge\left[\frac{\ln(p_{\text{отк}})}{\ln(1-p_0)}\right]+1, \tag{9}$$

где $[x]$ – целая часть числа x.

Решения (9) и (6) получены в общем виде, т.к. не определена вероятность p_0 в зависимости от размера группы. Ниже представлены частные решения для (9) и (6).

4. Частные решения для расчета наполненности накопителя

Приведём решения для расчета наполненности накопителя в зависимости от размера группы.

Обратимся к уравнению (2) при k = 0 и формуле (6), тогда

$$p_0=\frac{\beta}{\alpha}\left(p_0(1-p_0)+p_0(1-p_0)^2+\dots+p_0(1-p_0)^r\right).$$

Далее получаем алгебраическое уравнение r-го порядка относительно неизвестного p_0:

$$1-\frac{\beta}{\alpha}\sum_{j=1}^{r}(1-p_0)^j=0. \qquad (10)$$

Из уравнения (10) при значениях размера группы $r = 1$, $r = 2$ и $r \to \infty$ получаем:
при $r = 1$

$$p_0=\frac{\beta-\alpha}{\beta};$$

при $r = 2$

$$p_0=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{1+4\frac{\alpha}{\beta}}}{2};$$

при $r \to \infty$

$$p_0=\frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

Исходя из частных решений для (6), системы уравнений для вероятностей p_k состояний системы (2), получены решения для $s(p_{\text{отк}})$ при $r = 1$, $r = 2$ и $r \to \infty$ по заданной вероятности $p_{\text{отк}}$:
при $r = 1$

$$s(p_{\text{отк}})=\frac{\ln(p_{\text{отк}})}{\ln(\alpha)-\ln(\beta)}.$$

при $r = 2$

$$s(p_{\text{отк}})=\frac{\ln(p_{\text{отк}})}{\ln\left(\sqrt{1+4\frac{\alpha}{\beta}}-1\right)-\ln(2)}.$$

при $r \to \infty$

$$s(p_{\text{отк}})=\frac{\ln(p_{\text{отк}})}{\ln\alpha-\ln(\alpha+\beta)}.$$

Замечание. Случай $r \to \infty$ предполагает, что ВС обладает достаточным ресурсом, чтобы при больших значениях r решать поставленные задачи за заданное время.

На рис. 3 представлены результаты расчета накопителя $s(p_{\text{отк}})$ при $r = 1$, $r = 2$ и $r \to \infty$. Пример показывает динамику уменьшения и предел размера накопителя в зависимости от увеличения размера группы.

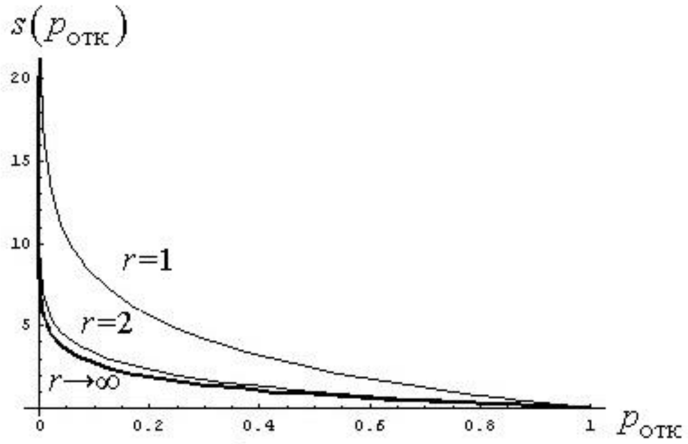

Рис. 3. Расчет размера накопителя $s(p_{\text{отк}})$ для группы $r = 1$, $r = 2$ и $r \to \infty$
при α=18 1/ч, β=24 1/ч.

5. Заключение

Предложена математическая модель вычислительной системы с накопителем, на которую поступает случайный поток задач. Задачи потока обслуживаются группами согласно пуассоновскому распределению. Представлены частные решения, где неизвестными функциями являются вероятности состояний накопителя в переходном режиме функционирования системы и в предельном для размера группы случае. Предложены формулы оценки загруженности накопителя. Частные аналитические решения представлены для размера группы $r = 1$, $r = 2$ и $r \to \infty$. Полученные аналитические решения для стационарного режима функционировании вычислительной системы удобны для инженерных расчетов и при экспресс-анализе их функционирования.

Литература

1. *Хорошевский В. Г.* Архитектура вычислительных систем. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. 520 с.
2. *Gupta S., Patel T., Engelmann C., and Tiwari D.* Failures in large scale systems: long-term measurement, analysis, and implications // Proc. International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis, Denver, Colorado, November 12–17, 2017.
3. *Schroeder B., Gibson G.* A large-scale study of failures in high-performance computing systems // Proc. International Conference on Dependable Systems and Networks (DSN), Philadelphia, PA, USA, June 25–28, 2006.
4. *Хорошевский В. Г.* Модели анализа и организации функционирования большемасштабных распределенных вычислительных систем // Электронное моделирование. 2003. Т. 25, № 6.
5. *Xie M., Dai Y. S., and Poh K. L.* Computing system reliability: models and analysis. New York: Kluwer academic publishers, 2004.
6. *Harchol-Balter M.* Performance Modeling and Design of Computer Systems: Queueing Theory in Action. Cambridge University Press, 2013.
7. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.
8. *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 520 с.
9. *Павский К. В., Павский В. А.* Модель для расчета показателей осуществимости решения задач на распределенных вычислительных системах с накопителем // Вестник СибГУТИ. 2014. № 4. С. 4–8.
10. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Едиториал УРСС, 2006. 472 с.
11. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2-х т. Том 1. М: «ЛИБРОКОМ», 2010. 528 с.

Павский Валерий Алексеевич

д.т.н., профессор, профессор кафедры общей математики и информатики, Кемеровский государственный университет (КемГУ), e-mail: `pavva46@mail.ru`, ORCID ID: 0000-0001-9460-7126.

Павский Кирилл Валерьевич

д.т.н., доцент, профессор кафедры вычислительных систем, Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики (СибГУТИ); заведующий Лабораторией вычислительных систем, Институт физики полупроводников им. А. В. Ржанова СО РАН (ИФП СО РАН), e-mail: `pkv@isp.nsc.ru`, ORCID ID: 0000-0002-2271-7358.

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.
Вклад соавторов: *Каждый автор внес равную долю участия как во все этапы проводимого теоретического исследования, так и при написании разделов данной статьи.*

Stochastic Model of Computer Systems Functioning with Accumulator Storage for Serving Groups

Valery A. Pavsky[1], Kiril V. Pavsky[2,3]

[1] Kemerovo State University (KemSU)
[2] Siberian State University of Telecommunications and Information Science (SibSUTIS)
[3] Rzhanov Institute of Semiconductor Physics (ISP SB RAS)

Abstract: To assess the potential capabilities of computer systems, feasibility indicators for solving problems are used. These indicators characterize the quality of the systems taking into account reliability and parameters of incoming tasks. One of the modes of computer systems functioning is the task flow servicing mode. Due to the peculiarities of this mode, when analyzing the functioning of computer systems, they are considered as a stochastic object, which in turn is well studied by stochastic methods. The paper proposes a mathematical model for calculating feasibility indicators for solving tasks in servicing mode of task flow on computer systems with accumulator storage. The model is constructed within the framework of queuing theory. Analytical solutions for assessing the fullness of accumulator storage are obtained.

Keywords: computer systems, feasibility indicators for solving tasks, accumulator storage, queuing theory, group servicing.

For citation: Pavsky V. A., Pavsky K. V. Stochastic model of computer systems functioning with accumulator storage for serving groups (in Russian). *Vestnik SibGUTI*, 2024, vol. 18, no. 1, pp. 40-47. `https://doi.org/10.55648/1998-6920-2024-18-1-40-47`.

The article was submitted: 11.10.2023;
revised version: 29.11.2023;
accepted for publication 01.12.2023.

References

1. Horoshevskij V. G. *Arhitektura vychislitel'nyh sistem* [Architecture of computer systems]. Moscow, BMSTU, 2008. 520 p.
2. Gupta S., Patel T., Engelmann C., and Tiwari D. Failures in large scale systems: long-term measurement, analysis, and implications. *SC '17: Proceedings of the International Conference for High Performance Computing*, Networking, Storage and Analysis, Article no. 44, Denver, Colorado, 12 -17 November, 2017.
3. Schroeder B., Gibson G. A large-scale study of failures in high-performance computing systems. *Proceedings of the International Conference on Dependable Systems and Networks (DSN2006)*, Philadelphia, PA, USA, 25-28 June, 2006, 10 p.
4. Horoshevskij V. G. Modeli analiza i organizacii funkcionirovanija bol'shemasshtabnyh raspredelennyh vychislitel'nyh sistem [Models of analysis and organization of large-scale distributed computer systems]. *Jelektronnoe modelirovanie*, *Kiev*, 2003, vol 25, no. 6.
5. Xie M., Dai Y. S., and Poh K. L. *Computing system reliability: models and analysis*. New York, Kluwer academic publishers, 2004.

6. Harchol-Balter M. *Performance Modeling and Design of Computer Systems: Queueing Theory in Action*. Cambridge University Press, 2013.
7. Klejnrok L. *Teorija massovogo obsluzhivanija* [Queuing theory]. Moscow, Mashinostroenie, 1979. 432 p.
8. Saati T. L. *Jelementy teorii massovogo obsluzhivanija i ee prilozhenija* [Elements of queuing theory and its applications]. Moscow, Knizhnyj dom «LIBROKOM», 2010. 520 p.
9. Pavskij K. V., Pavskij V. A. Model' dlja rascheta pokazatelej osushhestvimosti reshenija zadach na raspredelennyh vychislitel'nyh sistemah s nakopitelem [Model for realizability calculation of tasks solution on distributed computer systems with buffer]. *Vestnik SibGUTI*, 2014, vol. 4, pp.4-8.
10. Stepanov V. V. *Kurs differencial'nyh uravnenij* [Course of differential equations]. Moscow, Editorial URSS, 2006. 472 p.
11. Feller V. *Vvedenie v teoriju verojatnostej i ee prilozhenija* [An introduction to probability theory and its applications. Vol. 1]., Moscow, « LIBROKOM», 2010. 528 p.

Valery A. Pavsky

Dr. of Sci. (Engineering), Professor, Professor of Department of the General mathematics and informatics, Kemerovo State Universisty (KemSU), e-mail: `pavva46@mail.ru`, ORCID ID: 0000-0001-9460-7126.

Kiril V. Pavsky

Dr. of Sci. (Engineering), Assistant professor, Head of Computer Systems Laboratory, Rzhanov Institute of Semiconductor Physics Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISP SB RAS); Professor of the Department of computer science, Siberian State University of Telecommunications and Information Science (SibSUTIS), e-mail: `pkv@isp.nsc.ru`, ORCID ID: 0000-0002-2271-7358.