

Результаты по целочисленным графам

А. Ю. Овчаренко

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики (СибГУТИ)

Аннотация: В статье представлен обзор результатов, связанных с поиском целочисленных графов Кэли и смежные вопросы.

Ключевые слова: целочисленные графы, спектр графа, регулярные графы, нерегулярные графы, 4-регулярные графы.

Для цитирования: Овчаренко А. Ю. Результаты по целочисленным графам // Вестник СибГУТИ. 2024. Т. 18, № 4. С. 52–61. <https://doi.org/10.55648/1998-6920-2024-18-4-52-61>.



Контент доступен под лицензией
Creative Commons Attribution 4.0
License

© Овчаренко А. Ю., 2024

Статья поступила в редакцию 18.03.2024;
переработанный вариант – 25.04.2024;
принята к публикации 26.04.2024.

1. Введение

Граф является целочисленным, если все собственные значения его матрицы смежности являются целыми числами. Понятие целочисленных графов было впервые введено Харари и Швенком [1]. В этой же работе была поставлена задача поиска целочисленных графов Кэли.

Графы Кэли имеют особую структуру и свойства, которые их делают интересными для исследования. В 1986 году была представлена теоретико-групповая модель [2], называемая моделью графа Кэли. Модель находит свое применение в проектировании, анализе и улучшении сетей. Авторы работы показали, что эта модель универсальна, и продемонстрировали, как сети взаимосвязей могут быть представлены в этой модели. Модель позволяет проектировать сети, основанные на представлениях конечных групп. Авторы статьи проанализировали эти сети, теоретически интерпретируя теоретико-групповой структурный граф; используя эти идеи и руководствуясь некоторыми хорошо известными комбинаторными задачами, они разработали два класса сетей, называемых *star* графами и *pancake* графами. Показано, что эти сети обладают лучшей производительностью, чем предыдущие сети.

Было предложено использовать графы Кэли в качестве инструмента для построения вершинно-симметричных сетей взаимосвязей [3]. Выделены преимущества использования графов Кэли в качестве сетевых моделей, такие как вершинная транзитивность (для каждой вершины используется один и тот же алгоритм маршрутизации), реберная транзитивность (каждое ребро в графе выглядит одинаково), иерархическая структура (допускает рекурсивные построения), высокая отказоустойчивость (максимальное количество вершин, которые необходимо удалить, чтобы граф оставался связным); малая степень и диаметр [3].

Графы Кэли и смежные графы являются хорошими моделями для сетей взаимосвязей [4, 5]. Многие известные сети взаимосвязей представляют собой графы Кэли или смежные графы. Например, сети «гиперкуб», «бабочка», «тор» являются графами Кэли, в то время как сети де Брейна и сети обмена в случайном порядке (*shuffle-exchange*) являются смежными графами [5]. Предложено, что для орграфов Кэли отсутствуют общие теоремы, и для

определения их свойств необходимо использовать теорию групп [5]. В работе [6] была рассмотрена взаимосвязь между орграфами Кэли и их смежными графами относительно подгрупп, и получены некоторые общие результаты о гомоморфизме. Продемонстрированы применение этих результатов к некоторым хорошо известным сетям, таким как сеть «бабочка» (butterfly), сеть де Брейна, сеть cube-connected cycles, сеть обмена в случайном порядке (shuffle-exchange). В заключении авторы сделали вывод о том, что многие другие полезные направленные и ненаправленные сети могут быть сформулированы аналогичным образом и изучены. В частности, полученные результаты могут быть полезны при проектировании масштабируемых межсетевых сетей для параллельной обработки данных, обладающих желаемыми свойствами простых алгоритмов маршрутизации, сбалансированным коммуникационным трафиком и устойчивостью к сбоям узлов и каналов связи.

В 2005 году были рассмотрены результаты теоретико-графового и теоретико-группового моделирования с точки зрения взаимосвязей между теорией структурной информации и коммуникационной сложностью распределения выборов лидера [7]. Специфическое поведение различных классов сетей (сетей графов Кэли, сетей де Брейна и Каутца) изучается с точки зрения обычных требований к эффективности, таких как маршрутизация, симметрия и алгебраическая структура.

Целочисленные графы могут представлять интерес для проектирования сетевой топологии сетей передачи совершенных состояний [8, 9].

Топологии сети «кольцо», «гиперкуб» и «тор» являются графами Кэли. Сравнение полученных характеристик целочисленных графов Кэли знакопеременных, симметрических, линейных групп и групп диэдра (в особенности, групп диэдра) с соответствующими характеристиками гиперкубов и торов показало, что графы обладают более предпочтительными характеристиками, чем гиперкубы [10].

Отсюда можно сделать вывод, что данные графы заслуживают внимания при проектировании перспективных топологий многопроцессорных вычислительных систем.

2. Регулярные графы

Для целочисленных регулярных графов можно получить новые классы целочисленных графов, взяв их реберные графы. Реберным графом $L(G)$ неориентированного графа G называется граф $L(G)$, представляющий соседство рёбер графа G [11].

Теорема 1. [11] Пусть $G = NEPS(G_1, \dots, G_n; B)$, $NEPS$ – non-complete extended p -sum of graphs (неполная расширенная p -сумма графов), и пусть $G_1, \dots, G_n$ – связные графы. Тогда G – регулярный целочисленный граф тогда и только тогда, когда G_i , $i = 1, \dots, n$ являются регулярными целочисленными графами.

Показано, что $L_2(G) = L(S(G))$ является целочисленным графом в том случае, если G является (дизъюнктным) объединением полных графов, каждый из которых имеет фиксированное число S (≥ 2) вершин (здесь S обозначает граф, полученный путем вставки только одной вершины в каждое ребро). В [12] представлена конструкция бесконечного семейства целочисленных графов в классе полных трехсторонних графов K_{n_1, n_2, n_3} .

Общий результат о конечности числа целочисленных графов внутри бесконечного множества графов был представлен в [11].

Теорема 2. [11] Множество I_r всех регулярных связных целочисленных графов фиксированной степени r конечно.

Диаметр любого графа I_r ограничен, поскольку спектр регулярного графа степени r лежит в отрезке $[-r, r]$. Тогда число различных целых собственных значений не будет превосходить $2r + 1$, и следовательно, диаметр не может быть выше, чем $2r$. Аналогично можно привести доказательство, что множество всех нерегулярных связных целочисленных графов с заданной максимальной вершиной степенью, равной 4 конечно.

Теорема 3. [11] *Единственными связанными целочисленными графами, которые не являются 3-регулярными и максимальные степени вершин, которых не превышает трех:*

$$K_1, K_2, K_3, C_4, C_6, K_2 \circ 2K_1, S(K_{1,3}),$$

где $\circ$ обозначает коронарное произведение двух графов.

3. Классы целочисленных графов

В третьем разделе представлены результаты о некоторых частных классах целочисленных графов.

3.1. Кубические графы

Кубический граф – это граф, в котором каждая вершина имеет степень 3. Поэтому кубический граф будет определен как 3-регулярный граф.

В статье 1976 года «Существует ровно 13 связных кубических целочисленных графов» [13] Ф. С. Бюссмакера и Д. М. Чветковича представлены первые значимые результаты в поисках целочисленных графов.

И одновременно, такой же результат независимо был анонсирован А. Я. Швенком [14].

Заметим, что методы исследования, которые использовали авторы, отличались друг от друга. А именно, в работе Ф. С. Бюссмакера и Д. Чветковича были объединены вычисления, которые проводились на компьютере с теоретическими рассуждениями. В работе А. Я. Швенка результат был полностью получен «вручную».

3.2. Целочисленные графы

В 1984 году была представлена работа М. Ройтмана «Бесконечное семейство целочисленных графов» [15], в которой были построены целочисленные полные трехдольные графы.

В 2004 году в статье «Целочисленные полные r – частичные графы» [16] авторов Ванг, Ли и Хёде, приведено необходимое и достаточное условие полных r -дольных графов. Графы r -дольные являются целочисленными. Бесконечно много новых классов таких целочисленных графов можно построить из r -дольных графов.

3.3. Нерегулярные не двудольные целочисленные графы с максимальной степенью четыре

В 1986 было доказано, что существует 13 связных нерегулярных не двудольных целочисленных графов с максимальной степенью четыре [17] (рис. 3.1 и рис. 3.2). Но соответствующая задача для двудольных графов еще не решена.

Пусть S' – подмножество S , содержащее все обобщенные линейные графы. Графы S' представлены на рис. 1.



Рис. 1. Нерегулярные двудольные целочисленные графы S'

Пусть S'' – множество нерегулярных, не двудольных, связных, целочисленных графов с максимальной степенью вершины четыре, которые являются исключительными графами. Графы S'' имеют среднюю степень меньше трех. Графы S'' представлены на рис. 2.

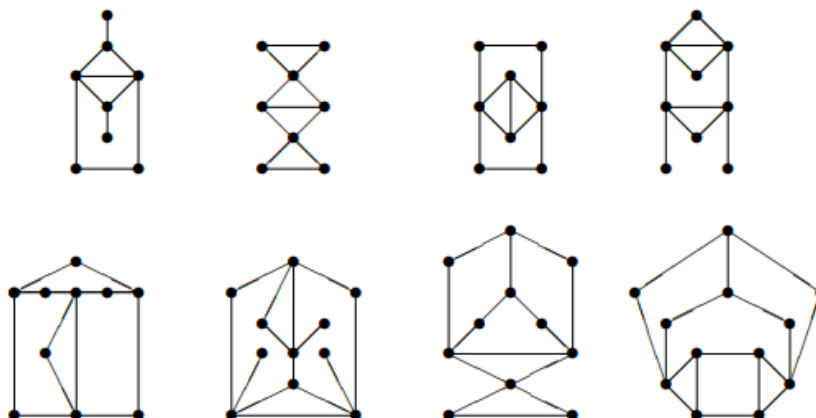


Рис. 2. Нерегулярные двудольные целочисленные графы S''

3.4. Связные целочисленные графы с числом вершин не больше 12

В 1999 году было доказано [18], что существует 150 связных целочисленных графов, имеющие число вершин не выше десяти. Для того, чтобы завершить данный список требовались компьютерные вычисления.

Изучение целочисленного графа до десяти вершин позволило получить данные о косвенных связанных целочисленных графах, косвенных дополнениях коспектральных графов, самодополнительных графах, целочисленных комплементарных парах.

Также были получены результаты на целочисленные графы до 12 вершин [19, 20]. Для этой цели был разработан алгоритм. Полученные результаты были проверены с помощью компьютерных вычислений. Определение целочисленных графов на 13 вершинах все еще продолжается.

3.5. Целочисленные 4-регулярные графы

В работе «4-регулярные целочисленные графы» [21] 1998 года было представлено 1888 возможных спектров 4-регулярных двудольных целочисленных графов. 4-регулярный граф – это граф, в котором каждая вершина имеет степень четыре, то есть четыре ребра. Двудольный граф – это граф, в котором каждая вершина может быть разделена на два независимых множества. Напомним, что спектр графа – это набор собственных значений его матрицы смежности. Если все собственные значения графа являются целыми числами, то граф называется целочисленным. В работе был выделен список 4-регулярных целочисленных графов в количестве 65 графов.

В статье «Несуществование некоторых 4-регулярных целочисленных графов» [22] 1999 года были получены результаты несуществования для некоторых из этих потенциальных спектров. Из этих результатов следует, что, за исключением 5 исключительных спектров, двудольный 4-регулярный целочисленный граф имеет не более 1260 вершин. Как следствие, двудольный 4-регулярный целочисленный граф G имеет не более 630 вершин, если только $G \times K_2$ не обладает одним из этих исключительных спектров.

В 2003 году определены все 24 связных 4-регулярных целочисленных графа, в спектрах которых отсутствуют числа $+3$ и -3 [23]. Существует ровно 16 двудольных и 8 недвудольных таких графов. Наименьший двудольный равен $K_{4,4}$, в то время как самый

большой имеет 32 вершины. Среди этих графов есть две тройки коспектральных неизоморфных графов и две пары коспектральных неизоморфных графов. Наименьший двудольный граф равен K_5 , а самый большой имеет 15 вершин. Среди этих графов есть пара коспектральных неизоморфных графов.

В 2007 году была опубликована работа [24], в которой было установлено соответствие между замкнутыми переходами в регулярных графах и переходами в бесконечных регулярных деревьях. Соответствие обеспечивает нижнюю границу числа замкнутых переходов в регулярных графах после подсчета переходов заданной длины между вершинами на заданном расстоянии в бесконечном регулярном дереве. Нижняя граница применяется для уменьшения числа допустимых спектров 4-регулярных двудольных целочисленных графов более чем наполовину. Приведены подробности компьютерного вычисления по всем 4-регулярным двудольным графам с числом вершин до 24, что дало в общей сложности 47 целочисленных графов. Возможные спектры 4-регулярных двудольных целочисленных графов были определены, а полный список, содержащий 1888 записей, можно найти в [25]. Ранее было показано существование графов с определенным числом таких спектров. В работе список возможных спектров был уменьшен до 828, с помощью использования новой нижней границы числа замкнутых переходов в регулярных графах. Было определено, что число вершин графов должно находиться от 8 до 560. Полученные графы удовлетворяют большинству изученных спектров. Но все же следует иметь в виду, что самый большой целочисленный граф, найденный в [26] с помощью теоретических аргументов, имел 32 вершины. Исчерпывающий поиск в этом порядке все еще недоступен современным компьютерам. Тем не менее, из-за крайне малого процента целочисленных графов среди связанных 4-регулярных двудольных графов, а также больших наборов коспектральных графов, безусловно, было бы более перспективно создать нетривиальный алгоритм для построения всех графов с заданным спектром, чтобы найти целочисленные графы на большем числе вершин, что является непростой задачей.

В [26] приведены списки связанных 4-регулярных целочисленных графов Кэли и связанных 4-регулярных целочисленных дуго-транзитивных графов.

С точностью до изоморфизма было обнаружено, что существует 32 связанных квартичных целочисленных графа Кэли, 17 из которых являются двудольными. Многие из них могут быть реализованы несколькими различными способами. Граф является дуго-транзитивным, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на упорядоченные пары соседних вершин. С точностью до изоморфизма существует 27 квартичных целочисленных графов, которые являются дуго-транзитивными. Из этих 27 графов 16 являются двудольными и 16 являются графами Кэли. Были найдены ряд других квартичных целочисленных графов, найдено 9 новых спектров, которые могут быть реализованы с помощью двудольных квартичных целочисленных графов.

В таблице 1 показаны 4-регулярные двудольные целочисленные графы с n вершинами из проверенных графов с диапазоном вершин от 8 до 560.

Таблица 1. 4-регулярные двудольные целочисленные графы с n вершинами

n	8	10	12	16	18	24	30	32	36	40	48	72	120
i_n	1	1	2	1	1	3	1	1	1	1	1	2	1

В данной работе был дан полный список 4-регулярных графов, которые обладают нетривиальной группой автоморфизмов, что позволяет исследовать транзитивные свойства графов. И на основе этого можно сделать вывод, какие спектры будут удовлетворять нужным свойствам.

3.6. Нерегулярные двудольные целочисленные графы

Балинска и Симич также получили некоторые результаты нерегулярных, двудольных целочисленных графов с максимальной степенью 4 в [27–29].

В статье [27, 28] осуществлен поиск тех целочисленных графов, которые являются нерегулярными, двудольными и имеют максимальную степень 4. Исследована структура этих графов и предоставлены множество свойств, облегчающих компьютерный поиск. Авторы показали, что любой рассматриваемый граф имеет не более 78 вершин.

В [29] дается частично ответ на вопрос: «Какие нерегулярные двудольные целочисленные графы с максимальной четвертой степенью не имеют +1 и –1 в качестве собственных значений?»

В статье [30] были исследованы нерегулярные двудольные целочисленные графы. Построено 15 классов более крупных целочисленных графов из известных меньших. Классы состоят из двудольных и нерегулярных графов. Спектры и характеристические многочлены для данных графов получены из теории матриц. Целочисленность определяется с помощью использования теории чисел и компьютерного вычисления.

4. Целочисленные графы Кэли на некоторых группах

В статье [31] 2017 года приведены некоторые результаты целочисленных пятивалентных графов Кэли на абелевых или двугранных группах.

В работе [10] 2018 года был построен и реализован алгоритм для определения спектра графов Кэли на конечных группах. В частности, на симметрической знакопеременной, линейной группах и группе диэдра, заданных различными наборами порождающих, а именно, наборами инволюций. Из полученных результатов были определены новые семейства целочисленных графов.

В работе [32] 2020 года были доказаны теоремы о том, что спектр графа Кэли конечной группы с нормальным порождающим множеством, содержащим в каждом своем элементе все образующие циклической группы, является целым. В частности граф Кэли 2-группы, порожденной нормальным набором инволюций, является целым. Также доказано, что граф Кэли симметрической группы степени не менее 2, порожденной всеми перестановками, является целым. Найдены спектры графа Кэли знакопеременной группы степени не менее 4 с порождающим набором из трех циклов вида (kij) с фиксированным k , таким как

$$\{-n+1, 1-n+1, 2^2-n+1, \dots, (n-1)^2-n+1\}.$$

В работе [33] 2020 года было получено два новых бесконечных классов семейства целочисленных графов путем применения двойного переключения по Зайделю к звездчатым и нечетным графам. В частности, были найдены три новых 4-регулярных целочисленных графа с их спектрами. Если граф является целым, то он остается целым и после переключения по Зайделю.

В работе [34] 2021 года авторы, основываясь на теорию представлений конечных групп показали, что абелев граф Кэли является целочисленным графом тогда и только тогда, когда он является целочисленным по расстоянию. Авторы изучили спектр расстояний абелевых графов Кэли и класса не абелевых графов Кэли, а именно графа Кэли дициклической группы. В работе показано необходимое и достаточное условие для того, чтобы граф Кэли дициклической группой был целочисленным по расстоянию. Также были приведены некоторые простые условия целочисленности по расстоянию в терминах булевой алгебры. Построены несколько целочисленных бесконечных семейств целочисленных по расстоянию графов Кэли дициклической группы.

В работе [35] в качестве приложений приведены необходимые и достаточные условия для целочисленности по расстоянию графов Кэли над конечной абелевой группы. Приведены некоторые простые достаточные (или необходимые) условия для целочисленности и

целочисленности по расстоянию графа Кэли, соответственно, из которых можно получить несколько бесконечных семейств целочисленных и целочисленных по расстоянию графов Кэли. Построены целочисленные и дистанционные целочисленные графы Кэли по конечной абелевой группе. И, наконец, получены некоторые необходимые и достаточные условия эквивалентности целостности и дистанционной целостности графов Кэли над обобщенными двугранными группами.

5. Заключение

В период с 1974 года по настоящее время было проведено много исследований по целочисленным графам. В обзор данной статьи были включены основные результаты по целочисленным графам и их спектрам. В частности, представлены результаты по целочисленным графам, принадлежащим специальным классам и целочисленным графам Кэли на некоторых конечных группах.

Выражение благодарности

В заключение автор выражает благодарность рецензенту за замечания, способствовавшие улучшению материала работы.

Литература

1. *Harary F., Schwenk A. J.* Which graphs have integral spectra? *Graphs and Combinatorics* (Bari R. and Harary F., eds.), Springer-Verlag, Berlin (1974), P. 45—51.
2. *Akers S., Krishnamurthy B.* A group theoretic model for symmetric interconnection networks // *IEEE Transactions on Computers*, 1989. P. 555 - 566.
3. *Hwang K., Jacobs M., Earl E. Swartzlander (Jr.).* Proceedings of the 1986 International Conference on Parallel Processing // *IEEE Computer Society Press*, 1986, P 1051.
4. *Annestein, F., Baumslag, M., Rosenberg, A.L.* Group action graphs and parallel architectures. *SIAM J. Comput.*, 19, 1990. P. 544–569.
5. *Heydemann, M.* Cayley graphs and interconnection networks. In: G. Hahn and G. Sabidussi (Eds), *Graph Symmetry: Algebraic Methods and Applications*. 1997. P. 167–224.
6. *Xiao W., Parhami B.* Some mathematical properties of Cayley digraphs with applications to interconnection network design. *International Journal of Computer Mathematics*, 2005. P. 521–528.
7. *Lavault C.* Interconnection Networks: Graph- and Group Theoretic Modelling. 12th International Conference on Control Systems and Computer Science, 1999. P. 207-214.
8. *Godsil C.* State transfer on graphs. *Discrete Mathematics*, 312(1): P. 129 – 147, 2012.
9. *Ekert A., Christandl M., Datta N., Landahl A. J.* Perfect state transfer in quantum spin networks. *Phys. Rev. Lett.*, 92:187902, May 2004.
10. *Овчаренко А. Ю.* Спектры и диаметры графов Кэли некоторых конечных групп // *Вестник СибГУТИ*. 2018. №3. С. 45—61.
11. *Balinska K., Cvetkovic D., Radosavljevic Z., Simic S., Stevanovic D.* A survey on integral graphs, *Publ ETF*, 2002, № 13, P. 1-24.
12. *Cvetkovic D., Doob M., Sachs H.* Spectra of graphs – Theory and application. Deutscher Verlag der Wissenschaften – Academic Press, Berlin–New York, 1980; second edition 1982; third edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg–Leipzig, 1995.
13. *Bussemaker F. C., Cvetkovic D.* There are exactly 13 connected, cubic, integral graphs. *Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz.*, Nos. 544–576 (1976), P. 43–48.
14. *Schwenk A. J.* Exactly thirteen connected cubic graphs have integral spectra. Proceedings of the International Graph Theory Conference at Kalamazoo, May 1976, (Y. Alavi and D. Lick, eds.) Springer-Verlag.

15. Roitman M. An infinite family of integral graphs, *Discrete Math.* 52 (1984), №2-3, P. 313—315.
16. Wang L.G., Li X.L., Hoede C. Integral complete r -partite Graphs, *Discrete Math.* 283 (2004), № 1-3, P. 231-241.
17. Wang L. A survey of results on integral trees and integral graphs, Department of Applied Mathematics, Faculty of EEMCS, University of Twente The Netherlands, Memorandum № 1763 (2005), P. 1—22.
18. Balinska K. T., Cvetkovic D., Lepovic M., Simic S. K. There are exactly 150 connected integral graphs up to 10 vertices. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.* 10 (1999), P. 95-105.
19. Balinska K. T., Kupczyk M., Simic S. K., Zwierzynski K. T. On generating all integral graphs on 11 vertices. Computer Science Center Report № 469, Technical University of Poznan, (1999/2000), P. 1–53.
20. Balinska K. T., Kupczyk M., Simic S. K., Zwierzynski K. T. On generating all integral graphs on 12 vertices. Computer Science Center Report № 482, Technical University of Poznan, (2001), P. 1–36.
21. Cvetkovic D., Simic S., Stevanovic D. 4-Regular integral graphs, *Univ. Beograd. Publ. Elektr. Fak. Ser. Mat.* 9 (1998), P. 89–102.
22. Stevanovic D. Nonexistence of some 4-regular integral graphs, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.* 10 (1999), P. 81-86.
23. Stevanovic D. 4-Regular integral graphs avoiding ± 3 in the spectrum, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.* 14 (2003), P. 99-110.
24. Stevanovic D., de Abreu N.M.M., de Freitas M.A.A., Del-Vecchio R. Walks and Regular Integral Graphs, *Linear Algebra Appl.* 423 (2007), P. 119–135.
25. Stevanovic D. Some compositions of graphs and integral graphs (in Serbian), Ph.D. thesis, University of Nis, 2000.
26. Minchenko M., Wanless I. M. Quartic integral Cayley graphs. // *Ars Mathematica Contemporanea*. – V. 8. – 2015. P. 381–408.
27. Balinska K. T., Simic S. K. The nonregular, bipartite, integral graphs with maximum degree 4. Part I: Basic properties, *Graph theory (Kazimierz Dolny, 1997)*, *Discrete Math.* 236 (2001), №1-3, P. 13-24.
28. Balinska K. T., Simic S. K. Some remarks on integral graphs with maximum degree four. XIV Conference on Applied Mathematics (Palic, 2000). *Novi Sad J. Math.* 31 (2001), № 1, P. 19- 25.
29. Balinska K. T., Simic S. K. Zwierzynski K. T. Which non-regular bipartite integral graphs with maximum degree four do not have ± 1 as eigenvalues? *Discrete Math.* 286 (2004), № 1-2, P. 15- 24.
30. Stevanovic D. Some compositions of graphs and integral graphs (in Serbian), Ph.D. thesis, University of Nis, 2000.
31. Ghasemi M. Integral pentavalent Cayley graphs on abelian or dihedral groups. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences: Mathematical Sciences*. – 2017. – V. 127, № 2. – P. 219-224
32. Konstantinova E. V., Lytkina D.V. Integral Cayley Graphs over Finite Groups // *Algebra Colloquium*. – 2020. – V. 27, № 1. – P. 131-136.
33. Goryainov S., Zhao D., Konstantinova E. V., Li H. Integral graphs obtained by dual Seidel switching. *Linear Algebra and its Applications*. – 2020. – V. 604. – P. 476-489.
34. Lu. Lu, Huang Q., Huang X. Integral Cayley graphs over dihedral groups. *Journal of Algebraic Combinatorics*. – 2018. – V. 47, № 4. – P. 585-601.
35. Huang J., Li. Sh. Integral and distance integral Cayley graphs over generalized dihedral groups. *Journal of Algebraic Combinatorics*. – 2021. – V. 53, № 4. – P. 921-943.

Овчаренко Алёна Юрьевна

к.т.н., доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики (СибГУТИ, 630102, Новосибирск, ул. Кирова, д. 86), тел. +7 (952) 917-20-27, e-mail: shmatova_aaa@mail.ru, ORCID ID: 0000-0001-7929-1899.

Results of research on integer graphs

Alena Y. Ovcharenko

Siberian State University of Telecommunications and Information Science (SibSUTIS)

Abstract: The article provides an overview of the results related to the search for integer graphs and related issues.

Keywords: integer graphs, spectrum of graph, regular graphs, non-regular graphs, 4-regular graphs.

For citation: Ovcharenko A. Y. Results of search about Integer Graph (in Russian). Vestnik SibGUTI, 2024, vol. 18, no. 4, pp. 52-61. <https://doi.org/10.55648/1998-6920-2024-18-4-52-61>.



Content is available under the license
Creative Commons Attribution 4.0
License

© Ovcharenko A. Y., 2024

The article was submitted: 18.03.2024;
revised version: 25.04.2024;
accepted for publication 26.04.2024.

References

1. Harary F, Schwenk A. J. Which graphs have integral spectra? Graphs and Combinatorics (R. Bari and F. Harary, eds.), Springer-Verlag, Berlin (1974), pp. 45—51.
2. Akers S., Krishnamurthy B. A group theoretic model for symmetric interconnection networks. IEEE Transactions on Computers, 1989. pp. 555 - 566.
3. Hwang K., Jacobs M., Earl E. Swartzlander (Jr.). Proceedings of the 1986 International Conference on Parallel Processing. IEEE Computer Society Press, 1986, pp. 1051.
4. Annexstein, F., Baumslag, M., Rosenberg, A. L. Group action graphs and parallel architectures. SIAM J. Comput., 19, 1990. pp. 544–569.
5. Heydemann, M. Cayley graphs and interconnection networks. In: G. Hahn and G. Sabidussi (Eds), Graph Symmetry: Algebraic Methods and Applications. 1997. pp. 167–224.
6. Xiao W., Parhami B. Some mathematical properties of Cayley digraphs with applications to interconnection network design. International Journal of Computer Mathematics, 2005. pp. 521–528.
7. Lavault C. Interconnection Networks: Graph- and Group Theoretic Modelling. 12th International Conference on Control Systems and Computer Science, 1999. pp. 207-214.
8. Godsil C. State transfer on graphs. Discrete Mathematics, 312(1):129 – 147, 2012.
9. Ekert A., Christandl M., Datta N., Landahl A. J. Perfect state transfer in quantum spin networks. Phys. Rev. Lett., 92:187902, May 2004.
10. Ovcharenko A. Y. Spektry i diametry grafov Keli nekotorykh konechnykh grupp [Spectra and diameters of Cayley graphs of some finite groups]. Vestnik SibGUTI, 2018, no. 3, pp. 45-61.
11. Balinska K., Cvetkovic D., Radosavljevic Z., Simic S., Stevanovic D. A survey on integral graphs. Publ ETF, 2002, no. 13, pp. 1-24.
12. Cvetkovic D., Doob M., Sachs H. Spectra of graphs – Theory and application. Deutscher Verlag der Wissenschaften – Academic Press, Berlin–New York, 1980; second edition 1982; third edition, Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg–Leipzig, 1995.

13. *Bussemaker F. C., Cvetkovic D.* There are exactly 13 connected, cubic, integral graphs. Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., Nos. 544–576 (1976), pp. 43–48.
14. *Schwenk A. J.* Exactly thirteen connected cubic graphs have integral spectra. Proceedings of the International Graph Theory Conference at Kalamazoo, May 1976, (Y. Alavi and D. Lick, eds.) Springer-Verlag.
15. *Roitman M.* An infinite family of integral graphs. Discrete Math. 52 (1984), no.2-3, pp. 313–315.
16. *Wang L. G., Li X. L., Hoede C.* Integral complete r -partite Graphs. Discrete Math. 283 (2004), no. 1-3, 231-241.
17. *Wang L.* A survey of results on integral trees and integral graphs. Department of Applied Mathematics, Faculty of EEMCS, University of Twente The Netherlands, Memorandum No. 1763 (2005), pp. 1–22.
18. *Balinska K. T., Cvetkovic D., Lepovic M., Simic S. K.* There are exactly 150 connected integral graphs up to 10 vertices. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 10 (1999), 95-105.
19. *Balinska K. T., Kupczyk M., Simic S. K., Zwierzynski K. T.* On generating all integral graphs on 11 vertices. Computer Science Center Report No. 469, Technical University of Poznan, (1999/2000), pp. 1–53.
20. *Balinska K. T., Kupczyk M., Simic S. K., Zwierzynski K. T.* On generating all integral graphs on 12 vertices. Computer Science Center Report No. 482, Technical University of Poznan, (2001), pp. 1–36.
21. *Cvetkovic D., Simic S., Stevanovic D.* 4-Regular integral graphs, Univ. Beograd. Publ. Elektr. Fak, Ser. Mat. 9 (1998), pp. 89–102.
22. *Stevanovic D.* Nonexistence of some 4-regular integral graphs, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 10 (1999), pp. 81-86.
23. *Stevanovic D.* 4-Regular integral graphs avoiding ± 3 in the spectrum, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 14 (2003), pp. 99-110.
24. *Stevanovic D., de Abreu N. M. M., de Freitas M. A. A., Del-Vecchio R.* Walks and Regular Integral Graphs. Linear Algebra Appl. 423 (2007), pp. 119–135.
25. *Stevanovic D.* Some compositions of graphs and integral graphs (in Serbian), Ph.D. thesis, University of Nis, 2000.
26. *Minchenko M., Wanless I. M.* Quartic integral Cayley graphs. Ars Mathematica Contemporanea. – Vol. 8. – 2015. pp. 381–408.
27. *Balinska K. T., Simic S. K.* The nonregular, bipartite, integral graphs with maximum degree 4. Part I: Basic properties, Graph theory (Kazimierz Dolny, 1997), Discrete Math. 236 (2001), no.1-3, pp. 13-24.
28. *Balinska K. T., Simic S. K.* Some remarks on integral graphs with maximum degree four. XIV Conference on Applied Mathematics (Palic, 2000). Novi Sad J. Math. 31 (2001), no.1, 19- 25. pp. 13 24.
29. *Balinska K. T., Simic S. K., Zwierzynski K. T.* Which non-regular bipartite integral graphs with maximum degree four do not have ± 1 as eigenvalues? Discrete Math. 286 (2004), no.1-2, pp. 15- 24.
30. *Stevanovic D.* Some compositions of graphs and integral graphs (in Serbian), Ph.D. thesis, University of Nis, 2000.
31. *Ghasemi M.* Integral pentavalent Cayley graphs on abelian or dihedral groups. Proceedings of the Indian Academy of Sciences: Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. 127, no. 2. – pp. 219-224.
32. *Konstantinova E. V., Lytkina D. V.* Integral Cayley Graphs over Finite Groups. Algebra Colloquium. – 2020. – Vol. 27, no. 1. – pp. 131-136.
33. *Goryainov S., Zhao D., Konstantinova E. V., Li H.* Integral graphs obtained by dual Seidel switching. Linear Algebra and its Applications. – 2020. – Vol. 604. – pp. 476-489.
34. *Lu. Lu, Huang Q., Huang X.* Integral Cayley graphs over dihedral groups. Journal of Algebraic Combinatorics. – 2018. – Vol. 47, no. 4. – pp. 585-601.
35. *Huang J., Li. Sh.* Integral and distance integral Cayley graphs over generalized dihedral groups. Journal of Algebraic Combinatorics. – 2021. – Vol. 53, no. 4. – pp. 921-943.

Alena Y. Ovcharenko

PhD in Engineering, docent of the Department of Higher Mathematics, Siberian State University of Telecommunications and Information Science (SibSUTIS, Russia, 630102, Novosibirsk, Kirov St. 86), phone: +7 (952) 917-20-27, e-mail: shmatova_aaa@mail.ru, ORCID ID: 0000-0001-7929-1899.