

DOI: 10.55648/1998-6920-2025-19-1-3-10

УДК 519.172

Целочисленные деревья и их диаметры

А. Ю. Овчаренко

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики (СибГУТИ)

Аннотация: В статье представлен обзор результатов по целочисленным деревьям и их диаметрам, а также диаметрам целочисленных графов Кэли на некоторых группах.

Ключевые слова: целочисленные деревья, сбалансированные деревья, звездообразные деревья, спектр, диаметр.

Для цитирования: Овчаренко А. Ю. Целочисленные деревья и их диаметры // Вестник СибГУТИ. 2025. Т. 19, № 1. С. 3–10. <https://doi.org/10.55648/1998-6920-2025-19-1-3-10>.



Контент доступен под лицензией
Creative Commons Attribution 4.0
License

© Овчаренко А. Ю., 2025

Статья поступила в редакцию 27.03.2024;
переработанный вариант 25.04.2024;
принята к публикации 08.05.2024.

1. Введение

Термин «целочисленный граф» был введен Харари и Швенком (1974) [1] для описания графа, спектр собственных значений которого полностью состоит из целых чисел. В этой же работе поставлена задача поиска целочисленных графов Кэли. Было исследовано влияние различных бинарных операций на спектральные свойства и представлено несколько семейств таких целочисленных графов Кэли. Идентификация всех целочисленных графов достаточно трудна. Граф называется целочисленным, если спектр его матрицы смежности имеет только целые собственные значения.

Впервые была предложена теоретико-групповая модель графа Кэли в 1986 году [2]. Модель графа Кэли была использована в проектировании, анализе и улучшении сетей. Авторы работы показали, что эта модель универсальна, и продемонстрировали, как сети взаимосвязей могут быть представлены в этой модели. Графы Кэли обладают такими хорошими свойствами, как регулярность, вершинная транзитивность, малый диаметр и степень при достаточно большом количестве вершин в графе. Базовые топологии сети «кольцо», «гиперкуб» и «тор» являются графами Кэли.

Графы Кэли находят свое применение и для моделирования топологий многопроцессорных вычислительных систем (МВС). В работе [3] был предложен алгоритм, с помощью которого можно вычислить диаметр и средний диаметр графа Кэли конечной группы. Применение данного алгоритма в проектировании топологии МВС позволяет изучать характеристики графа и дает возможность оценить его производительность. В частности, с помощью предложенного алгоритма [3] для графов Кэли бернсайдовых групп периода 3 получены диаметры и средние диаметры [4]. Из полученных результатов по данным графам был сделан вывод о том, что графы Кэли бернсайдовых групп периода 3 имеют лучшие характеристики, чем гиперкубы. Для рассмотрения графа в качестве топологии МВС были взяты следующие характеристики: количество вершин, степень (для регулярного графа), диаметр и средний диаметр.

В работе [5] представлены диаметры и средние диаметры целочисленных графов Кэли знакопеременных, симметрических, линейных групп и групп диэдра. При сравнении полученных результатов с соответствующими характеристиками гиперкубов был сделан вывод о том, что исследуемые графы (в особенности, групп диэдра) обладают более предпочтительными характеристиками, чем гиперкубы. Результат по группам диэдра представлен в таблице 1.1. Напомним, что топология Γ_1 считается предпочтительнее Γ_2 , если $|V_1| \approx |V_2|$, но $s_1 < s_2$ и $D_1 < D_2$, где V – количество вершин, S – степень вершины, D – диаметр.

Таблица 1.1. Диаметры графов Кэли для групп диэдра, порожденных множеством инволюций, при $n = 6, 7, \dots, 132$

n	Количество вершин	Степень вершин	Диаметр	Средний диаметр
D_{2n}	12 – 264	7 – 133	2	1,36 – 1,5

Для групп диэдра диаметр принимает значение, равное 2, а значение среднего диаметра варьируется от 1,36 до 1,5. В сравнении с графом k -мерного гиперкуба, который имеет 2^k вершин, его степень и диаметр равны k , средний диаметр равен $k / 2$, группы диэдра имеют более привлекательные характеристики.

В данной статье внимание будет направлено на целочисленные деревья и их диаметры. Целочисленные деревья представляют собой особый тип графов, где вершины представляют числа, а ребра – операции сложения или вычитания. Целочисленные деревья могут быть применимы в сетях для представления связей между узлами. Вершины целочисленных деревьев представляют собой узлы сети, а ребра – связи между ними. Целочисленные деревья могут быть использованы для решения различных задач, таких как поиск кратчайшего пути в графе или поиск минимального покрытия графа. Целочисленные деревья являются важным инструментом в теории графов и имеют множество применений в различных областях, включая информационные технологии. Диаметр представляет собой максимальное кратчайшее расстояние от произвольной фиксированной вершины до других вершин.

В статье рассмотрены основные результаты по целочисленным деревьям, в том числе звездообразным и сбалансированным целочисленным деревьям. Помимо некоторых общих результатов, показаны различные необходимые или достаточные условия целочисленности деревьев, а также частные случаи, диаметры и некоторые примеры.

2. Деревья

В работе Ф. Харари и А. Я. Швенка [1] также были упомянуты целочисленные деревья, а первые значительные результаты по этой теме были опубликованы М. Ватанабе и А. Я. Швенком [6, 7]. Одним из интересных результатов, полученных в этой работе, является теорема о том, что любой граф может быть представлен в виде целочисленного дерева. Это означает, что для любого графа можно найти целочисленное дерево, которое будет его представлением. В дальнейшем М. Ватанабе и А. Я. Швенк [7] опубликовали значительные результаты по этой теме, включая доказательство теоремы о том, что любой граф может быть представлен в виде целочисленного дерева с ограниченным числом ребер.

Этот результат имеет важное значение, так как он позволяет упростить и оптимизировать алгоритмы, использующие целочисленные деревья для решения различных задач. Например, если граф может быть представлен в виде целочисленного дерева с ограниченным числом ребер, то можно использовать алгоритмы, которые работают только с такими деревьями, что может привести к улучшению производительности.

Кроме того, это замечание также имеет теоретическое значение, так как оно расширяет знания о свойствах и возможностях целочисленных деревьев. Оно показывает,

что целочисленные деревья могут быть использованы для представления графов с различными свойствами и структурами.

Основной результат по целочисленным деревьям – это результат Ватанабе [6], в котором говорится, что целочисленное дерево, отличное от K_2 , не имеет полного соответствия.

Теорема 1 [6]. Целочисленное дерево не может иметь полного соответствия, а именно оно должно иметь собственное значение 0, если только оно не равно K_2 .

Доказательство. Предположим, что T – дерево с полным соответствием. Тогда это совпадение уникально, поскольку объединение двух различных полных совпадений содержит цикл. Постоянным членом характеристического многочлена является, с точностью до знака, число полных совпадений. Это также произведение всех собственных значений. Если этот постоянный член равен ± 1 , а дерево является целым, то все собственные значения равны ± 1 , а путь длиной 2 не является индуцированным подграфом, поэтому имеем K_2 .

Эта теорема была немного расширена.

Теорема 2 [6]. Если целое дерево имеет 0 в качестве собственного значения с кратностью 1, то дерево равно $SK_{1,m}$ для некоторого m .

Все «звездообразные» целочисленные деревья, у которых не более одной вершины степени больше 2, были представлены в работе М. Ватанабе и А. Я. Швенком «Целочисленные звездообразные деревья» (1979) [7].

Целочисленные звездообразные деревья – специальные виды деревьев, в которых все ребра имеют целочисленные веса. Звездообразность означает, что все ребра ведут к одному центральному узлу. Также в работе М. Ватанабе и А. Я. Швенка были представлены свойства и характеристики целочисленных звездообразных деревьев. Они показали, что целочисленные звездообразные деревья имеют определенные свойства, такие как симметричность и ограниченность.

Кроме того, в работе были рассмотрены различные примеры целочисленных звездообразных деревьев и их спектров. Это позволило лучше понять, как выглядят целочисленные звездообразные деревья и как их спектры связаны с их структурой и свойствами.

В статье были определены все целочисленные деревья, гомеоморфные звезде $K_{1,m}$; рассмотрена задача, возникающая, когда дерево является двойной звездой; рассмотрена проблема для деревьев диаметром более четырех.

Теорема 3 [7]. Звездообразное дерево T является целым тогда и только тогда, когда T является одним из этих деревьев:

1. $T = K_1$ или $\phi(T; x) = x$;
2. $T - v = m_1 P_1$ совместно с $m_1 = k^2 \geq 1$ идеальный квадрат и $\phi(T; x) = (x^2 - k^2) x^{m_1-1}$;
3. $T - v = m_2 P_2$ совместно с $m_2 + 1 = k^2 \geq 4$ идеальный квадрат и $\phi(T; x) = (x^2 - k^2) x (x^2 - 1)^{m_2-1}$.

Теорема 4 [7] Если T – целочисленное дерево и T имеет ровно две смежные вершины степени, превышающей два, то T является либо двойной звездой $T - u - v = (m_1 + r_1) P_1$, где полином $x^4 - (m_1 + r_1 + 1) x^2 + m_1 r_1$ имеет только целые корни, либо $T - u - v = m_1 P_1 + r_2 P_2$, где полином $x^4 - (m_1 + r_2 + 2) x^2 + m_1 r_2 + m_1 + 1$ имеет только целые корни.

Теорема 5 [7]. $T(r, m)$ является целым тогда и только тогда, когда m , и $r + m$ являются точными квадратами.

Ниже в качестве примера приведен рисунок 2.1 из [7] наименьшего целочисленного дерева для теоремы 2.

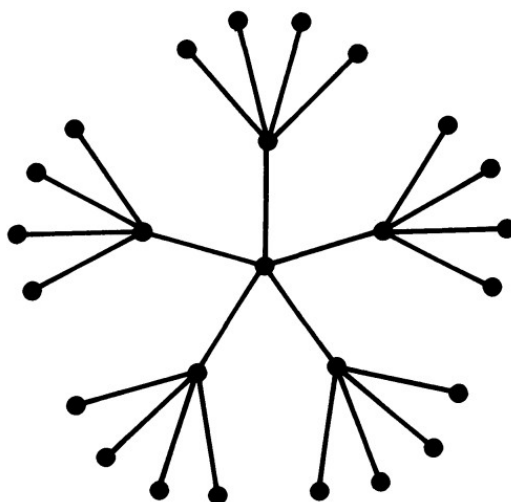


Рис. 2.1 Наименьшее целочисленное дерево $T(r, m)$ вида при $m = 4, r = 5$

В работе «О целочисленных проблемах деревьев» (1987) [8] Ли (X. L. Li) и Лин (G. N. Lin) изучили целочисленные деревья с диаметрами 4, 5 и 6. Они обнаружили некоторые новые бесконечные множества целочисленных деревьев с диаметрами 4 и 6. В своей работе авторы впервые затронули целочисленные деревья с диаметром 5. В дополнение была представлена теорема в виде необходимого и достаточного условия, чтобы такое дерево было целочисленным, но они не смогли найти ни одного примера. Первое целочисленное дерево диаметра 5 было найдено Р. У. Лю (R. Y. Liu) в 1988 году [9].

Важную роль по целочисленным деревьям занимают сбалансированные деревья. Сбалансированные деревья – это деревья, симметричные относительно вершины (корня) или ребра. Для того, чтобы определить центральную вершину (из G) как вершину минимального эксцентриситета, используем определение эксцентриситета $ecc(v)$ вершины v в связном графе G , определяемом как $ecc(v) = \max d(v, w)$ для всех вершин w из G . Центр G является множеством его центральных вершин. В случае, если G – дерево, то тогда по известной теореме Д. Кёнига (D. König) центр будет состоять из одной вершины или двух смежных вершин дерева. Из определения дерево T называется сбалансированным, если все вершины на одном и том же расстоянии от центра $Z(T)$ имеют одинаковую степень.

В работе «Сбалансированные целочисленные деревья» (1998) [10] П. Хик (P. Hic) и Р. Недела (R. Nedela) нашли первое целочисленное дерево диаметра 8. Авторами было построено бесконечно много целочисленных деревьев с диаметром 8 и доказаны теоремы:

Теорема 6 [10]. *Не существует сбалансированных целочисленных деревьев с диаметром $4k + 1$ при $k \geq 1$.*

Теорема 7 [10]. *Не существует сбалансированных целочисленных деревьев с диаметром, равным 7.*

В работе «Целочисленные деревья с диаметром 6 и 8» [11] 1999 Ванг (L. G. Wang), Ли (X. L. Li) и Лю (R. Y. Liu) также независимо построили некоторые семейства целочисленных деревьев с диаметром 8, используя другой метод.

В работе «Целочисленные деревья диаметром 4» [12] (1998) Юань (P. Z. Yuan) определил необходимое условие для того, чтобы деревья $S(r; m_i)$ диаметра 4 были целочисленными, и построил много новых классов таких целочисленных деревьев.

П. Хик (P. Hic) и М. Покорный (M. Pokorný) в своей работе [13] (2003) исследовали целочисленные сбалансированные корневые деревья диаметров 4, 6, 8 и 10.

Метод, описанный в статье П. Хика и М. Покорного (P. Hic and M. Pokorný) [13], может быть использован для нахождения целых сбалансированных корневых деревьев со сколь угодно большим диаметром. Недостатком этого метода является то, что пока не смогли найти ни одного цельного сбалансированного корневого дерева диаметром больше

10, потому что приходится работать с чрезвычайно большими числами. Эта проблема может быть решена путем использования компьютерных вычислений лишь частично. О проблемах, связанных с нахождением целочисленного сбалансированного корневого дерева диаметром больше 10, говорит тот факт, что из 20 миллионов целочисленных сбалансированных корневых деревьев диаметром 4 только 270 814 могут быть расширены до целочисленных сбалансированных корневых деревьев диаметром 6, из них только 31 558 могут быть расширены до целочисленных сбалансированных корневых деревьев диаметром 8. Но проблема существования целочисленных сбалансированных корневых деревьев сколь угодно большого диаметра остается открытой.

Ниже представлена таблица 2.1 [14] со всеми целыми деревьями не более чем на 50 вершинах. Существует еще одна таблица со всеми известными целыми деревьями не более чем на 100 вершинах [14]. В частности, представлены целочисленные деревья диаметром 6 и наименьшее известное целочисленное дерево диаметром 8.

В таблице 1 приведены все целочисленные деревья не более чем с 50 вершинами. Здесь n – количество вершин, а d – диаметр. Поскольку деревья двудольные, спектр симметричен относительно 0, и достаточно указать неотрицательную половину. Кратности записываются в виде экспонент. Ссылки (i) – (v) относятся к семействам, описанным Харари и Швенком [6] (для (i)) и Ватанабе и Швенком [7] (для (ii) – (v)). Графы № 1–8 уже упоминались в [6].

Таблица 2.1. Целочисленные деревья не более чем с 50 вершинами

n	d	Дерево	Спектр
1	0	0	0
2	1	01	1
5	2	01111	2, 0 ³
6	3	01221	2, 1, 0 ²
7	4	0121212	2, 1 ² , 0
10	2	01 ⁹	3, 0 ⁸
14	3	012 ⁶ 1 ⁶	3, 2, 0 ¹⁰
17	2	01 ¹⁶	4, 0 ¹⁵
17	4	0(12) ⁸	3, 1 ⁷ , 0
17	4	012 ⁷ (12) ⁴	3, 2, 1 ³ , 0 ⁷
19	4	012 ⁵ (12) ⁶	3, 2, 1 ⁵ , 0 ⁵
25	5	01(23333) ³ 22(12) ³	3, 2 ³ , 1 ³ , 0 ¹¹
26	2	01 ²⁵	5, 0 ²⁴
26	4	0(12222) ⁵	3, 2 ⁴ , 0 ¹⁶
26	3	012 ¹² 1 ¹²	4, 3, 0 ²²
31	4	0(12) ¹⁵	4, 1 ¹⁴ , 0
31	6	0123 ³ (1232323) ² (12222) ² 1	3, 2 ⁴ , 1 ⁵ , 0 ¹¹
31	6	0(12333) ³ (12222) ³	3, 2 ⁵ , 1, 0 ¹⁷
35	4	0(12) ¹³ (12) ¹⁰	4, 3, 1 ⁹ , 0 ¹³
37	2	01 ³⁶	6, 0 ³⁵
37	4	012 ¹¹ (12) ¹²	4, 3, 1 ¹¹ , 0 ¹¹
37	6	0(1232323) ⁵ 1	3, 2 ⁴ , 1 ¹¹ , 0 ⁵
37	6	0(12333) ² (1232323) ³ 12 ⁴	3, 2 ⁵ , 1 ⁷ , 0 ¹¹
42	3	012 ²⁰ 1 ²⁰	5, 4, 0 ³⁸
46	4	0(12) ¹⁴ (12222) ⁶	4, 3, 2 ⁵ , 0 ³²
49	4	Γ_1	5, 1 ²³ , 0
50	2	01 ⁴⁹	7, 0 ⁴⁸
50	4	0(12222) ⁹ 1 ⁴	4, 2 ⁸ , 1, 0 ³

Пример записи последовательности для дерева [14]. Для именования деревьев используется последовательность уровней деревьев. Учитывая дерево, нужно выбрать некоторую вершину и обозначить ее как корень. Затем необходимо «пройтись» вдоль дерева (сначала в глубину), начиная с корня, и, когда впервые встретится вершина, записать расстояние от нее до корня. Полученная последовательность целых чисел называется последовательностью уровней для дерева.

В качестве примера приведен рисунок 2.2. Количество вершин дерева – 31, а диаметр равен 6, последовательность уровней дерева $0123^3(123)^2(12^4)^21$ или $0123^3(1(23)^3)^2(12^4)^21$.

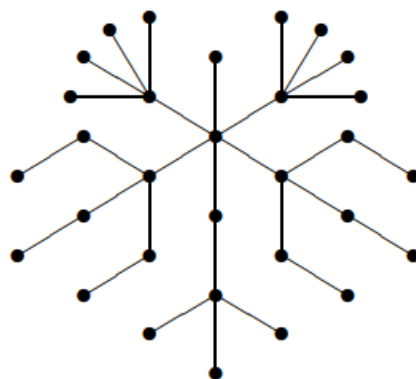


Рис. 2.2. Целочисленное дерево $0123^3(1(23)^3)^2(12^4)^21$ при $n = 31$, $d = 6$

Дерево однозначно определяется любой последовательностью уровней. Родительской вершиной с меткой t является последняя встреченная ранее вершина, которая была помечена как $t - 1$. Например, граф $K_{1,4}$ получает последовательность уровней 01111 , если вершина степени 4 выбрана в качестве корня, и 01222 в противном случае. Здесь использованы экспоненты для обозначения повторения: 01111 можно записать как 01^4 , а 0121212 как $0(12)^3$.

3. Заключение

За последние несколько лет появились новые, посвященные теме целочисленных деревьев работы, содержащие множество частных или несколько более общих результатов. В настоящее время эти проблемы, по-видимому, находятся на той стадии, когда становится возможной некоторая степень систематизации результатов.

Большинство работ по целочисленным деревьям были написаны на китайском языке. Авторы не всегда были осведомлены о работах своих коллег из других стран, что привело к некоторому совпадению результатов китайских и других авторов. В любом случае, проблема целочисленных деревьев оказалась совсем не простой, и именно поэтому, помимо общих результатов, в некоторых работах авторы занимались построением различных необходимых или достаточных условий или частных случаев и примеров.

В данной работе были собраны основные результаты по целочисленным деревьям и их диаметрам. Результаты могут быть полезны различным аспектам в телекоммуникации, включая моделирование, анализ и оптимизацию телекоммуникационных сетей.

Выражение благодарности

В заключение автор выражает благодарность рецензенту за замечания, способствовавшие улучшению материала работы.

Литература

1. *Harary F., Schwenk A. J.* Which graphs have integral spectra? In *Graphs and Combinatorics*, (eds. R. Bari and F. Harary), (Proc. Capital Conf., George Washington Univ., Washington, D.C., 1973), *Lecture Notes in Mathematics* 406, Springer-Verlag, Berlin, 1974. P. 45–51.
2. *Akers S., Krishnamurthy B.* A group theoretic model for symmetric interconnection networks // *Proceedings of the International Conference on Parallel Processing*, 1986. P. 216–223.
3. *Кузнецов, А. А.* Параллельный алгоритм для исследования графов Кэли групп подстановок / А. А. Кузнецов, А. С. Кузнецова // *Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева*. – 2014. – № 1(53). – С. 34–39. – EDN SBPBN.
4. *Кузнецов, А. А.* Графы Кэли бернсайдовых групп периода 3 / А. А. Кузнецов // *Сибирские электронные математические известия*. – 2015. – Т. 12. – С. 248–254. – DOI 10.17377/semi.2015.12.020. – EDN VKASBT.
5. *Овчаренко, А. Ю.* Спектры и диаметры графов Кэли некоторых конечных групп / А. Ю. Овчаренко // *Вестник СибГУТИ*. – 2018. – № 3(43). – С. 45–61. – EDN YLWKTR.
6. *Watanabe M.* Note on integral trees, *Math. Rep. Toyama Univ.* 2 (1979), P. 95–100.
7. *Watanabe M., Schwenk A. J.* Integral starlike trees, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 28 (1979), № 1, P. 120–28.
8. *Li X. L., Lin G. N.* On trees with integer eigenvalues, *Kexue Tongbao (Chinese)* 32 (1987), № 11, P. 813–816 (in Chinese), or *On integral trees problems*, *Kexue Tongbao (English Ed.)* 33 (1988), № 10, P. 802–806 (in English).
9. *Liu R. Y.* Integral trees of diameter 5 (in Chinese), *J. Systems Sci. Math. Sci.* 8 (1988), № 4, P. 357–360.
10. *Hic P., Nedela R.* Balanced integral trees, *Math. Slovaca* 48 (1998), № 5, P. 429–445.
11. *Wang L. G., Li X. L., Liu R. Y.* Integral trees with diameter 6 or 8, 6th Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (Enschede, 1999), 6 pp. (electronic), *Electron. Notes Discrete Math.* 3, Elsevier, Amsterdam (1999).
12. *Yuan P. Z.* Integral trees of diameter 4 (in Chinese), *J. Systems Sci. Math. Sci.* 18 (1998), № 2, P. 177–181.
13. *Zhang D. L., Tan S. W.* Integral trees of diameter 4 (in Chinese), *J. Systems Sci. Math. Sci.* 20 (2000), № 3, P. 330–337.
14. *Brouwer A. E.* Small integral trees. *The Electronic Journal of Combinatorics* (2008), 15, № 1-1/8. DOI 10.37236/876

Овчаренко Алёна Юрьевна

к.т.н., доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики (СибГУТИ, 630102, Новосибирск, ул. Кирова, д. 86), тел. +7 (952) 917-20-27, e-mail: shmatova_aaa@mail.ru, ORCID ID: 0000-0001-7929-1899.

Integer trees and their diameters

Alena Y. Ovcharenko

Siberian State University of Telecommunications and Information Science (SibSUTIS)

Abstract: The article presents an overview of the results on integer trees and their diameters, as well as the diameters of integer Cayley graphs on some groups.

Keywords: integer trees, balanced trees, star-shaped trees, spectrum, diameter.

For citation: Ovcharenko A. Y. Integer trees and their diameters. Vestnik SibGUTI, 2025, vol. 19, no. 1, pp. 3-10. <https://doi.org/10.55648/1998-6920-2025-19-1-3-10>.



Content is available under the license
Creative Commons Attribution 4.0
License

© Ovcharenko A. Y., 2025

The article was submitted: 27.03.2024;
revised version: 25.04.2024;
accepted for publication 08.05.2024.

References

1. Harary F., Schwenk A. J. Which graphs have integral spectra? In Graphs and Combinatorics, (eds. R. Bari and F. Harary), (Proc. Capital Conf., George Washington Univ., Washington, D.C., 1973), Lecture Notes in Mathematics 406, Springer-Verlag, Berlin (1974), pp. 45-51.
2. Akers S., Krishnamurthy B. A group theoretic model for symmetric interconnection networks. Proceedings of the International Conference on Parallel Processing, 1986. pp. 216-223.
3. Kuznetsov A. A., Kuznetsova A. S. Parallel'nyi algoritm dlya issledovaniya grafov Keli grupp podstanovok [A parallel algorithm for study of the Cayley graphs of permutation groups]. Vestnik SibGAU. 2014, no. 1(53), pp. 34–39. – EDN SBPBN.
4. Kuznetsov A. A. Grafy Keli bernsaidovykh grupp perioda 3 [The Cayley graphs of Burnside groups of exponent 3]. Siberian Electronic Mathematical Reports, 2015, vol. 12, pp. 248–254. – DOI 10.17377/semi.2015.12.020. – EDN VKASBT.
5. Ovcharenko A. Y. Spektry i diametry grafov Keli nekotorykh konechnykh grupp [Spectra and diameters of Cayley graphs of some finite groups]. Vestnik SibGUTI, 2018, no. 3, pp. 45-61. – EDN YLWKTR.
6. Watanabe M. Note on integral trees. Math. Rep. Toyama Univ. 2 (1979), pp. 95-100.
7. Watanabe M., Schwenk A.J. Integral starlike trees, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 28 (1979), no.1, pp. 120-128.
8. Li X. L., Lin G. N. On trees with integer eigenvalues, Kexue Tongbao (Chinese) 32 (1987), no.11, pp. 813-816 (in Chinese), or On integral trees problems, Kexue Tongbao (English Ed.) 33 (1988), no.10, pp. 802-806 (in English).
9. Liu R. Y. Integral trees of diameter 5 (in Chinese), J. Systems Sci. Math. Sci.8 (1988), no.4, pp. 357-360.
10. Hic P., Nedela R. Balanced integral trees. Math. Slovaca 48 (1998), no.5, pp. 429-445.
11. Wang L. G., Li X. L., Liu R. Y. Integral trees with diameter 6 or 8, 6th Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (Enschede, 1999), 6 pp. (electronic). Electron. Notes Discrete Math. 3, Elsevier, Amsterdam (1999).
12. Yuan P. Z. Integral trees of diameter 4 (in Chinese). J. Systems Sci. Math. Sci.18 (1998), no.2, pp. 177-181.
13. Zhang D. L., Tan S. W. Integral trees of diameter 4 (in Chinese). J. Systems Sci. Math. Sci. 20 (2000), no.3, pp. 330-337.
14. Brouwer A. E. Small integral trees. The Electronic Journal of Combinatorics (2008), vol. 15, no.1-1/8.

Ovcharenko Alena Yurievna

PhD in Engineering, Docent of the Department of Higher Mathematics, Siberian State University of Telecommunications and Information Science (SibSUTIS, Russia, 630102, Novosibirsk, Kirov St. 86), phone: +7 (952) 917-20-27, e-mail: shmatova_aaa@mail.ru, ORCID ID: 0000-0001-7929-1899.